

還元法の連続体への適用法

AN APPLICATION OF THE REDUCTION METHOD TO CONTINUUM MECHANICS

今村 純也*, 棚橋 隆彦**

Junya IMAMURA and Takahiko TANAHASHI

* 正会員 IMI計算工学研究室(慶大理工共同研究員) (〒351-0114 和光市本町 31-9-803)

**非会員 工博 慶応義塾大学教授 理工学部機械工学科(〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1)

The application of the reduction method to 1D problems such as continuous beams has been established. The method can be easily applied to 2 or 3D frameworks which are constructed as open systems. However, application of the method to closed frameworks is not generalized, and can not be easily understood. One of authors has proposed a method of application to closed systems. The method includes not only the deformation method but also the force method, because equilibrium and compatibility conditions are used in the simultaneous equation, and as independent variables deformations at the ends of beams are used. This paper proposes an application of the method to continua.

Key Words: reduction method, transfer matrix method, continua, continuum mechanics

1. 研究の背景と目的

1.1 背景

(1) 還元法と開いた系への適用法

還元法は遷移マトリックス法 (Übertragungsverfahren, Transfer Matrix Method) と呼ばれ、電線や線材などの1D問題への適用法として確立されている。電磁気学と力学には微分方程式上多くの類似性があるので、解析手法にも互換性が高い。本稿ではこれを力学系で説明する。

遷移マトリックス法のネーミング由来は、ある断面の状態量 (Zustandgrößen, 変位および応力) を別の断面へ移すマトリックス (遷移マトリックス) を用いる方法であることによる。

2つの断面は格間 (線材の左右間) あるいは格点間 (バネ支持点などの前後) の断面であり、前者の変換マトリックスは格間マトリックス (Feldmatrix)、後者のそれは格点マトリックス (Punktmatrix) と呼ばれ、両者はひとつにして伝達マトリックス (Leitmatrix) と呼ばれる。¹⁾

遷移マトリックス法が最もエレガントに適用される架構が連続桁であろう。連続桁の左端の力と変形の共役対の片方をgivenとし、他方を未知 (Freigrößen) として右端へ伝達し、右端境界条件でこれを決める。そのプロセスでは、中間支持点での未知数乗換えの消去手順が入るものの、主たる演算はマトリックス積であり、アルゴリズムは非常に簡素である。

線材の開いた系 (offene Rahmentragwerke) では、幹となる連続した1本の架構を選び、他は枝として取り扱えば、枝部分は格点マトリックスとしてまとめ得る。よって、連

続桁のアルゴリズムがそのまま適用できることになる。

このような架構は橋梁をはじめとして土木構造物に多く見られ、それ故にと推測するが、遷移マトリックス法は土木工学の分野で研究実績および適用事例が多い。

橋梁では移動荷重の影響の全体像を把握したい要求がある。これに対しては影響線図が有効である。影響線は変位と応力の微分方程式上の相似性を用いて計算されるが、遷移マトリックス法では状態ベクトルを取り扱うことから、詳細な影響線図を容易に求め得る特長も与かっている。

遷移マトリックス法は主としてドイツで発達し、S. Falkが1858年に Ingenieur Archiv にHeft 1. として報告した「開いた系への適用法」²⁾ およびHeft 2. として報告した「閉じた系 (geschlossene Rahmentragwerke) への適用法」³⁾ がそれまでの研究を非常に簡潔に、かつ網羅的にまとめている。

また、その後 R. Kerstenによる成書⁴⁾ があり、わが国では成岡・遠田による成書⁵⁾ がある。

(2) 還元法の閉じた系への既往の適用法

それらに述べられている「閉じた系への適用法」は、あくまでも開いた系への適用法の延長上にある。

例えば、閉じた系として最も簡単で代表的な例は平行弦フィレンディール桁であるが、連続桁としての上下弦材をバネマトリックスで連立方程式として繋ぐ方法で説明され、そのスキームは必ずしも理解し易いとは言えない。

それ故、遷移マトリックス法はそれ単独で閉じた系への適用法として汎用化された例はないと言える。

(3) 変位法と応力法

一方、力学系の連立方程式の組み立て方としては、変位法と応力法がある。両者は連立方程式解の桁落ち誤差防止という点では、それぞれ補い合うべき性質を有していることがよく知られている。

しかし、応力法は桁落ち誤差がなるべく小さくなる最適な静定基本系^(注1)の選定の一般化されたアルゴリズムがまだないことから、適用例は部材数が少ないか、多い場合には単純な架構に限られてくる。

応力法として初めて一般の用に供された解析システムとしては PROSA⁶⁾がある。しかし、最適な静定基本系の選定が保証されていたわけではない。⁷⁾

変位法はそのスキームが最も簡潔であることから現在ではあらゆる解析での主流となっている。

(4) 遷移マトリックス法と変位法の複合法

そこで、遷移マトリックス法を変位法と組合せ、前者は開いた系への適性を生かして剛性マトリックスを作成するためにのみ適用し、後者はそれによって最小限度に縮約された連立方程式を組み立てるために適用する複合法が、両者の特長をそれぞれ生かした方法として勧められる。

特に、曲線材・折れ線材や変断面を含む部材、剛域を含む部材、荷重変化の著しい部材など、変位法単独では多数の中間節点を設けなければならない架構では、連立方程式の未知数低減のほか桁落ち誤差^(注2)防止の点からも、遷移マトリックス法の併用は非常に有効な方法である。

(5) 還元法の閉じた系への新しい適用法

還元法 (das Reduktionsverfahren, successive element method) は既知のある状態ベクトルを次の点における未知の状態ベクトルに還元する由来から名付けられている。

(遷移マトリックス法と同義であるがこの理由により、本稿では還元法と呼ぶ。)

ここで、還元法は常に「状態ベクトル」を取り扱っていることに注意を喚起したい。すなわち、伝達マトリックスによって表される方程式の従属変数は状態ベクトルであり、かつ独立変数も状態ベクトルである。

この観点からは、変位法は剛性マトリックスによって独立変数としての変位ベクトルと従属変数としての応力ベクトルを結びつけている。また、応力法は撓性マトリックスによって独立変数としての応力ベクトルと従属変数としての変位ベクトルを結びつけている。三者のいずれも自由度数は変わらず、相互変換も可能である。

しかし、最も簡単な連続桁上の遷移プロセスを1枚の連立方程式シンタックス上に落としたとき、 i 行サブマトリックスは $[A] \{Z\}_{Li} + [E] \{Z\}_{Ri} = \{B\}$ となり、状態量を未知数として、適合条件式と釣合条件式が連立されていることが分かる。($[A]$ は遷移マトリックス, $[E]$ は単位マトリックス, $\{Z\}$ は状態ベクトル, Li は左端, Ri は右端, $\{B\}$ は外力ベクトル)

この点に着目した今村は、還元法は変位法と応力法を包

含した方法であるとして線材架構での「遷移マトリックス法の閉じた系への適用アルゴリズム」⁸⁾を提案した。

すなわち、変位法は適合条件(ノード変位の一致)をまず満足させ、次いで釣合条件を連立方程式で解く方法であり、応力法は静定基本系で応力をまず求め、次いで適合条件を連立方程式で解く方法である、とした。

これらに比べ、還元法は部材一点の状態ベクトルを未知数とし、適合条件、釣合条件ともに連立方程式で解く方法であることを指摘し、その解法のアルゴリズムを示した。

(6) 還元法と変位法および応力法との関係

未知数としての部材一点の状態ベクトルは材端変位ベクトルに変換表示してもマトリックスの意味は同じである。

したがって、まず還元法の連立方程式中の適合条件によって、適合条件の数に等しいだけの未知数を消去すれば変位法の連立方程式を得る。

同様にして釣合条件によって、まず静定基本系となるように未知数を消去すれば、応力法の連立方程式を得る。よって、還元法の連立方程式は両者を包含するとした。

連立方程式解法として絶対値最大のpivot要素を選んで消去プロセスを実行すれば、桁落ち誤差を防ぎ、精度高い解を得ることが知られている。そこで、還元法マトリックスをこの手順で解き、非常に精度高い解を得ることを数値的にも検証した。⁸⁾

(7) 還元法の問題点

かつて、Ruhr大学のW. Zerna研究室 (Institut für Konstruktiven Ingenieurbau) ではdie deutsche Forschungsgemeinschaftの助成で線材架構解析システムの開発・研究を行った。その報告⁷⁾によれば、還元法はバネ支持点での桁落ち誤差が系全体に波及するおそれが高いので、汎用プログラムには適当でないと結論し、前述の剛性マトリックスを求めるために適用し、全体マトリックスは変位法で解く複合法を推奨している。

ただ、剛な支持点での中間支持条件導入では、これと共役対の未知数への乗換えに際して、絶対値最大pivotを選んで当該未知数を消去すべきことを推奨^{9) 10)}し、桁落ち誤差問題を解決している。

このpivot選定法は一般化すれば、前述の還元法の全体マトリックスの消去手順に一致する。

また、還元法による剛性マトリックスの変位法への組み込み手順は、開いた系の還元マトリックスの縮約手順として還元法マトリックスの全体系へも同様に適用できる。

したがって、還元法のill-condition問題として残るのは連続した中間バネ支持点の問題である。これは後述する方法で、著者の一人はその後解決¹¹⁾している。

また、Zerna研究室報告では連立方程式解法として消去法を推奨し、CROSS法やKANI法系列の繰返し計算法は、計算回数の見通しに事前には立たない理由で推奨しないと結論している。

この研究は線材架構解析を目的としてなされ、当時とし

ては妥当な結論と考えられる。

(8) 還元法への新たな視点

しかし、①閉じた系への新しい適用法によって変位法と応力法の特長を兼ね備えた精度高い解法であることが明らかになったこと ②ill-conditionの回避は可能であること ③前処理つきCG法や著者らの提案¹²⁾する修正SOR法などの反復計算手法も発達し、大スケールのスパースマトリックスを効率よく解く手法として還元法への適用を見直す段階にあること、などの状況変化が指摘できる。

特に、③は流体解析などの初期値問題に適用して効率的であることはよく知られている。

また、①は柔な系に一部極めて剛な部分を含む系で、変位法では桁落ち誤差が生じるのが典型例であり、還元法ではこれを防止可能な点を指す。(〔付録1, 2〕参照)

従来、構造解析では柔な構造の一部に剛な部分を含む系では、剛域として変位のカップリングで処理してきた。これは部分的な還元法の適用と言える。また、その処理で現実的な問題は生じていない。

しかし、メガフロートで代表されるような最早剛としてはモデル化できない構造物と流体の相互作用や、スロッシングで代表されるような自由表面問題でのill-condition問題の解析などの要求が生じている。これを受けて、流体と構造物の相互作用解析のシンポジウム等も開催され、その解法の確立が要請される状況にある。

1.2 研究の目的

そこで本研究では、ill-conditionの流体解析への適用をイメージし、かつ反復計算法の適用を前提として、線材架構の閉じた系への適用手法を進展させ、連続体解析への適用手法を検討する。

本稿はその基礎的検討を行うもので、その特長が捉えられ、できるだけ簡単な例題で、数値的にも検証してゆくものとする。

2 方法

2.1 格間マトリックス

(1) 1次元問題

桁材を例にとれば、格間マトリックスは荷重と反力の釣合式(1)から誘導される。すなわち、(1)式を逐次積分し、積分定数をパラメーターとすることによって導かれる。

$$\frac{dQ}{dx} = q, \quad \frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{D}, \quad \frac{dw}{dx} = \theta \quad (1)$$

ただし、 q は分布荷重、 Q はせん断力、 M はモーメント、 θ は傾角、 w はたわみ、 D は剛性

左端($x=0$)状態ベクトルを $\{Z\}_0$ とすれば、 x 点の状態量は $[A]$ を格間マトリックスとして(2)式で表される。ただし、 $\{ \}$ は列ベクトル、 $[\]$ は行ベクトル、 $[\]$ はマトリックス、添字 T は転置を表す。

$$\{Z\} = [A] \{Z\}_0 \quad (2)$$

ただし、 $\{Z\} \equiv (w, \theta, M, Q, 1)^T$

$$[A] \equiv \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2D} & \frac{x^3}{6D} & \frac{x^4}{12D} \\ & 1 & \frac{x}{D} & \frac{x^2}{2D} & \frac{x^3}{6D} \\ & & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ & & & 1 & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

1Dの遷移マトリックスは以上のようにして導かれるが、2Dおよび3Dへの拡張を容易ならしめるため、テーラー展開式を用いて数学的に説明しておくものとする。

$x=0$ の周りの有限テーラー展開式は(3)式で表される。

$$\{f\} = [F_{ij}] \{f\}_0 \quad (3)$$

ただし、 $\{f\} \equiv (f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, \dots)^T$

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{x^{j-i}}{(j-i)!} \end{bmatrix}, \quad \text{if } j \geq i$$

$$F_{ij} = 0, \quad \text{if } j < i$$

よって、 $[A]$ は $[F]$ の行・列に適当な係数を乗じて作成されることになる。

(2) 2次元、3次元問題

格間マトリックスは $\{f\}$ および $[F]$ に2Dまたは3Dの有限テーラー展開式係数を適用し、かつ微分係数と応力間の比例係数を適用することで作成される。

このようにして求まる遷移マトリックス、または前項で述べた(1)式の力学的関係式を逐次積分して求まる1次元の遷移マトリックスが物理量の遷移マトリックスであるのに対し、テーラー展開係数マトリックス $[F]$ は微分係数の遷移マトリックスと言える。

2.2 中間バネの処理法

ill-conditionに陥るとされる中間バネ支持点の処理法について連続桁で例示する。

バネ剛性が大きい場合には格点間マトリックスに代えて、次のようにして変数の乗換を行うことで桁落ち誤差問題は解決される。

$$[B_{ij}] \{X\} = \{0\} \quad (4)$$

$$\xi [B_{ij}] \{X\} = R \quad (5)$$

$\{X\}$ はバネ支持点-0の未知数ベクトル、 $[B_{ij}]$ は状態マトリックス、 $[B_{ij}]$ はそのたわみ行、 R は未知反力とし、(5)式で(4)式の未知数のひとつを消去し、 R を新たな未知数としてそれと乗り換える。消去に当たっては絶対値最大のpivotを選択する。

次いで、状態ベクトルのせん断力に R を加えることでバ

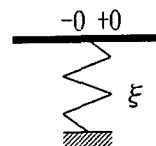


図-1 バネ支持点

ネ支持点+0の状態ベクトルを得る。

この方法で弾性床上の桁を連続したバネ支持点でモデル化し、桁落ち誤差を防いで安定的に解いている。⁽¹¹⁾

2.3 閉じた平面ラーメンへの適用法

後述する連続体への適用法の理解を容易ならしめるために、既報⁸⁾の方法の概要を示す。

材中点の微分係数ベクトルを $\{f\}_0$ とすれば、(3式)によって材端の微分係数が $\{f\}_0$ で表現される。材端変位を $\{d\}$ 、応力を $\{K\}$ とし、これらを $\{f\}_0$ で表す。

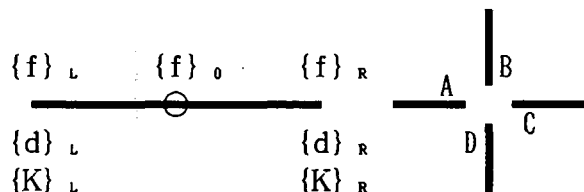


図-2 桁材

図-3 節点

4材の集まる図-3の節点で例示すれば、

$$\{d\}_A = \{d\}_B = \{d\}_C = \{d\}_D \quad (6)$$

より3つの適合条件式を得る。

また、釣合条件式は(7式)である。

$$\{K\}_A + \{K\}_B + \{K\}_C + \{K\}_D = 0 \quad (7)$$

よって、 k 材中点の微分係数を $\{f\}_{0,k}$ として、適合条件式と釣合条件式を連立させれば全体系を得る。これを境界条件の下に解けばよい。

$\{f\}_{0,k}$ を材端変位で表現するマトリックスを $[C]$ とし、(3式)に右から乗じれば(8式)となる。

$$\{f\} = [F_{ij}] [C] \begin{Bmatrix} d_L \\ d_R \end{Bmatrix}_k \quad (8)$$

ただし、 $[F_{ij}]$ を $[F_{ij}]$ のうち変位に関するサブマトリックスとして

$$[C] = \begin{bmatrix} [F_{ij}]_L \\ [F_{ij}]_R \end{bmatrix}_k^{-1}$$

以上は材端変位 $\{d\}_{L,k}$ 、 $\{d\}_{R,k}$ を未知数として解いても同じであるから、連立方程式の行と未知数の数は合うことは明らかであろう。

2.4 連続体への適用法

(1) 有限要素法および適用要素

離散化手法として有限要素法を適用する。有限要素法は変分原理に基づき発展したが、一般化して重みつき残差法として確立されている。本稿では、重みつき残差法のうちガレルキン法を適用する例で説明する。(ガレルキン法は変分法と言える。)

有限要素法ではノード(節点と邦訳)の概念を導入して、線材架構とのアナロジーでその手法が説明される。しかし、ノードの概念で重要なことは、ノード上で未知数が一定の条件を満足すれば、要求される連続条件が満足されること

にある。筆者のひとりはこの条件を示し、 N 回連続的微分可能な要素の系統的誘導法を提案している。(〔付録3〕参照)

本稿では最も簡単な要素で例示するが、以下に示す方法は、したがって、高次要素にも拡張可能である。

以下は板曲げ問題で例示^(注3)し、要素は C_1 連続な双3次要素を用いる。

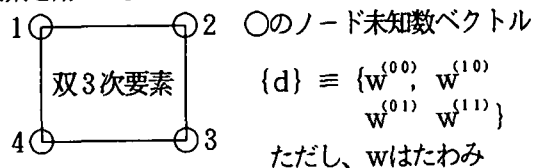


図-4 C_1 連続な要素

(2) 連立方程式

図心の微分係数を $\{f\}_0$ とし、(8式)を用いて連立方程式を組むものとする。

有限要素法では $\{d\}_L$ 、 $\{d\}_R$ に代え、ノード番号を n とし、その未知数ベクトル $\{d\}_n$ でこれを表す。

釣合方程式(7)はガレルキン法の変分式とする。その k 要素部分を $\{K_i\}_k = [K_{ij}] \{d_i\}$ と記号する。図-5のような4要素の会するノードでは、当該ノードのそれぞれの未知数ベクトルでの変分式の和とする。(和の変分は変分の和に等しい)

一点に会するノードの変分式は4つある。いまAの要素について考えれば、要素の変分式マトリックスは(9式のように 4×4 のサブマトリックスに分割できる。(要素内ノード番号は図-4による)

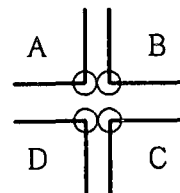


図-5 4要素ノード

$$[K_{ij}]_A \{d_i\}_A \equiv \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}_A \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}_A \quad (9)$$

ただし、 i, j は図-4のノード番号に対応する。

$[K_{ij}]_A$ の誘導については次項に述べるが、同様にそれぞれ他の要素を $[K_{ij}]_B$ 、 $[K_{ij}]_C$ 、 $[K_{ij}]_D$ としたとき、図-5の例では釣合式は(10式)となる。

$$[K_{ij}]_A \{d_i\}_A + [K_{ij}]_B \{d_i\}_B + [K_{ij}]_C \{d_i\}_C + [K_{ij}]_D \{d_i\}_D = \{0\} \quad (10)$$

このように変分式の和が許されるためには適合条件(11式)が満足されている必要がある。よって、(10式)と(11式)を連立させて解く。

$$\{d_i\}_A = \{d_i\}_B = \{d_i\}_C = \{d_i\}_D \quad (11)$$

(3) 変分式

板の剛性を D 、分布荷重を q とすれば、面反力と q の仕

事量の保存式は12式である。ただし、系内を Ω とする。

$$\int_{\Omega} w (D \nabla^2 \nabla^2 w - q) d\Omega = 0 \quad (12)$$

12式に発散定理を2回適用し、かつ要素間境界でエネルギーが保存されるよう(積分定数としての応力が連続するよう)等価線エネルギーを加えてモデル化することで、有限要素法で常套的な13式を得る。

$$\int_{\Omega} \{ D (\nabla^2 w)^2 - w q \} d\Omega = 0 \quad (13)$$

13式にガレルキン法を適用した14式の連立方程式を境界条件の下に解けばよい。

$$\int_{\Omega} \{ D \delta (\nabla^2 w) \cdot (\nabla^2 w) - \delta w \cdot q \} d\Omega = 0 \quad (14)$$

あるいはポテンシャルエネルギーの変分式15を解く。

$$\int_{\Omega} \delta \left\{ \frac{D}{2} (\nabla^2 w)^2 - w q \right\} d\Omega = 0 \quad (15)$$

以上の式には要素間境界に加えた等価線エネルギーが顕れないので、モデル化項の陰的表現式と呼ぶ。次に別法として、モデル化項の陽的表現式¹²⁾を示す。

後述のように、解の誤差把握にはモデル化項の陽的表現式が便利である。これを16式に示す。16式は13式に発散定理を12式に戻るように2回適用して誘導した。ただし、 S は要素間境界で、 s は要素辺に平行方向、 n は垂直方向とする。

$$\int_{\Omega} w (D \nabla^2 \nabla^2 w - q) d\Omega - \int_S D \left(w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - \frac{\partial w}{\partial n} \nabla^2 w \right) ds = 0 \quad (16)$$

16式は13式に単に数学的に発散定理を適用しただけであるから、両者は等価であることは明らかであろう。

しかし、16式と12式を比べると、16式には第2項の要素間境界一周積分項が余分に加わっている。これが有限要素法におけるモデル化項である。この項は要素間境界で不連続な微分項のみ意味を持ち、連続な項は隣接要素どうして相殺してゼロとなる。よって、 C_1 連続な要素では曲げモーメント項がゼロとなるので16式から削除できる。 C_2 連続な要素ではせん断力も連続であるから第2項をすべて削除でき、12式と16式は等価となる。

前述の変分マトリックス $[K_{ij}]$ は17式を13式または14式に代入し、かつ Ω に代えて要素内 ω で積分し、整理することで求まる。(あるいは4階微分まで求めて16式に代入

し、同様に整理する。)

$$\begin{aligned} w &= [F_{ij}] [C] \{d_n\} \\ \nabla^2 w &= ([F_{4ij}] + [F_{6ij}]) [C] \{d_n\} \end{aligned} \quad (17)$$

(4) 剛性変化

要素内で D は一定とし、要素で異なる値をとる場合を考える。

12式は系が連続であることを条件に導かれている。したがって、このような不連続系は本来連続体解析の対称外であり、モデル化して近似解析するとすれば、 D が急変する連続関数としてモデル化する必要がある。

しかし一方で、1Dの桁問題では不連続(極端な例では剛域)であっても、 C_1 連続な要素で正解を得る。

板曲げ問題であっても、一方向に極端に長い矩形板では解は桁の解に近似的に等しいはずである。そこで、桁の解法にならって板曲げの近似解法を考える。

1D桁問題は代数的に解くことができ、かつ前述のように C_1 連続な要素で正解を得るが、2D板曲げ問題は数値解析による近似解しか得られない点異なる。

図-2では未知数設定するノードを材中点とし、材端に変換しても同じと述べた。連続桁でも同様である。さらに、1.1(5)で説明した連続桁遷移プロセスの原点に戻れば、格間の左端状態量を未知数としても同じである。

ここで留意すべきは、未知数として状態量を用いている点である。これにより、(2)式の格間マトリックスの主対角項は1となっている。言い換えれば、テーラー展開係数を用いて微分を独立変数とし、状態ベクトルを従属変数として表された関係式を、さらに規準化することによって桁落ち誤差が防止されていると言える。

よって、2.1(2)の2D、3D問題での格間マトリックス誘導法を、剛性変化する板曲げ問題へ適用する際には、以上に述べたプロセスに則ればよいことが判る。すなわち、

- ①要素図心の2階以上の微分係数には D を乗じてパラメータ(系の未知数)とし、テーラー展開係数 $[F_{ij}]$ の対応する列を D で除し、要素内の基底関数を有限テーラー展開式で表す。傾角等の微分も同様に表す。
- ② C_1 連続条件を満足するようノードおよび適合条件の微分係数(ノード未知数ベクトル)を選定し、それらを①の展開式で表す。
- ③同様に、13式を①の展開式で表す。
- ④上記②の適合条件式および③の釣合条件式を連立させ、境界条件の下に解く。

以上の連立方程式未知数(図心パラメータ)は、有限要素法で常套的なノード未知数ベクトル(ただし、 D を乗じた)に変換表示しても同じである。よって、整理すれば結局、14式の D を未知数に含めて連立方程式を表現すればよいこととなる。そして、還元法の連立方程式はこの表現を可能とする。

適合条件式のマトリックス要素は $1/D_k$ であり、消去法では絶対値最大の(マトリックス)要素をpivotに選んで桁落ち誤差を防ぐのであるから、SOR法ではその要素が主対角要素となるように連立方程式を組めばよいことが判る。

(10)式のモデル化項は伝達応力の不連続性を補うために加えられているので、 C_2 連続な要素あるいはさらに高階連続な要素を用いる場合には、2階微分以上は D で除した値を等置する。ここでは C_1 連続要素を適用するとしたのでこの点で特別な操作は不要であるが、提案する方法は C_1 連続な要素に適用可能なことが判る。

2.5 誤差の把握

前節と同様に板曲げ問題で例示すれば、(10)式を部分領域で積分し、その面積 A で除すことでエネルギー平均誤差を把握する。

部分領域は図心から要素辺へ下ろした垂線の足で囲まれる面積とし、モデル化項の線積分値はその領域に属するとする。仕事量誤差は同様に(10)式で把握する。

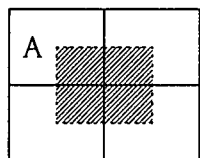


図-6 誤差積分領域

$$R = \int_A (D \nabla^2 \nabla^2 w - q) dA - \int_S D \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w ds \quad (18)$$

上記はモデル化項の陽的表現式の適用例として示した。線材架構では検査面を材中点にとって統一する。

2.6 還元法連立方程式の特長

目的に述べたように、本稿は流体解析への適用を目的とし、その基礎的検討材料として板曲げをとり挙げた。板曲げ方程式(1)の q を過度変化率で置き換え(振動問題では加速度項に相当)、かつ過度を流れ関数で表せば2D非圧縮流体の過度拡散方程式を表す。さらに、移流項を q に含めれば移流拡散方程式となる。

3D流体ではさらに過度ストレッチング項が加わり、かつ重要な役割を果たす。その影響を考慮することが3D解析を不可欠とするゆえんでもある。この点から還元法連立方程式の特長を述べておく。

3D解析では未知数自由度を効率的に配分するために、アダプティブ手法の適用が必須となる。そのためには連立方程式左辺の組み替えが必要となる。変位法では主対角要素上のサブマトリックス組み立てに剛性マトリックスの和演算が入る(剛性差が大きいと剛性の小さい方のマトリックスの情報が失われる原因)。しかし、(10)式の還元法では $[K_{ij}]$ (剛性マトリックスを D で除したもの)の演算が全く入らない。したがって、アダプティブな展開が容易である。

この特長はアダプティブ手法適用に留まらず利用できる。

例えば、等分割要素を用いる系では要素マトリックスは1種類である。したがって、この要素マトリックスを1組用意すれば、SOR法を適用して連立方程式を組まず、間接的に要素マトリックスを用いて解くことができる。

また、適合条件式を連立させるので、連立方程式は一見4倍になる。しかし、適合条件の連立方程式行は $-1/D$ と $1/D$ の2値だけであり、最もスパースである。かつ、SOR法適用に当たって、連立方程式中の位置からその値が判る。よって、連立方程式記憶容量を全く必要としない。

還元法では、釣合方程式と適合条件式を連立させるという他の手法にない特徴を有す。これは境界上でディリクレ条件とノイマン条件を重みつきで同時に表現できることを意味し、接触問題や破断問題など条件不連続な問題を条件が連続変化する問題に置き換えて解析可能なことを示す。

本稿では以上の特長を念頭に置きながらも、以下では既存プログラムの改造によって、連続体への適用法が適正であることの検証に重点を置いて検討する。

3. 数値計算例

3-1 例題の選定

マトリックスの性質として、線材架構と連続体とで根本的な違いのないことはよく知られている。両者ともにエネルギー原理から導かれる。

連立方程式解法として、消去法と反復計算法のいずれが適当かは解くべき問題によると考える。これは線材架構単独でも同様である。

ただ、反復計算法は収束が保証される問題なら、反復回数は論じないとして、許容残差を厳しくすることで解精度を上げ得る。したがって、消去法で桁落ち誤差が出る問題は、その解を初期値として反復計算して精度を上げ得る。(誤差ベクトルを連立方程式右辺として消去法で誤差解消する方法¹³⁾に準じれば、さらに効果は高い。)

本稿では初期値問題への適用をイメージしているので、消去法については多くを論じない。そこで、線材架構で検討した既報⁹⁾の結果を再整理し、還元法が有する基本的特性(変位法と応力法を包含)を数値的に示す。

連続体については、厳密解の知られている、かつ最も簡単な等分布荷重を受ける正方形板で、①提案した方法が適正であることを厳密解と比較検証し、②剛な部位(極端には剛域)を含む桁が特別な操作なしで解けるという還元法の(変位法にない)特性を、連続体でも具備していることを正方形板の中央部剛性をパラメトリックに変化させ、連立方程式が安定的に解けることで確認し、③その剛性変化が大きくなれば変位法でも解けることから、パラメトリックスタディの1ケースを変位法で確認する、作業をいずれも数値的に行う。

3-2 線材架構

(1) 例題

図-7の3スパン、3層の平面ラーメンを例題とし、図のbの部材の剛性を非常に大きくし、還元法と変位法を消去法によって解き、解の有効桁を比較した。

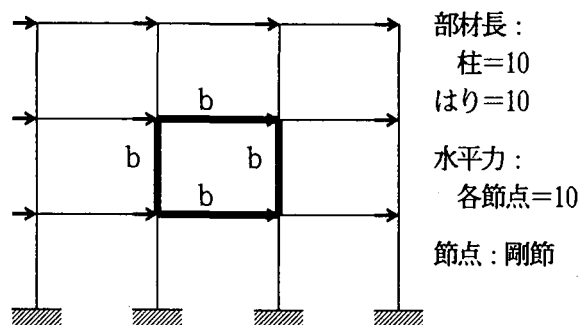


図-7 平面ラーメン例題

b以外の部材の剛性は $D=1$ とし、bの部材を $D=10$ 、 $D=10^2$ 、 $D=10^3$ 、 $D=10^4$ 、 $D=10^5$ 、 $D=10^6$ とパラメトリックに変化させて解いた。（〔付録1〕参照）

計算はすべて実数32ビット表現の単精度計算である。

連立方程式はセミ三角マトリックスとなるよう組立て、その特性を生かしながら、行内の絶対値最大要素をpivot要素に選び、掃き出し法で解いた。

精度の検討は対称性の比較のほか、消去プロセスでの各演算ごとの桁落ち誤差をサブルーチンを用意して計算し、結果の総合的な誤差を比較している。（〔付録2〕参照）

誤差比較は節点の変位および回転角、部材端のモーメントおよびせん断力とし、それぞれ有効桁数の小さい順に並べ、順位10までをグラフ上で比較している。

(2) 計算結果と考察

有効桁はいずれも微分の階数の高いほど小さく、せん断力、モーメント、回転角、変位の順となっている。

その第1順位どうしを比較すると、 $D=10^4$ のケースではせん断力は変位法で有効桁1桁以下であるのに比べ、還元法は4桁強を保持している。モーメントもほぼ同様である。

回転角は、変位法で3桁強、還元法で5桁強であり、節点変位もほぼ同様である。

$D=10^5$ のケースでは変位法結果はもはや利用不能であるのに比べ、還元法結果は対称性の最も崩れている部材のせん断力の比が1.0:1.1であり、層せん断力の合計は80で外力と釣り合っている。

さらに、 $D=10^6$ のケースでは層せん断力は依然釣り合っており、最悪のせん断力比で1.0:4.2となり、そのままでは利用できなくなる。

これは部材剛性の違い（マトリックスの差）を僅か4ビット（ $=24-\log_2 10^6$ 、24は仮数部ビット数）で表現した連立方程式を解くものであり、非常に厳しい条件設定であるから、還元法の解精度は非常に高いといえる。

3-3 周辺固定正方形板

(1) 計算ケース

実数は倍精度32×2=64ビット表現で計算している。

連立方程式解法は著者らの提案している修正SOR¹⁴⁾によった。（〔付録4〕参照）

板は $D=1.0$ を標準とし、辺長=1.0、 $q=1.0$ で、解精度は中央部たわみの厳密解(0.001265)との比較および対称性で把握する。このため板は全体を解いた。

要素分割は標準剛性のケースで、板中央にノードが位置するよう偶数分割し、 $2 \times 2 \sim 14 \times 14$ および 20×20 の等分割とした。

次いで、 10×10 要素で板中央部4要素のみDをパラメトリックに変化させて解いた。（標準を $D_0=1.0$ 、中央部Dとし、 $D/D_0=1.0 \sim 10^8$ ）

最後に、剛性変化計算結果が要素数を増やせば一定値に収束してゆくことを確認するため、および変位法と同じ解を得ることを確認するため、 $D/D_0=10.0$ のケースで、 20×20 、 30×30 および 40×40 要素で、変位法および還元法ともに同ケース計算した。

(2) 収束条件

今回の検討では積分点や収束条件の比較検討は行わず、方法が安定的に計算可能かどうかに重点を置いた。

したがって、これらの条件に疑義を挟む必要のないように、積分点は要素内で 9×9 のガウス積分とし、収束条件はノードのたわみおよび回転角の残差絶対値の最大が 10^{-19} 以下となるまで反復計算した。（アウトプットは小数点以下9桁目を四捨五入して8桁までを板の対称性で確認）

適用した修正SOR法は残差絶対値の最大行をサーチして開放するプロセスを実行するが、上記条件いずれもが満足されるまで、たわみ、回転角（x方向、y方向）およびねじり角の順に開放を行っている。本稿では、演算時間の比較は行わず今後の検討に残す。

修正SOR法の加速係数は標準として1.8で行い、それで発散した還元法の 10×10 以上の分割要素では1.7とし、変分法ではいずれも1.7とした。変断面ではそれでも発散するケースはさらに順次引き下げて計算した。

(3) 計算結果

板中央のたわみを要素のパラメトリックな分割数に対応させて表-1に示す。

数字は小数点以下9桁目を四捨五入して8桁目までを示す。

これらの数字は基本的に通常の有限要素法による値と異なるものではない。

したがって、今回連立方程式を変位法で解いた結果も同じである。

表-1 中央たわみ量

要素 分割数	たわみ量 $\times 10^{-2}$
2×2	0.132479
4×4	0.126487
6×6	0.126508
8×8	0.126522
10×10	0.126527
12×12	0.126529
14×14	0.126530
20×20	0.126531

10×10の要素分割で、中央部4要素の剛性を大きくして解析した結果を表-2に示す。
変分式は3式から導いた式を適用している。

この結果は剛性一定のケースのたわみ量から滑らかに変化していること、かつ小さい方向に向かい、非常に大きな剛性では一定値に収束してゆくこと、など力学的定性をよく表している。
残差を非常に厳しくおさえたこと、かつ解の対称性が保たれていることから、桁落ちはほとんどないと言える。

剛性変化 $D/D_0=10$ のケースの要素細分割による中央部たわみの変化を表-3に示す。(変位法による解も全く同じ)
30×30分割と40×40分割の解結果が6桁まで一致していることから、厳密解もこの近辺にあると予想される。

(4) 結果の考察

Dが一樣な周辺固定板では厳密解と比較し、還元法の連続体への適用法が適正であることを数値的に検証した。なお、変位法でも同一ケース計算し全く同じ解を得た。
変断面では10×10要素のパラメトリックスタディで力学的定性をよく表していることが確認できた。その1ケースである $D/D_0=10$ を要素分割数を増やして計算し、一定値に収束することを確認した。この解が厳密解に近いことの保証はできないが、有限要素法では要素数を増やせば厳密解に収束する保証があり、その必要条件は満たした。
 $D/D_0=10$ で同一ケース変位法でも計算し、全く同じ解を得ることを確認した。変位法で桁落ち誤差が顕れていないのは、剛性の違いが小さいこと、倍精度計算であること、許容誤差を厳しくしてSOR法を適用したことによると考える。なお、剛性比がさらに大きなケースでは変位法では収束するまで極めて多大の時間を要する。
還元法は、はじめに述べたように、変位法を包含する未知数自由度を有するので、線材架構で確認したように、他の問題では変位法にない特長が発揮できるものと考え。

4. まとめと今後の課題

還元法は変位法と応力法を包含した連立方程式系を構成する点に着目すべきことを指摘し、線材架構での閉じた系への適用法を発展させ、連続体への適用法を提案した。
本研究は流体解析などの初期値問題で、大スケールのス

表-2 剛性変化ケースの中央たわみ量

D/D_0 *	たわみ量 $\times 10^{-2}$
1 倍	0.126527
2 倍	0.116500
5 倍	0.110483
10倍	0.108477
20倍	0.107475
100倍	0.106672
10^3 倍	0.106492
10^4 倍	0.106474
10^5 倍	0.106472
10^8 倍	0.106472

* Dは中央部、 D_0 標準部

表-3 剛性変化 $D/D_0=10$ ケースの要素細分割によるたわみ変化

要素 分割数	たわみ量 $\times 10^{-2}$
10×10	0.108477
20×20	0.108485
30×30	0.108486
40×40	0.108486

パスマトリックスを取扱い、かつill-conditionの問題を効率的、かつ安定的に解く手法の開発を目的とした。

本稿は基礎的検討とし、簡単な例題を変位法との比較で数値的に検証し、妥当な結果を得ることを示した。
還元法は他の2つの方法を包含することから、その特長把握のため、既報告の平面ラーメンへの適用結果を再整理し、桁落ち誤差を防ぐ効果を単精度計算で示した。これより、還元法は消去法に限定すれば非常に精度高い方法であることが判った。

連続体での数値計算例は周辺固定正方形板をとり挙げ、厳密解との比較で提案の方法が適正であることを確認した。
剛性不連続な系への適用法として、剛域を含む線材での還元法の適用プロセスを考察し、近似解法を提案した。提案した方法は周辺固定正方形板の中央部剛性を変化させて数値計算し、力学的定性を表現できることで適正さを確認した。しかし、厳密解に近い保証はない。そこで、要素細分割して計算し、一定値に収束することで必要条件を満たしていることを確認した。また、変位法と同一結果を得ることも確認した。

流体で物性が著しく変化するill-condition問題としては気液二相の界面があり、剛性変化と同じように還元法の適用対象となると考える。今後の研究課題としたい。
還元法の特長として、要素形状パターンごとの要素マトリックス(剛性マトリックスに相当)のみを用いて計算を進められる可能性を述べた。この特長は、3D流体解析で必須となるアダプティブ手法の適用を容易とする。
また、釣合方程式と適合条件式の連立という他の手法にない特徴は、境界条件としてディリクレ条件とノイマン条件を重みつきで同時に表すことができ、接触問題や破断問題など境界条件不連続な問題を過渡状態の連続的表現に置き換えて適用できる可能性がある。
これらへの適用手法開発も今後の課題である。

注 1) 応力法は仮想仕事の原理による解法で説明され、まず静定基本系を選定し、不静定架構の不静定次数だけ部材(の応力)を切断して解く。次いで切断部応力を独立変数として切断部適合条件を満たすよう解く。
その際、静定基本系の選び方は不静定次数が高くなればそれに応じて多くなる。そのうちで結果の桁落ち誤差が最小となる系の選定アルゴリズムはまだないことを指す。
ある切断部に単位応力を与えたとき、当該切断部変位が他の切断部変位より卓越する系(感覚的に硬い系)が適しているようである。

注 2) 例えば、剛性の小さいアーチを含むラーメンで、形状を正確に入力しようとして無数の中間節点を設けると、仮数部ビット数の少ない初期の計算機では桁落ち誤差を生じた。還元法の併用ではこれを回避できた。(往時の還元法研究報告。)

注 3) 本稿では連続体への適用法を板曲げ問題で例示したが、3D(2Dを含む)へも同様に拡張可能である。

弾性理論上は1D線材問題と連続体は共に変分原理から導かれ、変位法を適用する限りでは共通した適用法が確立されているので、その代表として線材問題で例示すれば十分である。¹⁵⁾

連続体への適用法が確立されていない還元法では、線材問題と連続体の取扱上の決定的相違は、前者が代数的に解けるのに対し、後者は数値的な近似解しか得られない点にある。後者に対し1例が示せば、変位法の場合と同様、他は1Dも含めて同列に取り扱える。本稿ではそれを板曲げにとった。

ただ、板曲げと3D問題との数値解析上の問題点の相違は、後者では前者にないSt.Venantの適合条件式を満足しなければならない点がある。通常、有限要素法では変位(primitive variable)を未知数とし、かつ低次の要素を用いるので、高階微分で表現されるSt.Venantの適合条件式に抵触しないようになっている。したがって、一般化した高次要素の適用法が示されているわけではない。

St.Venantの適合条件式はHelmholtz分解表示要素を用いれば自動的に満足される。¹⁶⁾したがって、板曲げ問題への適用法に準じて、3Dへも拡張可能である。

なお、Helmholtz分解表示はベクトルポテンシャル ψ_i とスカラーポテンシャル ϕ によって、変位 u_i を次式で表示する。

$$u_i \equiv \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial x_{i-1}} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

ここに、 $(i=1, 2, 3)(i+1=2, 3, 1)(i-1=3, 1, 2)$

ψ_i はせん断変形(S波)を ϕ は体積変形(P波)を表すなど、物理的把握も容易。2Dでは $\nabla^2 w$ が板曲げで全モーメントを、 $\nabla^2 \phi$ が平面問題で回転ベクトルを、流れ問題で渦度を示すなど共通点は多い。

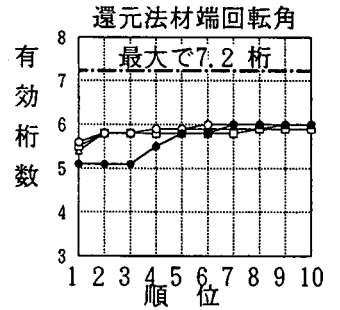
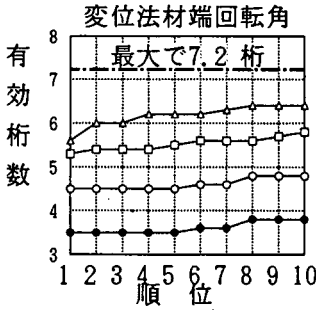
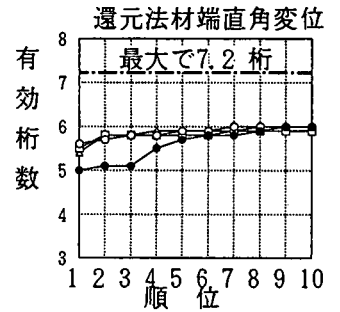
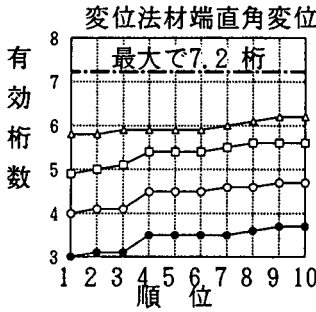
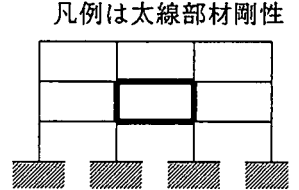
[付録1] 還元法と変位法を部分的に大きな剛性を有する閉じた平面ラーメンへ適用したときの桁落ち誤差比較

節点の変位の有効桁数を比較し、有効桁数の小さい順に10節点の有効桁数をプロットした。

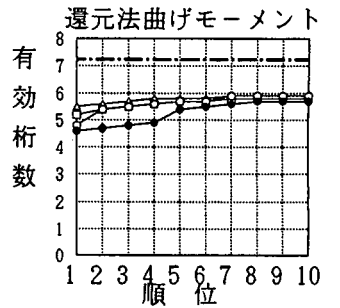
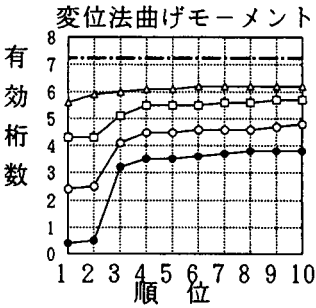
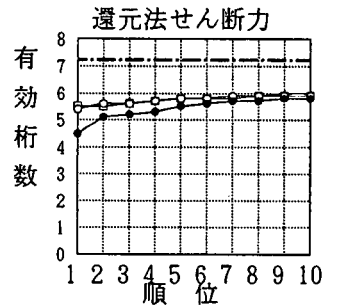
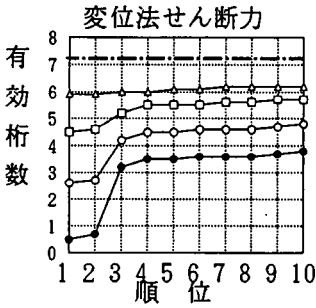
同様に材端の応力を比較し、有効桁数の小さい順に10節点プロットした。

実数は32ビット単精度(仮数部24ビット)で、有効桁数の計算方法は[付録2]に示す。

凡	—△—	剛性10倍
	—□—	100倍
	—○—	1000倍
例	—●—	10000倍



材端変位(回転角)の有効桁数を低い順に10箇所まで表示



材端応力の有効桁数を低い順に10箇所まで表示

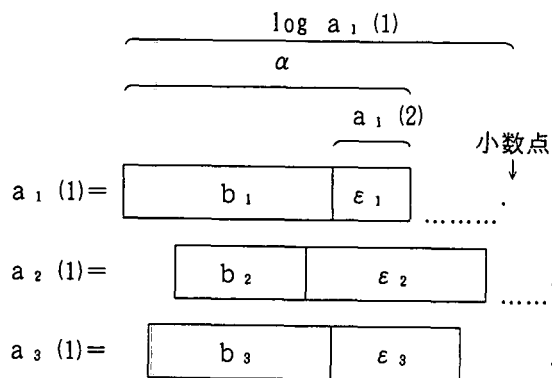
【付録2】桁落ち誤差の計算法

演算ごとに下表の式で計算する。

演 算	桁落ちの桁数 (κ) 計算式
差	$\kappa = a_1(2) + \log a_1(1)/a_3(1) - 0.5$ $a_1(1) = \begin{array}{ c c } \hline b_1 & \varepsilon_1 \\ \hline \end{array}$ $a_3(1) = \begin{array}{ c c } \hline b_3 & \varepsilon_3 \\ \hline \end{array}$ 桁落ち桁数 κ
和	$\text{if } \log a_1(1)/a_2(1) + a_1(2) - a_2(2) + 0.5 > 0$ $\text{then } \kappa = a_2(2)$ $\text{else } \kappa = a_2(2) - \log a_1(1)/a_2(1) - a_1(2) + a_2(2) - 0.5$
積・商	$\kappa = \log 10^{a_1(2)} + 10^{a_2(2)} - 0.5$

<表中の記号>

- ① 実数 a_1 と a_2 の演算とする。ただし、 $|a_1| \geq |a_2|$
- ② a_1 に (1), (2) を添え、 $a_1(1)$ は a_1 の数値そのものを示し、 $a_1(2)$ は a_1 の桁落ちを示す。 a_2 も同様とする。
- ③ 演算結果は a_3 とし、 a_1 と同様に表示する。
- ④ $a_1(1) = b_1 + \varepsilon_1$ とし、 b_1 は桁落ちしていない部分、 ε_1 は桁落ちしている部分とする。 a_2 、 a_3 も同様とする。
- ⑤ 仮数部メモリー長さは α (=24ビット) で、十進法では $\log(2^{24}) = 7.22472$ 桁となる。



数値はいずれも2進数とする。
(従って、対数の底は2)

FUNCTION サブルーチンQを組み、次のように使用する。

IMPLICIT COMPLEX(Q)

(差) Q3=Q(Q1,'-',Q2)

(和) Q3=Q(Q1,'+',Q2)

(積) Q3=Q(Q1,'*',Q2)

(商) Q3=Q(Q1,'/',Q2)

real part : 演算対象数値

imaginal part : 桁落ち桁数 (消去開始時 0)

実数の演算はすべてFUNCTIONサブルーチンの中で行う。ひとつの実数に2ワード用意して第1ワードは実数値、第2ワードは有効桁数記憶に充てる。サブルーチンをCALLするメインプログラムではこの2ワードを管理するのに便宜的にCOMPLEX数を利用している。

左表の式誘導は次のとおりである。

<差>

桁落ち桁数は $\log |a_1(1)| - \log |a_3(1)|$ であるが、四捨五入により平均 0.5桁救われる。よって、既に桁落ちしている桁数 $a(2)$ にこれを加えて表中の式を得る。

<和>

ε_1 の桁は $[\log |a_1(1)| - \{\alpha - a_1(2)\}]$ 、 ε_2 の桁は $[\log |a_2(1)| - \{\alpha - a_2(2)\}]$ であるから、後者が前者より大ならば結果に影響を与え、その差の分だけ結果の精度が落ちる。よって、四捨五入を考慮して表中の式を得る。

<積・商>

$$a_1(1) \cdot a_2(1) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$

$$= b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2 + b_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

であり、第2項以下が結果の精度に影響する。

第1項および第2項以下に分けて α ビットで表示可能な数値を求める。

$$\varepsilon_1 = 2^{[\log |a_1(1)| - \{\alpha - a_1(2)\}]}$$

$$= a_1(1) \cdot 2^{a_1(2)} / 2^\alpha$$

$$\varepsilon_2 = a_2(1) \cdot 2^{a_2(2)} / 2^\alpha$$

$$b_1 = a_1(1) - \varepsilon_1$$

$$b_2 = a_2(1) - \varepsilon_2$$

とすれば、

$$b_1 b_2 = a_1(1) a_2(2)$$

$$- a_1(1) a_2(2) \{ 2^{a_1(2)} + 2^{a_2(2)} \} / 2^\alpha$$

$$+ a_1(1) a_2(2) a_2(1) a_1(2) / 2^{2\alpha}$$

$$= a_1(1) a_2(2)$$

同様に第2項以下を求めれば、

$$b_1 \varepsilon_2 + b_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 =$$

$$a_1(1) a_2(1) \{ 2^{a_1(2)} + 2^{a_2(2)} \} / 2^\alpha$$

両者の桁数の差が有効桁数であり、 α からこの有効桁数を控除すれば桁落ちの桁数となる。よって、四捨五入を考慮し表中の式を得る。

C₁ 連続な要素の必要かつ十分な条件は「要素間境界に沿って、隣り合う要素の関数形が同じで、辺上のノード未知数の自由度がN回微分まで等しいこと」である。

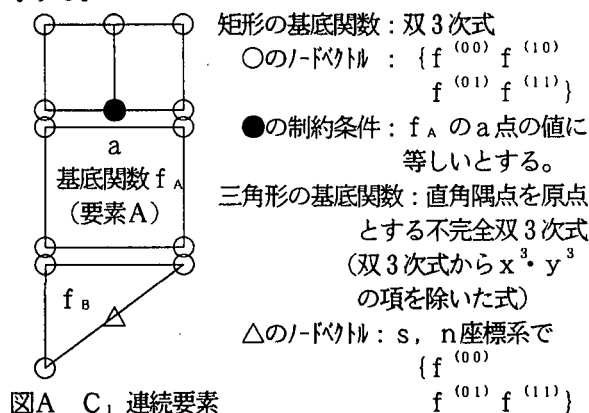
その必要条件は「隅点ノード未知数に双N階の微分を含むこと」である。この必要条件から辿ってC₁ 連続な三角形要素としては、よく知られている完全5次要素のほか、完全6次、7次、8次要素が適合する。C₂ 連続な要素は9次以上、C₃ 連続な要素は13次以上となる。

この三角形要素とノード共有可能な矩形要素は、C₁ 連続な要素で双5～8次、C₂ 連続な要素で双9～12次などとなる。

以上は任意三角形要素の場合であり、矩形要素と組合せて自由な要素分割を可能とする。

内部要素を矩形要素で、かつノード自由度に制約条件をつけた分割法とし、三角形要素は境界要素（直角三角形）のみに限定すれば、次数引き下げが可能である。

そこで、以下ではこの要素を2DのC₁ 連続な系で例示する。



C₂ 要素は双5次系で、C₃ 要素は双7次系で同様に構築できる。

残差の開放はサブマトリックス行ごとに行う。そのため、サブマトリックスi行に予め $[A]^{-1}_{ii}$ を乗じたマトリックスを用意して解く。

$$\sum_j [A]^{-1}_{ij} [A]_{ij} \{u\}_j = [A]^{-1}_{ii} \{B\}_i \quad (a)$$

反復計算は、i行j列の行列要素を a_{ij} 、右辺を b_i 、変数値を u_i 、加速係数を λ とすれば、次のステップで実行する。

[step 1] b_i は初期値を代入して作成し、残差最大行をi行とすれば、これを(b)式で開放する。

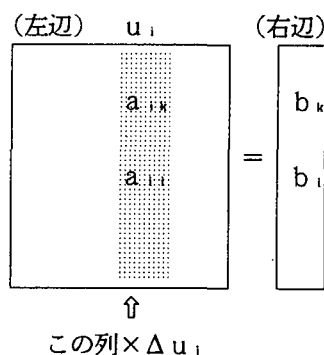
$$\Delta u_i = \lambda (b_i / a_{ii}) \quad (b)$$

[step 2] 開放後直ちにk行の a_{ik} に Δu_i を乗じて b_k を修正する。

$$\Delta b_k = -a_{ik} \Delta u_i \quad (c)$$

[step 3] b_i はブロック化しておき、ブロック内で大きい順にソートする。 b_i 最大行をブロック間比較で求め [step 1] に戻る。許容誤差内なら終了する。

この方法では右辺は常に残差ベクトル量となっている。



参考文献

- 1) R. クルステン著, 伊藤学訳: 構造力学における還元法
技報堂, 1968, S. Falkの序
- 2) Falk, S.: Die Berechnung offener Rahmentragwerke nach
dem Reduktionsverfahren. Ingenieur-Archiv 26, 1958
pp. 61-80.
- 3) Falk, S.: Die Berechnung geschlossener Rahmentragwerke
nach dem Reduktionsverfahren. Ingenieur-Archiv 26,
1958, pp. 96-109.
- 4) Kersten, R.: Das Reduktionsverfahren der Baustatik,
Springer-Verlag, 1962
- 5) 成岡昌夫、遠田良喜: 伝達マトリックス法 (コンピュー
タによる構造工学講座 I-2-B), 日本鋼構造協会編、
培風館, 1970
- 6) Möller, K. H., H. Mörchen, G. Völker u. C.-H. Wagemann :
PROSA - eine Programmiersprache für statische
Aufgaben. Der Stahlbau 36, 1967, pp. 289-295
- 7) Knopf, E.: Elektronische Berechnung von Stabtragwerke,
Berichte Heft 3 aus dem Institut für Konstruktiver
Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum.
Herausgegeben von o. Prof. Dr. -Ing. W. Zerna, 1969
- 8) 今村純也: 遷移マトリックス法の閉じた形への適用アル
ゴリズム、日本建築学会・第14回情報システム利用技術
シンポジウム、1991, PP. 79-83
- 9) Knopf, E., Fleßner, H., Zerna, W.: Verfahren zur Festig-
keitsberechnung mit Hilfe elektronischer Rechen-
anlagen, Bericht über die von der Deutschen
Forschungsgemeinschaft finanzierte Forschungsarbeit,
Technische Hochschule Hannover
Institute für Massivbau, 1967, pp. 26-27
- 10) Bahte, G.: Numerische Untersuchung des Übertragungs-
verfahrens, Diplomarbeit 1966 Hannover
- 11) 今村純也: 海上交通評価のための人工航跡作成法の一案,
日本航海学会論文集 76号, 1987. 3, PP. 1-10
- 12) 今村・棚橋: 時間軸 2 次精度流跡線による非圧縮性流
体解法、計算工学講演会論文集, Vol. 4, No. 1, 1999, PP. 263
- 13) 森口繁一: 数値計算工学、岩波書店, 1989, pp. 112
- 14) 今村純也、棚橋隆彦: 修正 S O R 法の検討, 計算工学
講演会論文集, Vol. 4, No. 1, 1999, PP. 157
- 15) 青山博之、村上智彦: マトリックス法による構造解析
倍風館、1988, 初版, pp. 7
- 16) 今村純也: Helmholtz 表示要素による弾性体解法、日本
建築学会九州支部研究報告集、第38号, 1999. 3

(1999年4月23日受付)