

大規模自由表面流れ解析のための ALE 並列有限要素法

Parallel Finite Element Method for Large-scale Free Surface Flow Analysis
Based on ALE method

桜庭雅明*・田中聖三**・玉城宏幸***・榎山和男****

Masaaki SAKURABA, Seizo TANAKA, Hiroyuki TAMAKI and Kazuo KASHIYAMA

*正会員 工修 日本工営(株) 情報システム部 (〒300-1259 茨城県稲敷郡茎崎町稻荷原2304)

**学生員 中央大学大学院 理工学研究科 (〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

***正会員 工修 日本電信電話株式会社 (〒163-8019 東京都新宿区西新宿3-19-2)

****正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

This paper presents a parallel finite element method based on a domain decomposition method for the analysis of free-surface flows. The ALE technique is usefully applied to the deforming fluid domain. Parallel implementation of the unstructured grid based formulation is carried out on the Fujitsu AP3000. For the discretization of basic equations and boundary conditions, the stabilized finite element method including a shock capturing term is applied to the analytical domain. The method is applied to the three dimensional sloshing problem in a rectangular tank. The effect of parallelization on the efficiency of the computations are examined.

Key Words : *parallel F.E.M, ALE method, free surface flow, domain decomposition*

1. はじめに

自由表面を有する波や流れの水理現象の把握や予測を行う方法として、模型実験による方法と数値シミュレーションによる方法が挙げられる。近年では、計算機性能および計算手法の進歩によって、数値シミュレーションによる方法が数多く用いられるようになってきている。数値シミュレーション手法としては、これまで非圧縮性粘性流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式に対して、鉛直方向の運動が微小と仮定してこれを鉛直方向に平均化した浅水長波方程式等を用いる場合が多かった。しかし、浅水長波方程式等による二次元または準三次元解析は、大局的な流れの把握には有効であるが、三次元性が卓越する局所的な流れや自由表面形状の把握には限界がある。

近年、これらの流れに対して、Navier-Stokes 方程式を直接用いて離散化を行う手法が数多く提案されている。代表的な手法としては、ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian)法^{1),2)}やSpace-Time法³⁾のようにLagrange的にかつ自由表面を直接的に表現する方法とVOF(Volume of Fluid)法⁴⁾⁻⁶⁾やマーカー粒子法⁷⁾のようにEuler的にかつ自由表面を間接的に表現する方法が挙げられる。これらの手法の中で、Space-Time法は安定でかつ計算精度が高いものの、計算自由度が他の手法に比べて同一の問題に対して倍になることから、計算時間や計算機容量が多くなる問題がある。また、間接的な方法であるVOF法やマーカー粒子法は自由表面の取り扱いが直接的な方法に比べて簡便な反面、自由表

面近傍の計算精度に問題がある。したがって、自由表面形状を正確に表現できる解析手法として、現状ではALE法は最も有効な手法の一つであるといえる。ALE法による自由表面流れ解析に関する研究はこれまで盛んに行われており、スロッシング解析などで実験値とよい一致を示しているものが報告されている¹⁾。しかしながら、ALE法を大規模な三次元問題に適用すると、依然として必要とする計算時間や計算機容量が多くなり、適用できる問題に限界が生じるという実用上の問題点が生じる。また、波の非線型性が増大した場合に自由表面に鋸状の数値不安定性が生じることも指摘されている。

そこで本論文は、近年発展と普及が著しい並列計算機に着目し、大規模な自由表面流れ解析を高速・省メモリでかつ数値的に安定な計算が可能となる並列計算手法を提案するものである。並列計算手法としては、著者が固定領域に対して構築した領域分割に基づく並列計算手法^{8),9)}を基礎として用い、それをALE法を用いた可動領域に対して高効率な並列化が実現できるように拡張および改良を行った。離散化手法としては、低次の混合補間である流速双一次/圧力区分0次(Q1/P0)要素を用いた安定化有限要素法¹⁰⁾を用いた。なお、自由表面上に生じる数値不安定性の除去法としてTezduyarらが提案したshock capturing項¹¹⁾を付加した。本手法の有効性を検討するために、数値解析例として三次元矩形水槽内のスロッシング解析を行った。また、領域分割の差異が並列化効率に及ぼす影響についても検討し、自由表面流れ解析における適切な領域

分割の方法について考察した。

2. 基礎方程式と境界条件

非圧縮粘性流体の基礎方程式は、ALE表記された Navier-Stokes の運動方程式 (式 (1)) と連続方程式 (式 (2)) である。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i \right) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (2)$$

応力と圧力・流速の関係は次のようになっている。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (3)$$

$$D(u)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

境界条件は以下のように与えられる。 n_j は境界外向き単位法線ベクトルである。

$$u_i = g_i \quad \text{on } \Gamma_g \quad (5)$$

$$t_i \equiv \sigma_{ij} \cdot n_j = h_i \quad \text{on } \Gamma_h \quad (6)$$

ここで、 Ω , Γ_g , Γ_h は解析領域、Dirichlet 境界、Neumann 境界であり、 u_i , $\bar{u}_i$, p_i , ρ , μ , f_i , D_{ij} , t_i はそれぞれ流速、相対流速、圧力、密度、粘性係数、物体力、変形速度テンソル、トラクションを表している。

3. 安定化有限要素法による離散化

3.1 有限要素方程式の導出

空間領域の離散化に流線上流化法 (SUPG 法) に基づく有限要素法¹²⁾を適用すると、式 (7) のような重み付き残差方程式を得る。左辺第 1-3 項は通常の Galerkin 項、第 4 項は移流卓越に対して安定化を施す項 (SUPG : Streamline upwind/Petrov-Galerkin 項)、第 5 項は自由表面の数値不安定性を回避する安定化項 (shock capturing 項) である。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i \cdot \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(w) : \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_m u_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \cdot \rho \left(\bar{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i \right) d\Omega^e \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_c \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \cdot \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega^e = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 w_i , q は流速、圧力の重み関数、また、 τ_m , τ_c は安定化パラメータであり、次のように与えている¹¹⁾。

$$\tau_m = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|u_i^h\|}{h_e} \right)^2 + 9 \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\tau_c = \frac{h}{2} \|u_i^h\| z(R_{eu}), \quad (9)$$

$$R_{eu} = \frac{\|u_i^h\| h_e}{2\nu}, \quad (10)$$

$$z(R_{eu}) = \begin{cases} \left(\frac{R_{eu}}{3} \right) & R_{eu} \leq 3 \\ 1 & R_{eu} > 3 \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 h_e は要素サイズ、 ν は動粘性係数、 R_{eu} は要素レイノルズ数である。

式 (7) の重み付き残差方程式に対して、時間方向に修正準陰解法¹³⁾を適用して流速は陽的、圧力は陰的に離散化し、流速双 1 次/圧力区分 0 次要素を適用すると、次のような安定化有限要素方程式を得る。このとき、下限上限条件による制約条件を回避するため、圧力安定化行列を用いることとする^{10), 14)}。

$$\begin{aligned} & \frac{M_C u_i^{n+1} - M_C u_i^n}{\Delta t} + K(\bar{u}_j) u_i^n \\ & - \frac{1}{\rho} M_C M_L^{-1} C p^{n+1} + \nu S u_i^n = N f_i \quad (12) \\ & C^T u_i^{n+1} + D \Delta t \frac{1}{\rho} p^{n+1} = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

ここに、 M_L は質量集中化行列、 M_C は整合質量行列、 D は圧力安定化行列、 C , K , S , N は各項に対する係数行列を表している。

3.2 メッシュの再構成法

ALE 法は、メッシュ速度を自由にコントロールでき、これにより解析領域が大きく変形する問題を容易に扱えるところに特徴がある。ただし、計算を安定にかつ精度良く行うためには、計算中にメッシュの極端な歪みが生じないようにする必要がある。本研究では、各時間ステップにおける節点位置を節点変位 ϕ_i に関するラプラス方程式を解くことにより求めている。

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (14)$$

$$\phi_i = \hat{\phi}_i \quad \text{on } \Gamma \quad (15)$$

ここで、 $\hat{\phi}_i$ は時間ステップ (Δt) 間における境界 Γ (自由表面+壁面) 上の節点変位量であり、底面上の節点では $\hat{\phi} = 0$ を、自由表面上の節点ではオイラー法に基づく次式により得られる値を用いた。

$$\hat{\phi} = \Delta t \left(u_3 + \bar{u}_1 \frac{n_1}{n_3} + \bar{u}_2 \frac{n_2}{n_3} \right) \quad (16)$$

ここで、 n_i は自由表面外向き単位法線ベクトルである。ただし、単にラプラス方程式を解くだけでは領域形状の極度の変形に対して歪みの少ない有限要素分割を得ることは困難である。そこで、要素形状の歪みを最小にする制約条件を課す方法¹⁵⁾を用いると、式 (14) の重み付き残差方程式は次のようになる。

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \delta \frac{\partial \phi_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} d\Omega^e = 0 \quad (17)$$

ここで、 δ は要素の歪を制御するパラメータである。

$$\delta = \frac{1 - \Delta_{min}/\Delta_{max}}{\Delta^e/\Delta_{max}} \quad (18)$$

ここで、 Δ_{min} , Δ_{max} , Δ^e はそれぞれ、要素の最小面積、最大面積、着目する要素 e の面積である。式(17)に対して一次要素を用いて離散化すると、以下のような有限要素方程式が得られる。

$$(A + \delta A_d)\phi_i = 0 \quad (19)$$

ここに、 A はラプラシアン行列、 A_d はラプラシアン行列の対角成分を表している。

3.3 計算手順

本手法のアルゴリズムを整理すると、図-1のようになる。

i). 中間流速求解

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t M_C^{-1} (K(\tilde{u}_j) u_i^n + \nu S u_i^n - N f_i) \quad (20)$$

ii). Poisson 方程式による圧力求解

$$(C^T M_L^{-1} C + D) \Delta t \frac{1}{\rho} p^{n+1} = -C^T \tilde{u}_i^{n+1} \quad (21)$$

iii). 実流速求解

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} + M_L^{-1} C \Delta t \frac{1}{\rho} p^{n+1} \quad (22)$$

iv). ラプラス方程式による節点変位求解

$$(A + \delta A_d)\phi_i = 0 \quad (23)$$

図-1 計算のアルゴリズム

なお、i)の中間流速の求解には、3-pass algorithmを用いている。また、ii)の圧力ポアソン方程式およびiv)のメッシュ再構築のためのラプラス方程式の解法には、省メモリー化を図るために Element-by-Element SCG法を用いている。これらの離散化についての詳細については文献10)に詳しい。iv)により得られた節点変位を用いて節点におけるメッシュ速度を計算し、相対速度を求める。

4. 並列計算法

並列計算の方法としては、共有メモリー型並列計算機に比べて超並列計算に有利な分散メモリー型並列計算機を対象として、領域分割法に基づく方法^{8),9)}を採用した。また、並列化の方法にはメッセージパッシングライブラリーの一つであるMPI (Message Passing Interface)¹⁶⁾を用い、入出力を除く全てを並列化した。なお、並列計算機としては富士通 AP3000を使用した(表-1参照)。

前章で示した離散化手法に対する並列計算の手順は以下の通りである(図-2参照)。

1) 与えられた有限要素メッシュに対して領域分割法

を適用し、部分領域データと部分領域境界上の節点データを得る。

- 2) 各プロセッサは担当する部分領域に関するデータを入力する。
- 3) 各プロセッサは担当する部分領域について、中間流速求解式(20)を作成する。
- 4) 隣接プロセッサ通信を行い、中間流速を求める。
- 5) 各プロセッサは担当する部分領域について、圧力求解式(21)を作成する。
- 6) 隣接プロセッサ通信と全プロセッサ通信を行いながら、圧力を求める。
- 7) 各プロセッサは担当する部分領域について、流速求解式(22)を作成する。
- 8) 隣接プロセッサ通信を行い、流速を求める。
- 9) 各プロセッサは担当する部分領域について、節点変位求解式(23)を作成する。
- 10) 隣接プロセッサ通信と全プロセッサ通信を行いながら、節点変位を求め、次いで相対流速を求める。
- 11) 時間ステップが終了するまで 3)~10) を繰り返す。

表-1 並列計算機 AP3000仕様

Fujitsu AP3000	
Type of Node	U300
CPU	Ultra SPARC II
Clock cycle	300MHz
Memory size	256MB
Cash size-internal	32KB/CPU
Cash size-external	2MB/CPU
Network	200MB/s [AP-Net]

4.1 領域分割法

領域分割法に基づく並列計算法において、効率よい並列計算を行うためには、領域分割において、1)各プロセッサの計算負荷の均等化(要素の均等化)、2)プロセッサ間の通信の最小化(隣接する小領域境界上の節点の最小化)を行う必要があり、これを実現するためにいくつかの領域分割法が提案されている¹⁷⁾。しかし、本研究のように自由表面を有しかつメッシュの再構築が必要な場合は、さらに式(23)の並列化が必要となる。この並列化を効率よく行うためには、1),2)に加えて、3)として、各プロセッサにおいて自由表面上の節点の均等化を行う必要がある。そこで、本研究ではこの点を考慮した領域分割を行い、これまでの考慮しない方法との比較を行った。

具体的には、平面二次元メッシュに対して Greedy アルゴリズムに基づく領域分割法^{18),19)}を適用して、3)を満足する領域分割を行い、次いで鉛直方向に各プロセッサにおいて、要素を均等に積み上げていくという方法を用いた。

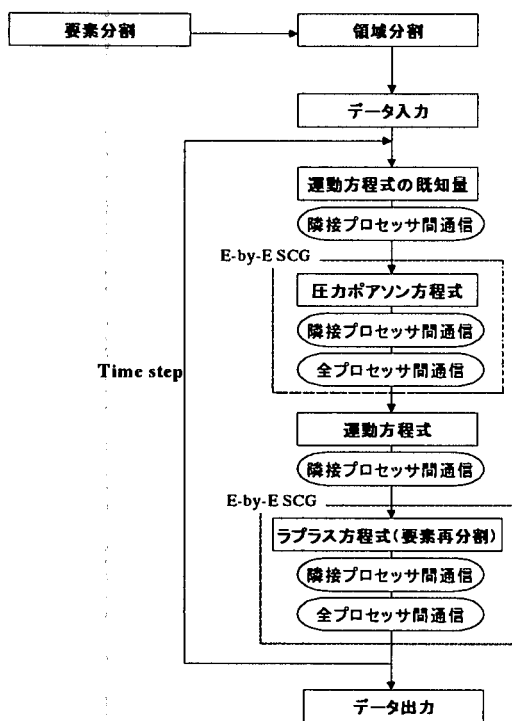


図-2 フローチャート

4.2 有限要素方程式の並列計算法

有限要素方程式 (20)～(23) の並列計算手法を述べるにあたり、領域分割モデルとメッシュモデルを図-3に示す。なお、図の上図は領域分割（プロセッサ数4）について示したものであり、下図については領域境界を含んだメッシュ（括弧の数字は要素番号）を示したものである。以下、各計算の説明を図-3に基づいて示す。

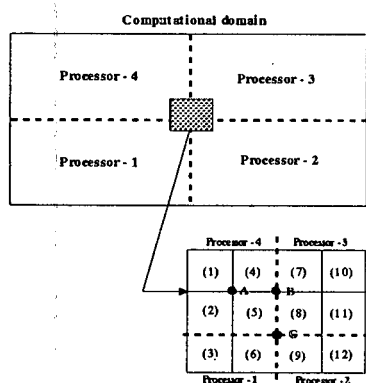


図-3 領域分割とメッシュモデル

(1) 運動方程式の並列計算法

中間流速求解式 (20) および実流速求解式 (22) は陽的に計算を進める陽解法を採用しているため、節点における未知量の求解式には、その節点を共有する要素の節点情報のみが必要となる。図-3において、要素 (3),(6) はプロセッサ1、要素 (9),(12) はプロセッサ2、要素 (1),(2),(4),(5) はプロセッサ3、要素 (7),(8),(10),(11)

はプロセッサ4に含まれているとする。なお、離散化された各時刻レベルにおいて、解くべき離散化方程式を次式で表す。

$$M_L X = F \quad (24)$$

ここで、 M_L は集中化質量行列、 X は未知ベクトル、 F は既知ベクトルである。

いま、図-3に示すメッシュモデル中の節点A,B,Cの求解について考える。節点A（プロセッサ4の領域内）に関する未知量は、他の領域に存在する要素の節点とは関係がないので、情報の通信を行う必要はない。節点Bに関する未知量は、節点Bがプロセッサ3とプロセッサ4の領域境界上にあるので、プロセッサ3において要素 (7) と (8) に関する集中質量化行列と既知ベクトルを作成して、プロセッサ4において要素 (4) と (5) に関するそれらを作成して、隣接するプロセッサ間でお互いに情報通信を行う必要がある。また、節点Cの場合には4つの隣接プロセッサと関係することになる。このように、節点が複数のプロセッサに関係する場合には、通信時間を多く必要とする。

以上のように、陽的な解法では領域境界上の節点に関して要素の重ね合わせを完成させるため、隣接するプロセッサ間でのデータ送受信を行う。

(2) 圧力ポアソン方程式の並列計算法

ポアソン方程式である圧力求解式 (21) およびラプラス方程式である節点変位求解式 (23) の計算には、反復解法の一つである、Element-by-Element SCG法を用いて陰的に解いている。これらの計算は、全計算時間のかなりの部分を占めるので、この部分をいかに高効率になるように並列化するかが重要となる。図-4に Element-by-Element SCG法のアルゴリズムを示す。なお、離散化方程式を $Ax = b$ とし、 p, q は作業ベクトル、 r は残差ベクトルを表している。図中の①,②はアルゴリズムの並列化により通信を伴う計算であることを示している。Element-by-Element計算部分 (①) では隣接するプロセッサ間の通信が必要となる。また、ベクトルの内積計算部分 (②) では、スカラー量の総和を求めるために、全プロセッサ間の総和が必要となる。

以下に、上記①,②の通信について示す。

隣接プロセッサ間通信

この計算は、(1) 運動方程式の並列計算法で示した通信と同じであり、式 (26) と式 (28) の要素の重ね合わせを Element-by-Element 処理で行う場合に必要となる。例えば、領域境界上の節点Bに対して Element-by-Element 処理で要素行列を作成して、プロセッサ3と4の間で情報通信を行い重ね合わせを完了する。

全プロセッサ間通信

共役勾配法 (陰的解法) は領域内の全節点の未知量を同時に求める方法であるので、全プロセッサ間との

$$Ax = b \quad (25)$$

(i) 初期設定

$$r_0 = b - Ax_0 = b - \underbrace{\sum_e A^{(e)} x_0}_{\textcircled{1}} \quad (26)$$

$$p_0 = r_0 \quad (27)$$

(ii) 解が収束するまで、(28)~(33)をk回繰り返す。

$$q_k = Ap_k = \underbrace{\sum_e A^{(e)} p_k}_{\textcircled{1}} \quad (28)$$

$$\alpha_k = \underbrace{(r_k, r_k)}_{\textcircled{2}} / \underbrace{(p_k, q_k)}_{\textcircled{2}} \quad (29)$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (30)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k \quad (31)$$

$$\beta_k = \underbrace{(r_{k+1}, r_{k+1})}_{\textcircled{2}} / \underbrace{(r_k, r_k)}_{\textcircled{2}} \quad (32)$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k \quad (33)$$

図-4 Element-by-Element SCG法の計算アルゴリズム

情報通信が必要となる。具体的には、式(29),(32)のベクトルの内積計算に必要となる。計算方法は以下の通りである。

ステップ1 図-3(上)において各プロセッサで式(29)の分子($\bar{\alpha}$ とする)を計算すると以下のような部分和が求まる。

プロセッサ1	プロセッサ2
$\bar{\alpha}_1 = \sum_{e=1}^{n_{elm1}} r_e^2$	$\bar{\alpha}_2 = \sum_{e=1}^{n_{elm2}} r_e^2$
プロセッサ3	プロセッサ4
$\bar{\alpha}_3 = \sum_{e=1}^{n_{elm3}} r_e^2$	$\bar{\alpha}_4 = \sum_{e=1}^{n_{elm4}} r_e^2$

ここで、 n_{elm} は各プロセッサにおける要素総数である。ステップ2 各プロセッサが有するデータの総和をとって、内積計算を完了する。

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_4 \equiv \sum_{e=1}^{n_{elm}} r_e^2 \quad (34)$$

(3) 節点変位求解方程式の並列計算法

本手法では、メッシュの再構成法としてラプラス方程式で表される節点変位求解方程式を解いている。この方程式の並列処理法としては、(2)圧力のポアソン方程式の並列計算法で述べた方法と同様である。ただし、圧力のポアソン方程式の離散化には0次要素を用いていたのに対して、ここでは1次要素を用いているために、その点を考慮する必要がある。例えば、図-3の節点Cに着目すると、式(34)の計算において全プロセッ

サ間通信を行うと節点Cに関する節点値が4回足し合わされてされてしまう。このようなことを回避するために、節点求解方程式では、全プロセッサ間通信を以下のように行っている。

ステップ1 領域分割に関する情報として、各節点における領域の共有数をデータとして用意しておく。図-3(下)の場合では、節点Cの場合はプロセッサ1~4を共有しているため4とし、節点Bの場合はプロセッサ3~4を共有しているため2、節点Aはプロセッサ4のみであるため1とする。

ステップ2 残差ベクトル r^2 を求め、ステップ1で作成した重複数で割る。

ステップ3 図-3において各プロセッサで式(29)の分子($\bar{\alpha}$)に関する部分和を求める(前節のステップ1参照)。

ステップ4 各プロセッサが有するデータの総和をとって、内積計算を完了する(前節のステップ2参照)。

なお、隣接プロセッサ間通信に関しては前述の圧力ポアソン方程式と同様にして行うことで並列処理が可能となる。

5. 数値解析例

5.1 本手法の計算精度の検討

数値計算例として、本手法の計算精度を比較検討するために、貯水槽内流体のスロッシング問題を取り上げる。解析条件は図-5のような幅1.0m、奥行き0.1m、高さ1.0mの貯水槽に50%溜まった流体に式(35)で表わされる水平加速度を与える。

$$f_x = A\omega^2 \sin \omega t \quad (35)$$

ここに、 A は振幅、 ω は角速度であり、それぞれ0.0093m、5.311rad/secである。また、流体は水を仮定し密度および動粘性係数はそれぞれ $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、 $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$ である。境界条件は壁面でslip条件を与えた。有限要素分割は80(長手方向)×8(奥行き方向)×40(高さ方向)とし、総節点数、総要素数はそれぞれ29,889および25,600となっている。なお、要素再分割は毎時間ステップごとに全要素に対して行っている。図-6に貯水槽内左壁における水位変動量の時刻歴を示す。ここでは、自由表面の安定化に関する影響を検討するために、式(7)に示したshock capturing項を考慮した場合としない場合の計算を行った。この図から確認できるように、shock capturing項を入れない場合の左壁での水位変動量は、時刻6.0sec程度までは岡本らの実験¹⁾と良い一致を示すが、6.0secを過ぎた付近から計算は不安定となり、時刻7.5secで発散してしまう。これに比べ、shock capturing項を考慮した場合の計算結果は、実験結果と良い一致を示し、時刻7.5sec以降も安定した計算が継続される。図-7に、両

手法の計算における水面形状（時刻7.0sec）を示す。この結果から確認できるように、shock capturing項を考慮した場合には水面形状が平滑されて表現されていることが確認される。図-8には、各時刻（1.0sec～9.0sec）における水面形状（shock capturing項を考慮）を示す。

以上より、shock capturing項を導入することによって、安定かつ精度良く計算できることが確認された。自由表面上に生じる数値不安定性の除去法としては、他にスムージング手法があるが、この手法の場合には安定化の効果が微小時間増分およびスムージングを行う頻度に依存してしまうのに対して、shock capturing項を導入する場合にはこのような問題は生じない²⁰⁾。

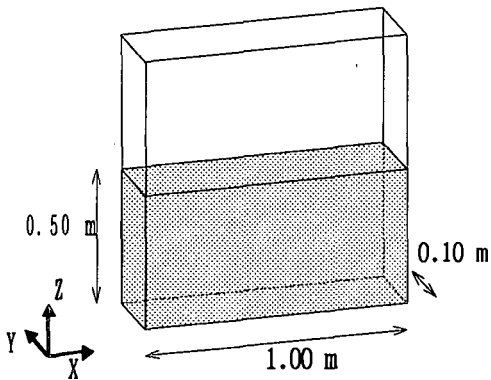


図-5 解析モデル

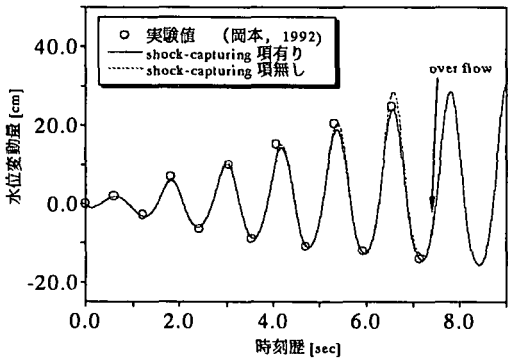
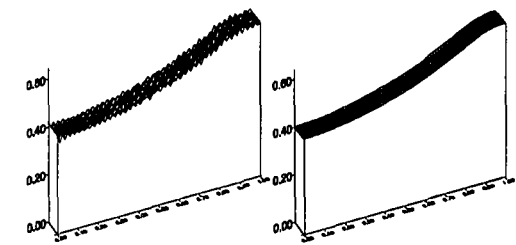


図-6 左壁での水位変動量の時刻歴

5.2 並列化効率の検討

ここでは、提案する並列計算手法の有効性を検討するため、図-5の解析モデルに対して要素数の異なる2種類のメッシュ（MESH S:要素数 25,600, MESH L:要素数 204,800）を用意し、並列化性能評価を行った。並列計算機には先に示した富士通製分散メモリ型並列計算機AP3000を使用した（表-1参照）。領域分割数は2,4,8,16を用い、領域分割図は図-9に示すとおりである。なお、領域分割に関してはFarhatの自動領域



(a) shock capturing 項無し (b) shock capturing 項有り

図-7 自由表面形状 (T=7.0sec)

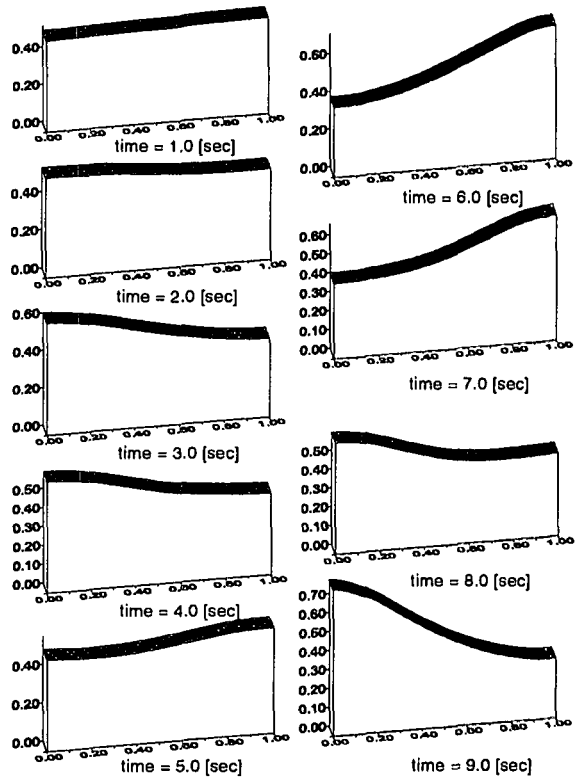


図-8 水面形状

分割法^{18),19)}を用い、これを領域分割のcase1とした。図-10に各メッシュでの領域分割数（プロセッサ数）を変化させたときの演算速度倍率と並列化効率を示す。ここでの演算速度倍率は、プロセッサ2台の場合を基準（演算速度倍率=1）としたものであり、並列化効率は、演算速度倍率が理想倍率と等しくなる場合を100としている。この図から、大規模計算になるほど時間ステップ区間において速度性能が向上しており、計算時間が大幅に短縮されている様子が見て取れる。しかしながら、MESH Lではプロセッサを4台使用した場合において、8台使用した場合と比較して大きく効率を下げている。これは移動境界上の節点数が均等化されていないため、要素再分割での荷重項作成において各プロセッサでの計算負荷が不均等であることに起因する。そこで、スライス型の領域分割を行い、移動境界上の節点数を各プロセッサで均等化する。スライス型の

領域分割は4.1 領域分割法で示したように、平面二次元メッシュに対して自動領域分割法を適用して、自由表面上の節点が均等になるように領域分割を行い、次いで鉛直方向に積み重ねる方法を用いた。このように作成した領域分割をcase2として、case1の領域分割との比較を行った。case2の領域分割図を図-11に示す。領域分割の違いによる並列化効率の比較においては解析メッシュはMESH Lを使用した。図-12にメッシュ再構成時（ラプラス方程式の計算）における荷重項作成時間について、領域分割の違いによる比較を示す。プロセッサ数2台および8台の場合においては、case1および2とも同期待ちの時間が生じていないことがわかる。これは、図-9と図-11から分かるように、両者とも自由表面上の節点が領域分割において均等に各プロセッサに割り振られていることによる。一方、プロセッサ数4台および16台の場合において自由表面上の節点が不均等に割り振られていることから、多大な同期待ち時間が発生していることが分かる。それに対して、case2ではほとんど同期待ちが発生していないことが分かる。図-13に演算速度倍率と並列化効率について両者の比較を示す。図より、case2では安定して高い並列化効率を得られていることが分かる。なお、図-10および図-13において少数のプロセッサ使用時に並列化効率が100%を越えているが、これはキャッシュの効果による計算時間の向上に起因している。

以上の結果からALE法による自由表面流れ解析の並列計算を行う場合、従来の領域分割法で用いられている各プロセッサ間で要素数を均等化する方法では不十分であり、自由表面上の節点数を均等化する処理が必要であることが確認された。

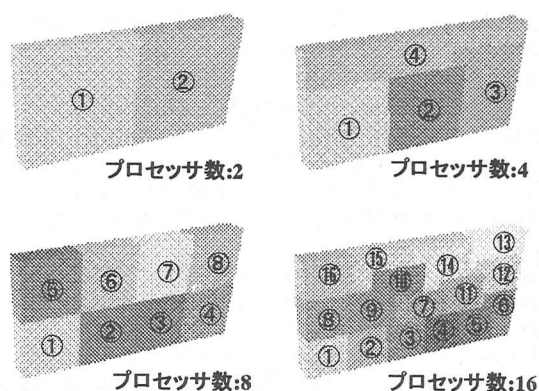


図-9 領域分割図 (case1)

6. おわりに

本論文では、安定化有限要素法を用いたALE手法に基づく自由表面流れ解析に対する並列計算法を提案した。本手法の有効性を検討するために、本手法を三次

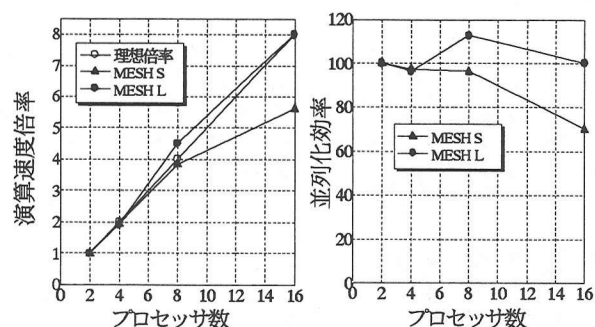


図-10 並列化性能評価（要素数の違いによる比較）

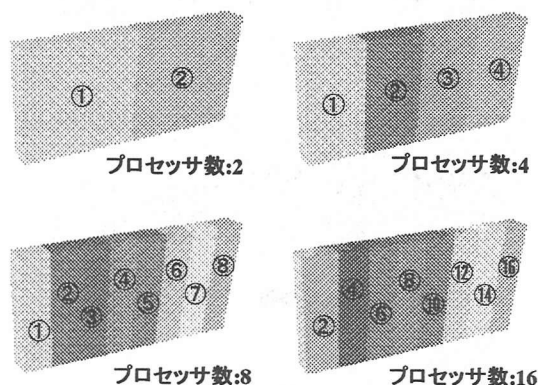


図-11 領域分割図 (case2)

元矩形水槽内のスロッシング解析に適用し、計算精度と並列計算効率について検討した。また、領域分割の差異が並列化効率に与える影響についても検討した。その結果、以下のような結論が得られた。

- 安定化項として shock capturing 項を付加した結果、自由表面上に生じる数値不安定性が回避され、安定な計算が可能になった。
- 本手法の並列化効率について調べた結果、高速かつ省メモリーで計算が行えることが明らかになった。また、大規模計算になるほど並列化効率は向上し、本手法は大規模問題に対して有効であることが確認された。
- 自由表面上の節点を均等にする領域分割を行うことで、並列化効率に与える領域分割の依存性が回避され、プロセッサ数の変化に対して安定に高い並列化効率を得られることが明らかになった。このことは、各プロセッサ間での要素数の均等化だけでは不十分であり、自由表面上の節点数が均等となるような領域分割を行う必要があることを示している。

以上により、本手法は大規模な自由表面流れ解析に対して、その有効性が発揮されるものと考ええる。今後の課題としては、複雑な形状に適用可能な領域分割法

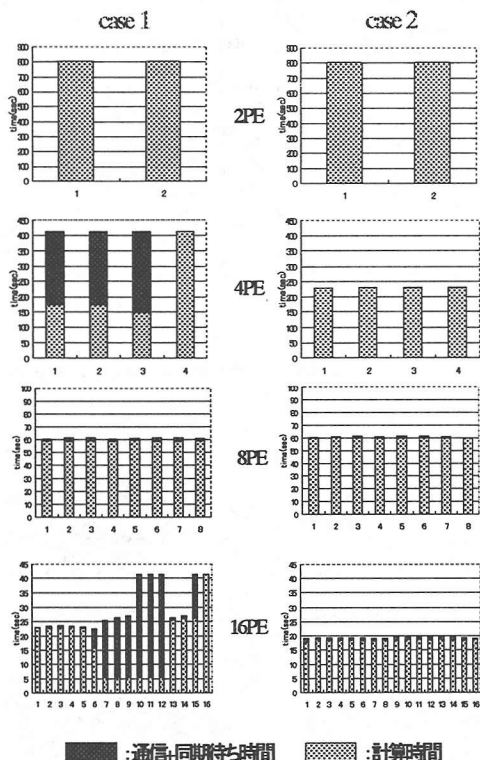


図-12 荷重項作成時間

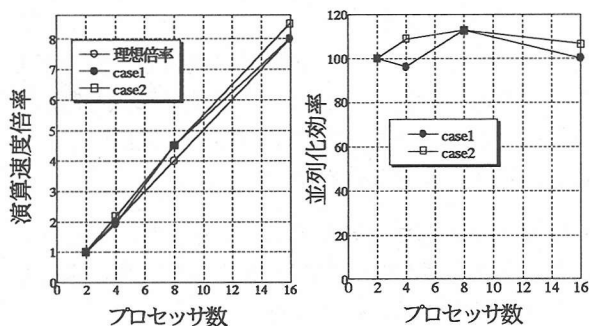


図-13 並列化性能評価 (領域分割の違いによる比較)

の構築が挙げられる。

謝辞:本研究を進めるにあたり, 並列計算機富士通 AP3000の使用を許可された富士通並列処理研究センターに厚く感謝いたします。

参考文献

- 1) 岡本隆, 川原陸人: ALE有限要素法による二次元スロッシング解析, 土木学会論文集, No.441/I-18, pp.29-48, 1992.
- 2) Nomura, T.: ALE finite element computation of fluid-structure interaction problems, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 112, pp.291-308, 1994.
- 3) M. Behr, T. E. Tezduyar: Finite Element Solution Strategies for Large-Scale Flow Simulations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 94, pp.353-371,

1992.

- 4) Hirt, C. W., Nichols, B. D.: Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.*, 39, pp.201-225, 1981.
- 5) Nakayama, T. and Shibata, M.: A finite element technique combined with gas-liquid two-phase flow calculation for unsteady free surface flow problems, *Comput. Mechanics*, 22, pp.194-202, 1998. No.56-531, pp.3248-3256, 1990.
- 6) T. E. Tezduyar, S. Aliabadi, M. Behr: Enhanced - Discretization Interface - Capturing Technique (EDICT) for computation unsteady flows with interfaces, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 155, pp.235-248, 1998.
- 7) 中山司, 森峰男: 剛体着水現象のためのマーカー粒子法を併用した有限要素法, 日本機械学会論文集 (B編), No.61-583, pp.953-960, 1995.
- 8) 樫山和男, 玉井典: 非構造格子に基づく大規模非圧縮粘性流れ解析のための超並列計算法, 土木学会論文集 (投稿中)
- 9) 玉井典, 樫山和男: 非構造格子に基づく三次元非圧縮粘性流れの並列有限要素解析: 第11回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.557-558, 1997
- 10) 樫山和男, 猪股渉: 混合補間要素を用いた非圧縮粘性流れ解析のための高精度安定化有限要素法, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.125-137, 1996.
- 11) T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray, and R. Shih: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 95, pp.221-242, 1992.
- 12) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R.: Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 87, pp.364-384, 1991.
- 13) Gresho, P. M. and Chan, S. T.: On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix, Part 1: Theory, Part 2: Implementation, *Int. J. Numer. Methods Fluid*, 11, pp.587-620, pp.621-659 1990.
- 14) 水上 昭: Q_1-P_0 要素による FEM 流れ解析のための安定化行列, 第8回数値流体力学シンポジウム論文集, pp.647-650, 1994.
- 15) 滝佳弘, 鳥居弘志: 構造と流体の連成問題のためのメッシュリゾーニング技法, 日本機械学会論文集 (B編), No.93-1347, pp.2419-2424, 1994.
- 16) Gropp, W.: Using MPI, Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface, 307p., The MIT Press, 1994
- 17) Saad, Y.: Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Chapter 13, pp.383-424, PWS Publishing Company, 1996.
- 18) Farhat, C.: A simple and efficient automatic FEM domain decomposer, *Computers & Structures*, Vol.28, No.5, pp.579-602, 1988.
- 19) Farhat, C. and Lesoinne, M.: Automatic partitioning of unstructured meshes for the parallel solution of problems in computational mechanics, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol.36, pp.745-764, 1993.
- 20) 玉城宏幸: 自由表面を考慮した非圧縮粘性流体流れの ALE 有限要素法に関する研究, 中央大学計算力学研究室年報, 6, pp.25-28, 1999.

(1999 年 4 月 23 日 受付)