

線形型気泡関数を用いた非圧縮性粘性流体解析と適応型有限要素法

Incompressible Viscous Flow Analysis and Adaptive Finite Element Method
Using Linear Bubble Function

松本純一*・梅津剛**・川原睦人***

Junichi MATSUMOTO, Tsuyoshi UMETSU and Mutsuto KAWAHARA

*学生員 中央大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻 (〒112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)

**正会員 工博 前橋工科大学助教授 工学部建設工学科 (〒371-0816 群馬県前橋市上佐鳥町 460-1)

***正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)

A new finite element formulation and adaptive remeshing method with linear bubble function for the incompressible Navier-Stokes equations are proposed in this paper. As the numerical approach, the spacial discretization is applied the mixed interpolations for velocity and pressure fields by the bubble element and linear element, respectively. The fractional step method based on the implicit time integration is used for the discretization. To verify applicability of presented linear bubble function, Rayleigh-Benard convection and flow past a circular cylinder are performed for the numerical examples.

Key Words : linear bubble function, incompressible Navier-Stokes equations, fractional step method, adaptive remeshing method

1. 緒言

非圧縮性粘性流れの基礎方程式である非圧縮 Navier-Stokes 方程式は、一般に移流拡散方程式と呼ばれるものの一種である。ここで、移流拡散方程式を差分法で解く場合、移流項を中心差分で近似すると、移流の効果が卓越する問題では、その解に数値振動が現れることが知られている。この現象は有限要素法を用いた場合にも、中心差分型の近似を行う Galerkin 法を用いたときには、移流の卓越する問題には同様の問題が発生する。さらに、非圧縮 Navier-Stokes 方程式を解析する場合においても、運動方程式に移流項が含まれていることから、移流の卓越する問題には同様の問題が発生する。この問題点を解決するための代表的な手法として、上流側の節点に重みを付ける Petrov-Galerkin 法¹⁾があり、非圧縮 Navier-Stokes 方程式を解く場合には、この手法を一般化した安定化有限要素法²⁾³⁾が提案されている。

近年、要素境界上で 0 となり、要素内のみに値を持つ関数である C^0 連続性を有する適合型の気泡関数 (bubble function) を一次要素に加えた通常の Bubnov-Galerkin 型の有限要素法を用いた近似が、ある種の問題において安定化有限要素法と等価となることが明らかとなっている⁴⁾⁵⁾⁶⁾。このような等価性は、気泡関数の自由度を要素毎に消去する、いわゆる静的縮約 (static

condensation) という操作によって得られた有限要素方程式を考察することによって示される。定常移流拡散方程式では、気泡関数要素は、安定化有限要素法の一つである SUPG(Streamline Upwind / Petrov Galerkin) 法¹⁾に等価となる⁴⁾⁷⁾⁸⁾ことから、気泡関数を変化させることにより適切な数値粘性を導入する正規化気泡関数要素 (Scaled Bubble Element) が提案されている。また、Stokes 方程式においても、流速場に対して気泡関数要素を用い、圧力場に対しては一次要素による、MINI 要素と呼ばれる要素を用いた混合型有限要素法による近似は、安定化有限要素法の一つである SUPG 法を PSPG(Pressure Stabilizing / Petrov Galerkin) 法³⁾と組み合わせた手法から導かれるものと等価となる⁵⁾。このことから、正規化気泡関数要素を MINI 要素における気泡関数として適用することにより、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する混合型有限要素法を考えることができる。山田⁹⁾は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する MINI 要素を用いた混合型有限要素法として、気泡関数に P 型正規化気泡関数を適用する手法を提案している。しかしながら、気泡関数における安定化作用には限界があり、Stokes 方程式においては、気泡関数の圧力場に対する安定化作用は、かならずしも十分ではないことが指摘されている。そこで、本研究では、重心点のみににおける安定化項を付加することにより数値的な不安定性を回避することを提案するもの

である。

一方、有限要素法においては計算結果の精度の向上を目的として、計算スキームの高精度化における研究の他に、効率的な要素分割を自動的にを行い、より精度の高い計算結果を得ようとする、いわゆる、適応的有限要素法の研究が行われている。この適応的有限要素法は、計算結果の誤差評価を行い、現象の位置的な変化に合わせて有限要素分割を作成し直し、補間誤差のより少ない結果を得ようとするものである。本研究では、メッシュ形状に影響を受けない形でグローバルにメッシュを作り直すアダプティブリメッシング法を、非圧縮性粘性流れ解析に応用することを考える。デローニー三角分割法は、任意に設定された節点群を対象として、解析領域を三角形に分割する手法であるが、本論ではその手法を適応的有限要素法に応用するものである。グローバルにメッシュを作成する方法では、例えば、円柱周りの流れなど、初期において対称性が存在するような問題の場合、メッシュが故意に対称性を崩す場合がある。これに対して、ある2点の基準点をもうけ、その方向をもとに節点群を発生させる。節点群は、補間誤差評価によって要素寸法に対応させるものとする。本研究では、デローニー法にこの手法を導入し、非定常流れ問題のアダプティブリメッシング法として適用する。作成されたメッシュは、初期形状の影響を受けないものとなり、また対称な領域においては基準方向の設定により、対称に節点群を発生させることが可能となる。アスペクト比に対する考慮は、基準方向より60度分割の放射状を構成し、節点群を発生させ、正三角形に近い形となるものとしている。

本論では、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の有限要素法による解析手法として、安定化作用を導入した線形型気泡関数を分離型法に適用した新しい手法を提案し、検証の計算として、3次元の Rayleigh-Benard 対流を取り上げ、ここで提案する手法の適用性について検討を行うものである。また、適応型有限要素法においては、本手法のアルゴリズムを示し、適用例として2次元の非圧縮性粘性流体における円柱周り流れの計算を行うものである。

2. 基礎方程式

非圧縮性粘性流れにおける基礎方程式は、無次元化することによって、以下の運動方程式と連続式によって表される。

運動方程式

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = f_i \text{ in } \Omega \quad (1)$$

連続式

$$u_{i,i} = 0 \text{ in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 u_i 、 p は、流速、圧力、 f_i は外力項、また、 $\nu = 1/Re$ であり、 Re は、レイノルズ数である。

境界 Γ は、 Γ_1 と Γ_2 に分けられ、以下の境界条件が規定される。

$$u_i = \hat{u}_i \text{ on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\{-p\delta_{ij} + \nu(u_{i,j} + u_{j,i})\} \cdot n_j = \hat{t}_i \text{ on } \Gamma_2 \quad (4)$$

ここで、 δ はクロネッカーのデルタ関数、 n_j は境界 Γ の外向き法線ベクトルである。

3. 時間方向の離散化

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用し、連続式 (2) は完全陰的に表す。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^* u_{i,j}^{n+1/2} + p_{,i}^{n+1} - \nu \left(u_{i,j}^{n+1/2} + u_{j,i}^{n+1/2} \right)_{,j} = f_i \quad (5)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (6)$$

ここで、

$$u_i^* = \frac{1}{2}(3u_i^n - u_i^{n-1}), \quad u_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_i^{n+1} + u_i^n)$$

である。移流速の線形近似としている u_i^* は、2次精度 Adams-Bashforth 公式により得られている。このようにして得られたスキームは、時間に関して2次精度を有する線形スキームとなっている。

圧力 Poisson 方程式の導出については、運動方程式 (5) と連続式 (6) に対して、SMAC 法、SIMPLE 法、また、Hayashi らの A 法¹⁰⁾に準じ、連続式 (6) を完全に満足しない中間流速を導入してから圧力 Poisson 方程式を導くことによって流速場と圧力場を分離して解くことのできる分離型法を適用する。

前時間ステップの圧力 p^n を近似的な圧力として、運動方程式 (5) の圧力を p^n に置き換えると、運動方程式 (5) は、未知流速 u_i^{n+1} を中間流速 $\tilde{u}_i^{n+1}$ に置き換えた次式になる。

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^* \tilde{u}_{i,j}^{n+1/2} + p_{,i}^n$$

$$-\nu \left(\tilde{u}_{i,j}^{n+1/2} + \tilde{u}_{j,i}^{n+1/2} \right)_{,j} = f_i \quad (7)$$

$$\tilde{u}_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_i^{n+1} + u_i^n)$$

式(5)と式(7)の差をとると、次式が得られる。

$$\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}u_j^*(u_{i,j}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j}^{n+1}) + (p_{,i}^{n+1} - p_{,i}^n) - \frac{1}{2}\nu \{ (u_{i,j}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j}^{n+1}) + (u_{j,i}^{n+1} - \tilde{u}_{j,i}^{n+1}) \}_{,j} = 0 \quad (8)$$

SMAC 法や Hayashi らの A 法では、陽的解法に基づいているため上式の第 2 項と第 4 項は現れない。また、陰的解法の SIMPLE 法でも、第 2 項と第 4 項を小さいとして省略している。しかしながら、本手法では、空間方向の離散化を行ったときに、式(7)と式(8)の代数方程式の行列の形を適合させるため、第 2 項と第 4 項を省略しないものとする。

式(8)の発散をとり、式(6)を代入することによって圧力 Poisson 方程式が得られる。ただし、流速 u_i^{n+1} は未知なので、 $u_i^{n+1} \simeq \tilde{u}_i^{n+1}$ と近似し、ここでは、式(8)の第 2 項と第 4 項を省略している。

$$\Delta t(p_{,ii}^{n+1} - p_{,ii}^n) = \tilde{u}_{i,i}^{n+1} \quad (9)$$

本手法のアルゴリズムは、式(7)⇒式(9)⇒式(8)となる。定常状態に収束する問題では、中間流速 $\tilde{u}_i$ が流速 u_i に収束し、

$$p^{n+1} - p^n \rightarrow 0$$

となる。

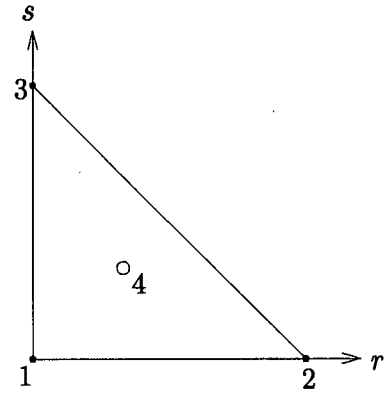
よって、この手法では、定常収束問題で式(9)が連続式(6)に収束するため、連続条件が Δt に依存しない。しかしながら、空間方向の離散化において、同次補間を用いた場合には、安定化の働きをする項が存在しないために、解が不安定になりやすい。このことから、混合補間を用いる必要がある。

4. 時間方向の離散化

4.1 時間方向の離散化

通常の Galerkin 法に従い空間方向の離散化を行う。本研究では、混合補間の組み合わせとして、MINI 要素を用いるものとする。すなわち、要素の選択として、流速に関しては気泡関数要素を圧力に関しては 1 次要素を補間関数に用いる。以下に 2 次元、および 3 次元の MINI 要素を示す。

ここで、 ϕ_e は気泡関数である。

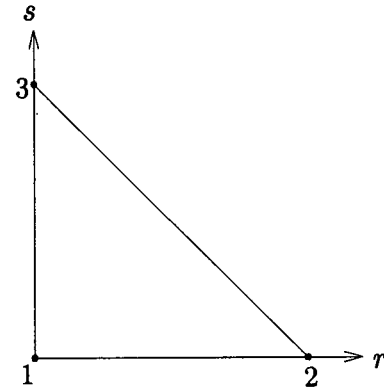


(a) 気泡関数要素

$$u_i = \Phi_1 u_{i1} + \Phi_2 u_{i2} + \Phi_3 u_{i3} + \Phi_4 \tilde{u}_{i4} \quad (10)$$

$$\Phi_1 = 1 - r - s, \quad \Phi_2 = r, \quad \Phi_3 = s, \quad \Phi_4 = \phi_e$$

$$\tilde{u}_{i4} = u_{i4} - \frac{1}{3}(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3})$$



(b) 1 次要素

$$p = \Psi_1 p_1 + \Psi_2 p_2 + \Psi_3 p_3 \quad (11)$$

$$\Psi_1 = 1 - r - s, \quad \Psi_2 = r, \quad \Psi_3 = s$$

図-1 2 次元の MINI 要素

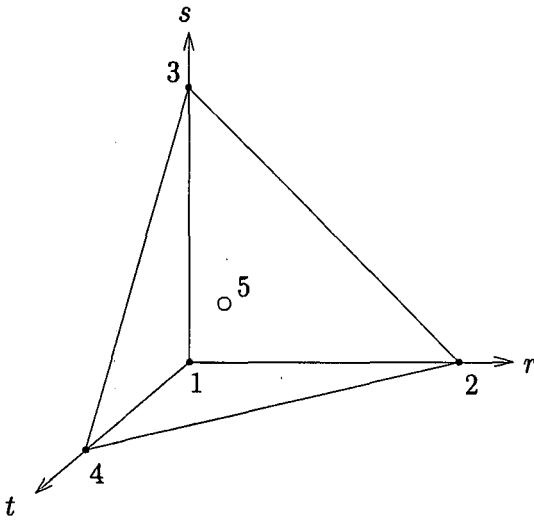
4.2 適合型気泡関数の安定化パラメータ

気泡関数要素は静的縮約という操作を行うことにより重心点を消去することができる。その場合に気泡関数により導出されるものは定常移流拡散方程式、定常 Stokes 方程式において安定化有限要素法の定式化によって導かれるものと等価になることが示されている。そのときに気泡関数により導かれる安定化パラメータは次のようなものである⁸⁾。

$$\tau_e = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\nu \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 A_e} \quad (14)$$

ここで、 Ω_e は要素領域、 $\langle u, v \rangle_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} u v d\Omega$ 、 $\|u\|_{\Omega_e}^2 = \langle u, u \rangle_{\Omega_e}$ 、 $A_e = \int_{\Omega_e} d\Omega$ である。

上式によって得られる安定化パラメータは、2 次元、

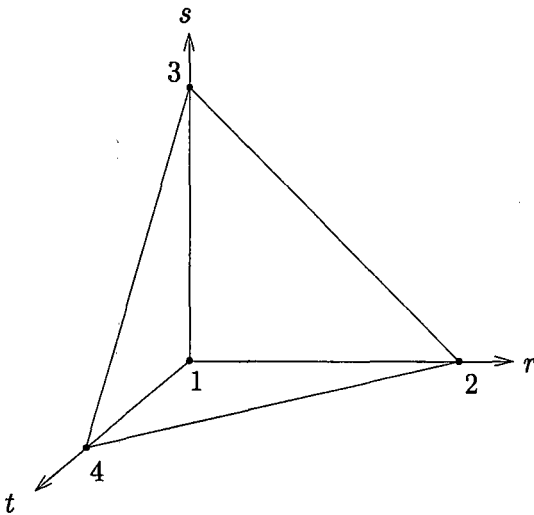


(a) 気泡関数要素

$$u_i = \Phi_1 u_{i1} + \Phi_2 u_{i2} + \Phi_3 u_{i3} + \Phi_4 u_{i4} + \Phi_5 \tilde{u}_{i5} \quad (12)$$

$$\Phi_1 = 1 - r - s - t, \Phi_2 = r, \Phi_3 = s, \Phi_4 = t, \Phi_5 = \phi_e$$

$$\tilde{u}_{i5} = u_{i5} - \frac{1}{4}(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} + u_{i4})$$



(b) 1次要素

$$p = \Psi_1 p_1 + \Psi_2 p_2 + \Psi_3 p_3 + \Psi_4 p_4 \quad (13)$$

$$\Psi_1 = 1 - r - s - t, \Psi_2 = r, \Psi_3 = s, \Psi_4 = t$$

図-2 3次元の MINI 要素

3次元において次のような粗い評価式が得られている¹¹⁾。

$$\tau_e = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\nu \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 A_e} \leq \frac{h_e^2}{18\nu} \quad (15)$$

この評価式における要素の代表長さ h_e は、頂点から重心を通り対辺（面）までの線分の長さの最大値を用いている。この評価は、すべての ϕ_e に対するものであり、どのような気泡関数を選んでも、MINI 要素の

安定化パラメータを一定値以上にできないことを意味している。

実際に、次式で表される気泡関数¹²⁾における安定化パラメータについて考える。

$$\phi_e = \prod_{i=1}^{N+1} L_i, \quad N \text{ は次元数} \quad (16)$$

ここで、 $\{L_i\}$ は面積（体積）座標である。メッシュサイズ h_e の正方メッシュを用いたときには、安定化パラメータは、2次元においては $\tau_e = \frac{h_e^2}{100\nu}$ 、3次元においては $\tau_e \approx \frac{h_e^2}{342\nu}$ となる。

拡散が卓越した流れにおいては、安定化有限要素法の τ_{eS} は $\frac{h_e^2}{4\nu}$ に収束する。このため、式 (16) の気泡関数を用いた場合には、気泡関数による数値粘性は不足し、圧力振動が発生する。特に3次元の気泡関数においては、2次元に比べて3倍以上も数値粘性が不足することから、圧力振動が顕著に発生すると考えられる。

4.3 重心点のみにおける安定化作用の導入

気泡関数は、どのような関数を選んでも、気泡関数要素の安定化パラメータを一定値以上にできないことから、数値的な安定性は必ずしも十分ではないことが解る。

本研究は、この十分ではない数値粘性を補うために式 (14) を式 (17) のように安定化作用を導入することにより不足していた数値粘性を適切に与えることを提案するものである。

$$\tau_{eB} = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{(\nu + \nu') \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 A_e} \quad (17)$$

ここで、 ν' は安定化作用に対する制御パラメータであり、この値は、次式のように安定化有限要素法において用いられている τ_{eS} と等価となるように決定する。

$$\tau_{eB} = \tau_{eS}, \quad \tau_{eS} = \left[\left(\frac{2|u_i|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

式 (14) を式 (17) に置き換えて定常移流拡散方程式、定常 Stokes 方程式において逆にこの形から、気泡関数の自由度を消去しない有限要素方程式を導くと、結果的にこの有限要素方程式において、重心点のみに、以下に示すような安定化項を付加した形となる。

$$\sum_{e=1}^{Ne} \nu' \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 b_e \quad (19)$$

Ne は総要素数、 b_e は重心点の自由度

この安定化項 (19) を付加することにより数値的な不安定性を回避するものである。また、この定式化を用いる場合には、気泡関数の形状は変化させずに、安定化作用に対する制御パラメータを変化させることから、適合型の気泡関数であれば、どのような気泡関数を用いてもよいことになる。このことから、本研究では、適合型の気泡関数の中でもっとも定式化が簡便である気泡関数要素を用いてこの手法を適用することを提案するものである。

4.4 安定化パラメータと制御パラメータの関係

安定化パラメータ (14) と (17) の安定化作用の違いを考えるために、図-3 にセルレイノルズ数 ($|u_i|h_e/2\nu$) の変化に伴う安定化パラメータ (14), (17) の一般的な変化の状況を示す。図-3 をみると、式 (14) と式 (17) が

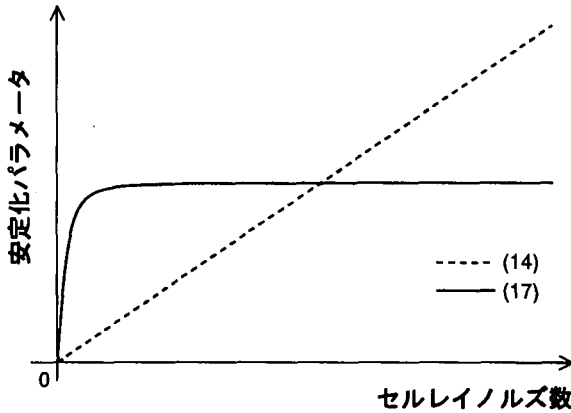


図-3 セルレイノルズ数による安定化パラメータの変化

等しくなるところを境に、セルレイノルズ数が大きい場合 (移流卓越) には、式 (14) が式 (17) よりも大きくなり、過剰な安定化作用が入るのにたいして、セルレイノルズ数が小さい場合 (拡散卓越) には、式 (14) が式 (17) よりも小さくなり、安定化作用が不足することがわかる。次に、制御パラメータ ν' の値の変化を考える。式 (18) より、

$$\nu' = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\tau_{eS} \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 A_e} - \nu \quad (20)$$

となる。式 (20) に式 (14) を代入にると、

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\tau_{eS} \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 A_e} - \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\tau_e \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 A_e} \\ &= (\tau_e - \tau_{eS}) \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\tau_{eS} \tau_e \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 A_e} \end{aligned} \quad (21)$$

が得られる。従って、式 (21) より、安定化パラメータ τ_{eS} と制御パラメータ ν' において以下の関係が得ら

れる。

$$\begin{aligned} \tau_e &= \tau_{eS} \text{ のとき } \nu' = 0 \\ \tau_e &> \tau_{eS} \text{ のとき (移流卓越) } \nu' > 0 \\ \tau_e &< \tau_{eS} \text{ のとき (拡散卓越) } \nu' < 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\tau_e < \tau_{eS}$ のときには $\nu' < 0$ となり負の数値粘性が入るように思えるが、実際には、式 (19) の安定化項と有限要素方程式中の粘性項の重心点における項をまとめると

$$(\nu + \nu') \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 \quad (22)$$

となり、式 (22) は、式 (17) より

$$(\nu + \nu') \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\tau_{eS} A_e} \quad (23)$$

となるので、必ず 0 より大きい値となる。このことから、粘性項全体を考えると負の数値粘性は入らないことがわかる。

4.5 線形型気泡関数

もっとも定式化が簡便である気泡関数として本研究では図-4、5 に示すように三角形 (四面体) の要素領域をその重心点を用いて 3(4) つの小三角形 (四面体) w_i に分割する線形型気泡関数を提案する。線形型気泡関数はこの小三角形 (四面体) 毎にアイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ ($\{r, s, t\}$) を用いて次のように定義される。

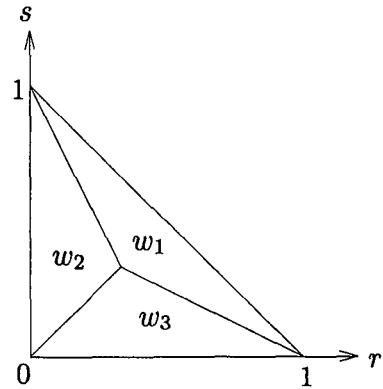


図-4 要素領域 (2次元)

$$\phi_e = \begin{cases} 3(1-r-s) & \text{in } w_1 \\ 3r & \text{in } w_2 \\ 3s & \text{in } w_3 \end{cases} \quad (24)$$

この気泡関数は線形であることから、この 1 回微分は定数となるので、この要素における積分が簡便にな

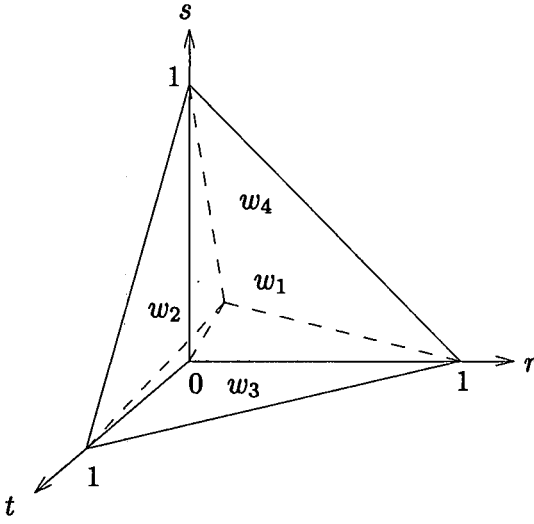


図-5 要素領域 (3次元)

$$\phi_e = \begin{cases} 4(1-r-s-t) & \text{in } w_1 \\ 4r & \text{in } w_2 \\ 4s & \text{in } w_3 \\ 4t & \text{in } w_4 \end{cases} \quad (25)$$

と考えられる。また、この線形型の気泡関数は、四角形、六面体の要素においても拡張が可能である。

5. 適応型有限要素法

5.1 事後誤差評価

事後誤差については Zienkiewicz and Zhu ら¹³⁾によって提案された手法を用いる。従って、各要素において次式で定義されるノルムを誤差の指標に用いる¹⁴⁾。

$$\|e\|^2 = \sum_{e=1}^{Ne} \|e\|_e^2 = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{\Omega_e} [(\tilde{\tau}_{ij} - \hat{\tau}_{ij})(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \hat{\varepsilon}_{ij})] d\Omega \quad (26)$$

ここで $\tilde{\tau}_{ij}$ 、 $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ は歪み、応力の有限要素解を要素境界上で連続となるように平滑化したものであり、 $\hat{\tau}_{ij}$ 、 $\hat{\varepsilon}_{ij}$ は有限要素解である。さらに、解析領域全体の相対誤差を次のように定義する。

$$\eta = \|e\|/\|E\| \quad (27)$$

ここで、

$$\|E\|^2 = \sum_{e=1}^{Ne} \|E\|_e^2 = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{\Omega_e} [(\hat{\tau}_{ij}\hat{\varepsilon}_{ij} - \hat{p}\hat{\varepsilon}_{kk})] d\Omega \quad (28)$$

$\hat{p}$ 、 $\hat{\varepsilon}_{kk}$ は有限要素解

である。この η をリメッシングを行う判定値として用いるものとし、最大許容相対誤差 $\bar{\eta}$ を定め、 η が $\bar{\eta}$ を

超えたならばリメッシングを行うものとする。誤差がすべての要素に等しく分配されたとすると、各要素の最大許容誤差は次のようになる。

$$\bar{e}_{max} = \bar{\eta} \|E\| / \sqrt{Ne} \quad (29)$$

また、リメッシング後の要素サイズを以下の値を用いて評価する。

$$\zeta_e = \|e\|_e / \bar{e}_{max} \quad (30)$$

誤差の収束のオーダーが $O(h^p)$ であるとする、新しい要素サイズは次のように計算できる。

$$h_e^{new} = h_e / \zeta_e^{1/p} \quad (31)$$

ここで、 h_e は現在の要素サイズであり p は内挿関数の次数である。本論文では p は 1 とした。一般に、 h_e^{new} に対して、以下に示すように下限値と上限値を定める必要がある。

$$h_{min} \leq h_e^{new} \leq h_{max} \quad (32)$$

h_{max} は解析領域のサイズに比べて、要素サイズが大きくなり過ぎないようにするために定められる上限値である。また、 h_{min} は時間ステップ Δt に対して、計算が安定に進行するために必要とされる要素サイズの下限値である。

5.2 放射基準線法を用いたアダプティブリメッシング法

式 (31) によって計算される h_e^{new} は各要素ごとに一定値をとる。ここで、この離散的な要素寸法に沿って連続的なメッシュを得るにはどうしたら良いかが問題となる。本研究では、図-6 に示すように、基準線をもうけ、そこからほぼ h_e^{new} の分割幅になるように半径 r 、角度 θ を h_e^{new} 、 $\Delta\theta = h_e^{new}/r$ ごとに増加させることにより $r_1 \sim r_2$ 、 $\theta_1 \sim \theta_2$ の範囲において、節点を発生させ、対象としている三角形の内部に位置している節点のみを採用する手法 (放射基準線法) を提案するものである。ここで、この手法は基準線を用いるが、この基準線は、節点をこの基準線から対称に発生させるために、用いるものであり、基本的には、任意の場所に置くことができる。

この節点の発生の仕方を用いると、ある対象としている要素において、その要素のメッシュ幅が h_e^{new} より小さいときには、節点は発生させず、 h_e^{new} より大きいときには、節点を発生させることから、メッシュを細かくする作業と、粗くする作業の区別がない手法とな

る（同時に行われる）。また、この節点の発生は、基準線をもうけ、そこから節点を発生させることから対称な領域において節点を基準線から対称に発生させることができ、また、初期のメッシュにほとんど依存しない手法となっている。角度の刻み幅 $\Delta\theta$ は、基準線（0度）から基準線（360度）において、割り切れる値が望ましいということと、より正三角形に近い形状にするという目的から、60度で割り切れる値としている。ここで、 r は基準点 1 から外方向に h_e^{new} ずつ増加するものとし、 θ は基準線から左回りに $\Delta\theta$ ずつ増加するものとしている。この節点の発生手法は離散的な要素寸法を用いているので、要素の節点と、その節点どうしを結ぶ線（要素境界上）に対しては、不連続となる。そこで、各節点でその節点を含む要素における h_e^{new} を要素面積の重みを付けて平均化させ、節点での h_n^{new} を新しく定義する。この h_n^{new} を用いて、節点とそれらを結ぶ辺上において、上記に示した方法と同じ手法で節点を発生させる。これは、節点においては、その節点上に発生させた節点があれば採用し、辺においては、その辺上に発生させた節点があれば採用するものである。これらの作業を、リメッシュする前のメッシュの全ての要素にたいして行うことにより、解析領域全体に節点を発生させる。

このようにして発生させた節点において、デローニー法を用いて要素を発生させる。さらに、より正三角形に近い形状にする目的と、節点の発生をより連続的にするために、ラプラシアン法を用いて節点を移動させる。

この節点の発生手法を見てみると、要素ごとに必要な節点のみを発生させていく手法であるため、あらかじめ、多くの節点を全領域に発生させ、該当しない節点を除外していく方法に比べて、非常に節点の発生が高速に行えると考えられる。また、多くの節点を全領域に発生させるために必要な記憶容量が必要なくなるので、その記憶容量を節約できる。

6. 数値解析例

6.1 Rayleigh-Benard 対流の解析

安定化項を付加したことによる効果を検討するために、拡散が卓越した問題である Rayleigh-Benard 対流を取り上げる。ここで、3次元の通常の気泡関数においては、2次元の通常の気泡関数に比べて3倍以上も数値粘性が不足し、圧力振動が発生しやすいと考えられることから、3次元の解析を行うものである。

この解析において、用いる基礎方程式としては、圧

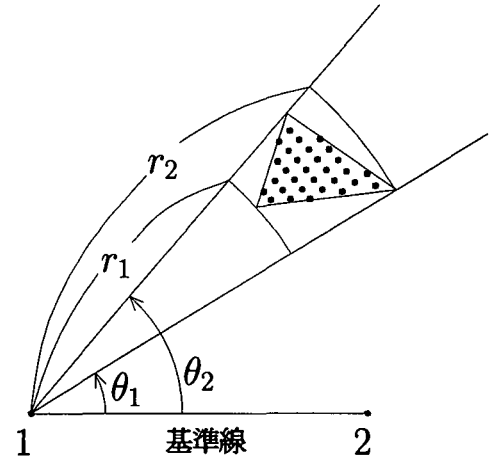


図-6 基準線を用いた節点の発生

縮性 Navier-Stokes 方程式、熱輸送の方程式、連続の方程式において、密度 ρ の変化は重力項のみで考慮し、その他の項では ρ は一定、すなわち非圧縮性を近似してえられた、以下に示すような Boussinesq 近似による 3次元の方程式を用いるものとする。

運動方程式

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - Pr(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = PrRa \tau f_i \text{ in } \Omega \quad (33)$$

連続式

$$u_{i,i} = 0 \text{ in } \Omega \quad (34)$$

熱輸送方程式

$$\dot{\tau} + u_i \tau_{,i} - \tau_{,ii} = 0 \text{ in } \Omega \quad (35)$$

式中において u_i 、 p 、 τ はそれぞれ無次元化された流速、圧力、温度である。また、 $f_i = (0, 0, 1)^T$ であり、 Pr は Prandtl 数、 Ra は Rayleigh 数を表している。

解析領域は（図-7）、 $1 \times 1 \times 1$ であり、 $20 \times 20 \times 20$ の不均等な有限要素分割を用いている。初期条件は、流速、圧力はすべての領域において 0 とし、温度においては上壁においては 0 を下壁においては 1 を与え、その他の領域においては、上壁から下壁において線形に温度が分布しているものとする。境界条件は、流速においては、全ての壁面において 0 とし、温度においては、上壁では 0 下壁では 1 を規定し、その他の壁面は断熱壁としている。計算条件としては、 $Pr = 7.1$ 、 $Ra = 8000$ 、 $\Delta t = 0.0025$ を用いた。図-8 に $T = 1$ 後の圧力の計算結果を示す。

図-8 から解るように、通常の気泡関数 (16) を用いた場合の計算結果 (a) は、数値粘性が不足しているために圧力振動が著しく発生しているのに対して、線形

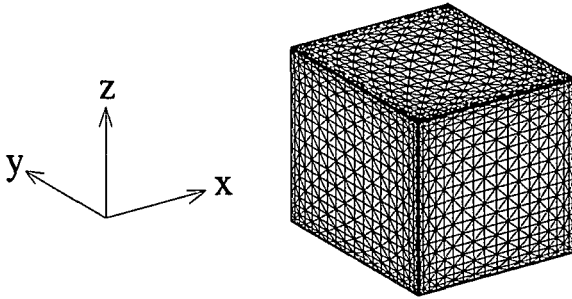


図-7 解析領域

型気泡関数 (25) を用い、安定化作用を導入した場合の計算結果 (b) は、適切な数値粘性が与えられていることから圧力振動が発生していないことが解る。

6.2 円柱周りの解析

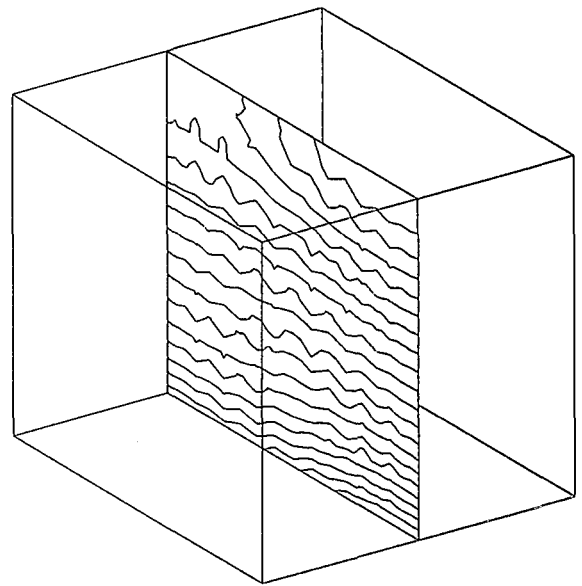
本研究で提案したアダプティブリメッシング法が、初期のメッシュに依存しなく、対称な領域において対称にメッシュ生成されているかを検証するために 2 次元の円柱まわりの解析例を取りあげる。

用いるメッシュは、図-9(a) の対称なメッシュと、図-9(b) の流れ方向に対して非対称に細粗分割したメッシュを用いる。解析領域は、縦 $8D$ (D は円柱の直径)、横 $16D$ であり、円柱は縦 $4D$ 、横 $4D$ の位置に円柱の中心点が置かれている。計算条件としては、 $Re = 40$ 、 $\Delta t = 0.2$ 、 $\bar{\eta} = 0.05(5\%)$ 、 $h_{min} = 0.04$ 、 $h_{max} = 0.25$ を用い、基準点は円柱の中心に置き、流れ方向にそって基準線を儲けた。図-10(a)、(b) に $T = 30$ 後の計算された渦度とメッシュを示す。図-10(a)、(b) の計算結果は、ほぼ同じ渦度とメッシュとなっており、初期のメッシュにメッシュ分割がほとんど依存していないことが解る。また、流れ方向に対してほぼ、対称にメッシュ分割が行われている。

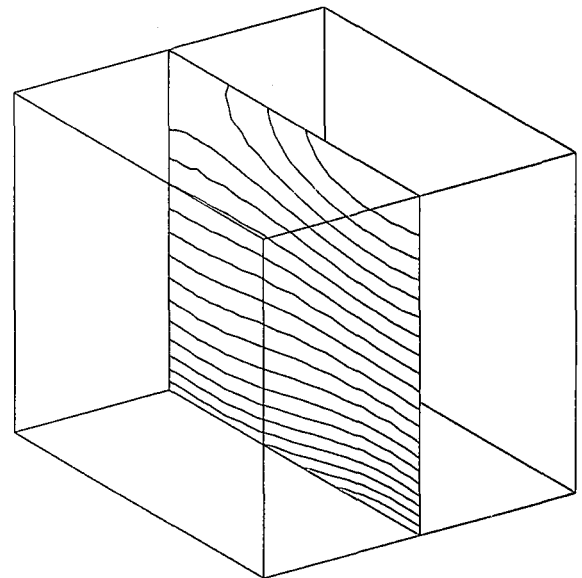
7. 結言

本研究では、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の有限要素法による解析手法として、安定化作用を導入した線形型気泡関数を分離型法に適用した新しい手法を提案した。解析例として、3 次元 Rayleigh-Benard 対流の解析を取り上げ、安定化作用を導入することにより適切な粘性を与えることができ、圧力振動を回避できることを示した。

また、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の適応型有限要素法において、アダプティブリメッシング法を提案した。本研究で提案した、放射基準線法を用いたアダプティブリメッシング法が初期のメッシュに依存しなく、



(a) 通常の気泡関数



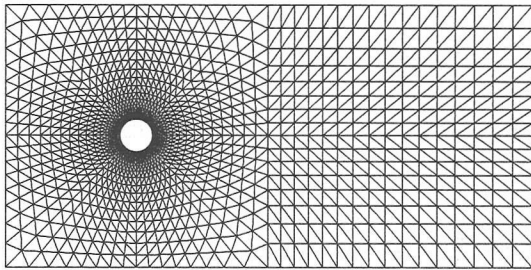
(b) 線形型気泡関数

図-8 計算結果

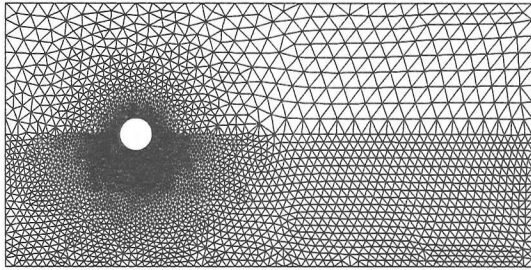
対称な領域において対称にメッシュ生成されているかを検証するために 2 次元の円柱まわりの解析を行い、初期のメッシュにメッシュ分割がほとんど依存していない、かつ、流れ方向に対してほぼ対称にメッシュ分割が行われていることを示した。

参考文献

- 1) A.N.Brooks and T.J.R.Hughes: Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 32, pp.199-259, 1982.
- 2) T.J.R.Hughes, L.P.Franca and M.Balestra: A new finite element formulation for computational fluid dy-



(a) 対称なメッシュ(節点数 1360, 要素数 2560)

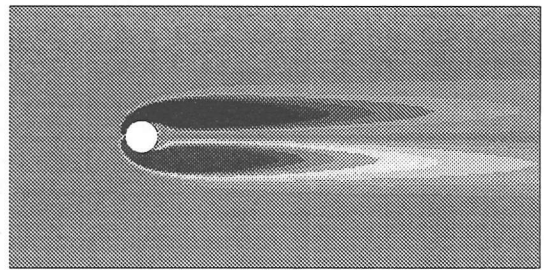


(b) 非対称なメッシュ(節点数 4027, 要素数 7820)

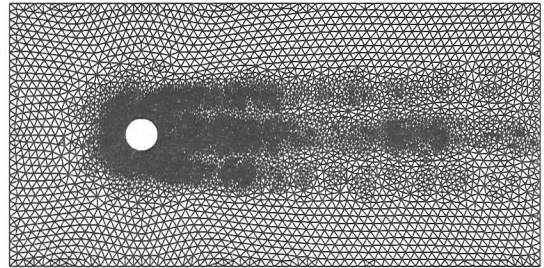
図-9 初期メッシュ

namics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 59, pp.85-99, 1986.

- 3) T.E.Tezduyar, S.Mittal, S.E.Ray and R.Shih: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure element, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 95, pp.221-242, 1992.
- 4) F.Brezzi, M.-O.Bristeau, L.P.Franca, M.Mallet and G.Roge: A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 96, pp.117-129, 1992.
- 5) R.Pierre: Simple C^0 approximations for the computation of incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 68, pp.205-227, 1988.
- 6) L.P.Franca and C. Farhat: Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 123, pp.299-308, 1995.
- 7) C.Baicocchi, F.Brezzi and L.P.Franca: Virtual bubbles and Galerkin-Least-Squares type method(Ga.L.S.), *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 105, pp.125-141, 1993.
- 8) 山田 貴博, 安定化有限要素法と気泡関数要素, 計算工学講演会論文集, Vol.1, pp.167-170, 1996.
- 9) 山田 貴博, 非適合気泡関数を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素スキーム, 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.411-414, 1997.
- 10) M. Hayashi, K. Hatanaka and M. Kawahara, Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.13, pp.805-840, 1991.
- 11) 山田 貴博, 非圧縮性に対する MINI 要素の数値不安定性, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol.19, pp.101-106, 1995.
- 12) M.Fortin and A.Fortin: Newer and newer elements for

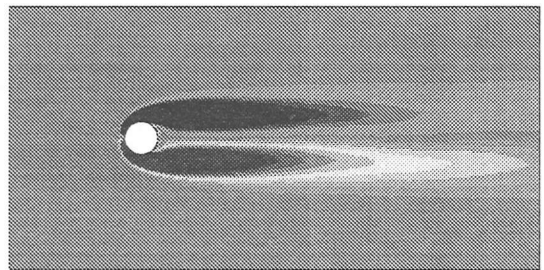


渦度

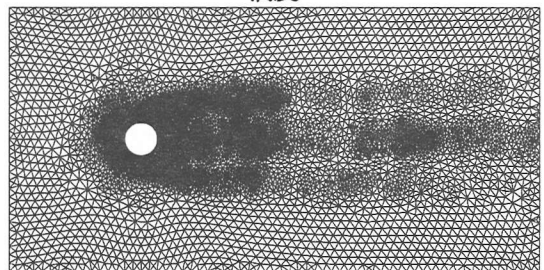


メッシュ(節点数 6639, 要素数 13006)

(a) 対称なメッシュ



渦度



メッシュ(節点数 6932, 要素数 13599)

(b) 非対称なメッシュ

図-10 計算結果

incompressible flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.6, John Wiley & Sons Ltd, pp.171-187, 1985.

- 13) J.Wu, J.Z.Zhu, J.Szmelter and O.C.Zienkiewicz, Error estimation and adaptivity in Navier-Stokes incompressible flows, *Comput. Mech.*, pp.259-270, 1990.
- 14) 矢川・矢数・奥田, 節点密度コントロールによるアダプティブ有限要素流体解析, 計算力学シンポジウム, Vol.7, pp.121-126, 1993.
- 15) J.C.Simo and F.Armero, Unconditional stability and long-term behavior of transient algorithms for the incompressible Navier-Stokes and Euler Equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 111, pp.111-154, 1994.

- 16) T.Yamada: A bubble element for inviscid flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.9, pp.1567-1576, 1995.
- 17) A.Mizukami: An implementation of the Streamline-Upwind/Petrov Galerkin method for linear triangular elements, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engng.*, 49, pp.357-364, 1985.
- 18) P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee and C.D. Upson, A modified finite element method for the solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, Part 1 & 2, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.4, pp.557-598, pp.619-640, 1984.
- 19) V. Selmin, J. Donea and L. Quartapelle, Finite element methods for nonlinear advection, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 52, pp.817-845, 1985.
- 20) R. Pierre, Optimal selection of the bubble function in the stablization of the P_1 - P_1 element for the Stokes problem, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol.32, pp.1210-1224, 1995.
- 21) J.C. Simo, F. Armero and C. Taylor, Galerkin finite element methods with bubble for advection dominated incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.38, pp.1475-1506, 1995.

(1999 年 4 月 23 日 受付)