

## 安定化気泡関数要素を用いた非圧縮粘性流れの解析

Stabilized Bubble Element for An Incompressible Viscous Flow Analysis

奥村 弘\*・松本 純一\*\*・川原 睦人\*\*\*

Hiroshi OKUMURA, Junichi MATSUMOTO and Mutsuto KAWAHARA

\*学生会員 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻博士前期課程(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

\*\*学生会員 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻博士前期課程(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

\*\*\*正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

The Petrov-Galerkin finite element approximation employing the trilinear element with a bubble function is presented in this paper, which is equivalent to the stabilized finite element method in case of  $P^1$  approximation in certain problems such as steady advection-diffusion and viscous fluid flows. As an approximated function of the weighting function, the trilinear interpolation function with a special bubble function called *stabilized bubble* is used. The stabilized bubble element is established using the stabilized bubble function with a control parameter. The shape of the bubble function as the weighting function can be changed to attain optimal numerical viscosity. The rotating cone, the standing vortex and the driven cavity problems are performed for the numerical examples.

**Key Words :** *stabilized bubble function, Petrov-Galerkin approximation, stabilized method, advection-diffusion equation, incompressible Navier-Stokes equations*

## 1. はじめに

従来の適合型気泡関数要素では Bubnov-Galerkin 型の定式化により、気泡関数の自由度を要素毎に消去する、いわゆる静的縮約 (static condensation) の操作によって得られた有限要素近似式が、安定化有限要素法<sup>1)~3)</sup>と等価な上流型の人工拡散を含む近似式となることがわかっている<sup>4)~7)</sup>。

山田<sup>9)10)</sup>は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対し、流速場に気泡関数要素、圧力場に三角形一次要素を用いた MINI 要素<sup>5)8)11)</sup>による混合型有限要素法を提案した。ここで山田の提案する気泡関数要素は、適合型の気泡関数の形状を要素ペクレ数に応じて変化させることにより適切な安定化の効果を導入する  $P$  型正規化気泡関数 ( $P$ -scaled bubble function)<sup>9)</sup>を用いている。また、Hughes は要素ペクレ数に対応する Green 関数を用いた気泡関数を導出し、安定化パラメータに対する関係式<sup>12)</sup>を導くことに成功した。その他の提案されている気泡関数としては、Simo らの  $S$  型正規化気泡関数<sup>13)</sup>などが挙げられる。また、最近の研究においては  $C_0$  連続性を満たさない非適合 (non-confirming) モード<sup>11)</sup>を有する気泡関数が提案されている。しかしながら、どのような適合型の気泡関数を選んでも、安定化パラメータを任意の大きさとすることはできず<sup>11)</sup>、安定化作用は必ずしも十分ではない。

そこで本研究は、従来の気泡関数要素における数値安定性の問題点を解消する新しい気泡関数要素を提案するものである。ここでは、試行関数の補間には三角形

一次要素に通常の適合型気泡関数<sup>14)</sup>を加えた気泡関数要素を用い、また重み関数には三角形一次要素に  $C_0$  連続性を満たし制御パラメータを有する上流型の適合型気泡関数を加えた気泡関数要素による Petrov-Galerkin 型の有限要素近似式<sup>1)</sup>が、Bubnov-Galerkin 近似の場合<sup>4)5)7)</sup>と同様に、安定化有限要素法と等価な上流型の人工拡散を含む近似式が得られることを報告する。さらに、この過程によって得られた Petrov-Galerkin 型の近似式は、気泡関数要素の重心点のみに上流型の人工拡散が付加された Bubnov-Galerkin 型の近似式と等価となる。このとき現れる安定化作用の大きさは、重み関数側の気泡関数の形状によって決定される制御パラメータによって自動的に与えられる。

本研究で提案する制御パラメータを有する上流型の気泡関数を安定化気泡関数と呼ぶことにし、三角形一次要素にこの安定化気泡関数を加えた要素を安定化気泡関数要素と呼ぶことにする。また、本研究では、安定化有限要素法に対する安定化気泡関数要素の安定化パラメータの関係式を導出し、これが移流、拡散のどちらかに流れが卓越する場合においても適切な人工拡散を与え、従来の気泡関数要素における数値安定性の問題点を解決することを述べる。

数値解析例として、純移流方程式の Benchmark 問題である Rotating Cone の解析、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対しては、Standing Vortex Problem<sup>3)15)</sup>と Cavity 内の流れの問題を取り上げ、ここで提案する手法の適用性、有用性について検討、考察を行う。

## 2. 安定化気泡関数要素

### 2.1 定常移流拡散方程式について

$\partial\Omega$  を境界とする有界領域  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  において、次の支配方程式を満たす関数  $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を見出す定常移流拡散問題を考える。

$$\mathbf{a} \cdot \nabla u - \nu \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{a}$  は移流速度、 $\nu$  は拡散係数、 $f$  はソース項である。また、境界条件は  $\partial\Omega$  において  $u = 0$  となる境界値問題を扱う。

この問題に対して、標準的な変分法的定式化を適用することにより、次の弱形式を満たす関数  $u \in S = H_0^1(\Omega)$  を見出す変分問題に帰着することができる。

$$\langle \mathbf{a} \cdot \nabla u, v \rangle + \nu \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \quad (2)$$

ここで、 $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv \, dx$  であり、 $v \in V = H_0^1(\Omega)$  である。この変分問題に対し、気泡関数要素の有限要素空間を用い、Petrov-Galerkin 近似を適用することを考える。気泡関数要素において、以下に定義する三角形一次要素の有限要素空間  $\bar{S}_h, \bar{V}_h$  と気泡関数の空間  $\tilde{S}_h, \tilde{V}_h$  を考える。

$$\bar{S}_h = \{\bar{u}_h \in C_0^0(\Omega), \quad \bar{u}_h|_{\Omega_e} \in P^1(\Omega_e)\} \quad (3)$$

$$\tilde{S}_h = \{\tilde{u}_h \in C_0^1(\Omega), \quad \tilde{u}_h|_{\Omega_e} = \phi_e b_e, \quad b_e \in \mathbf{R}\} \quad (4)$$

$$\bar{V}_h = \bar{S}_h \quad (5)$$

$$\tilde{V}_h = \{\tilde{v}_h \in C_0^0(\Omega), \quad \tilde{v}_h|_{\Omega_e} = \psi_e c_e, \quad c_e \in \mathbf{R}\} \quad (6)$$

ここで、 $\Omega_e$  は要素領域、 $b_e$  は気泡関数についての自由度、 $\phi_e$  は  $\text{supp}(\phi_e) \subset \Omega_e$  となる適合型の気泡関数である。一方の気泡関数  $\psi_e$  は以下のように定義し、ここでは  $\psi_e$  を安定化気泡関数と呼ぶことにする。

$$\psi_e = \phi_e + \xi \mathbf{a} \cdot \nabla \phi_e \quad (7)$$

安定化気泡関数  $\psi_e$  は気泡関数  $\phi_e$  とその一階の微分導関数の項から形成されており、気泡関数  $\phi_e$  の一階の微分導関数が  $C_0$  連続となる気泡関数  $\phi_e = (L_1 L_2 L_3)^{N_b}$ 、 $N_b \geq 2$  ( $L_i$  は面積座標) を選べば ( $\phi_e \in C_0^{N_b}$ )、安定化気泡関数  $\psi_e$  においても  $C_0$  連続性が成立し、適合型の気泡関数 ( $\psi_e \in C_0^{N_b-1}$ ) となる。 $\xi$  は制御パラメータであり、安定化気泡関数の形状を決定するものである。ここで  $\xi$  を用いた安定化気泡関数  $\psi_e$  の実際の性質は後節で述べる。

式 (2) で表される変分問題に安定化気泡関数要素  $V_h = \bar{V}_h \oplus \tilde{V}_h \subset V$  を用い、Petrov-Galerkin 近似を適用することにより、 $u_h \in S_h = \bar{S}_h \oplus \tilde{S}_h \subset S$  を見出す次の近似問題が得られる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \cdot \nabla u_h, v_h \rangle + \nu \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle \\ = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \quad (8)$$

また、近似解  $u_h \in S_h$  と近似重み関数  $v_h \in S_h$  は以下のように表現できる。

$$u_h = \bar{u}_h + \tilde{u}_h, \quad v_h = \bar{v}_h + \tilde{v}_h \quad (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{u}_h \in \bar{S}_h, \quad \bar{v}_h \in \bar{V}_h, \quad \tilde{u}_h = \sum_{e=1}^{N_e} \phi_e b_e \in \tilde{S}_h, \\ \tilde{v}_h = \sum_{e=1}^{N_e} \psi_e c_e = \sum_{e=1}^{N_e} \phi_e c_e + \tilde{v}' \in \tilde{V}_h, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tilde{v}' = \sum_{e=1}^{N_e} \xi \mathbf{a} \cdot \nabla \phi_e c_e \quad (11)$$

である ( $N_e$  は要素数)。次に、静的縮約を行うために、式 (8) において  $v_h = \psi_e c_e$  とすると、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}_h, \phi \rangle_{\Omega_e} + \xi \|\mathbf{a} \cdot \nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 b_e \\ + \nu \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 b_e = \langle f, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\|v\|_{\Omega_e}^2 = \langle v, v \rangle_{\Omega_e}$  である。上式の誘導の際に次の関係を用いている。

$$\begin{aligned} \langle \nabla \bar{u}_h, \nabla \tilde{v}_h \rangle_{\Omega_e} &= 0, \\ \langle \nabla \tilde{u}_h, \nabla \bar{v}_h \rangle_{\Omega_e} &= 0, \end{aligned}$$

$$\langle \nabla \phi_e, \nabla \psi_e \rangle_{\Omega_e} = \langle \nabla \phi_e, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} \quad (13)$$

また、 $v_h = \bar{v}_h$  を選び、上式を利用して要素毎に  $\tilde{u}_h$  を消去すると次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}_h, \bar{v}_h \rangle + \nu \langle \nabla \bar{u}_h, \nabla \bar{v}_h \rangle \\ + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \left[ \frac{\langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}_h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{v}_h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} \right] \\ - \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \left[ \frac{\langle f, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{v}_h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} \right] \\ = \langle f, \bar{v}_h \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $A_e = \int_{\Omega_e} dx$  であり、 $\tau_e$  は次式のように与えられる。

$$\tau_e = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2 A_e^{-1}}{\xi \|\mathbf{a} \cdot \nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 + \nu \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2} \quad (15)$$

いま、 $\mathbf{a}$  と  $f$  を要素内定数と仮定すれば、 $\nabla \bar{u}_h$  と  $\nabla \bar{v}_h$  も要素内定数となり、次式が成立する。

$$\frac{\langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}_h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{v}_h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} = \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}_h, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{v}_h \rangle_{\Omega_e} \quad (16)$$

$$\frac{\langle f, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{v}_h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} = \langle f, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{v}_h \rangle_{\Omega_e} \quad (17)$$

以上を踏まえると、式 (14) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}_h, \bar{v}_h \rangle + \nu \langle \nabla \bar{u}_h, \nabla \bar{v}_h \rangle \\ & + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}_h, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{v}_h \rangle_{\Omega_e} \\ & = \langle f, \bar{v}_h \rangle + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \langle f, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{v}_h \rangle_{\Omega_e} \end{aligned} \quad (18)$$

したがって、気泡関数要素における Bubnov-Galerkin 型の定式化<sup>4)7)</sup> により得られるものと同様に、安定化気泡関数を用いた Petrov-Galerkin 型の定式化からも、SUPG 法<sup>1)</sup>と等価な上流型の人工拡散を含む有限要素近似式が得られる。

## 2.2 定常 Navier-Stokes 方程式について

$\partial\Omega$  を境界とする空間領域  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  において、流速  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$  と圧力  $p : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を見出す定常 Navier-Stokes 方程式を考える。運動方程式と連続式はそれぞれ以下のように表される。

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (19)$$

ここで、 $\nu$  は粘性係数を表し  $\nu = 1/Re$  であり  $Re$  は Reynolds 数である。また、境界条件としては、境界  $\partial\Omega$  において流速  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  を考える。ここでは、非線形項である移流項を近似移流速度  $\mathbf{a} \approx \mathbf{u}$  を用いて上式を以下のように線形化する。

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (20)$$

この問題に対して混合型の変分法的定式化を適用することにより、次の弱形式を満たす  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{S} \times P$  を見出す変分問題に帰着することができる。

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \nu \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle - \langle p, \nabla \mathbf{v} \rangle \\ & = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle = 0 \quad \forall q \in Q \quad (22)$$

ここで、 $\mathbf{S} = \mathbf{V} = (H_0^1(\Omega))^2$ ,  $P = Q = L^2(\Omega) \setminus \mathbf{R}$  である。この変分問題に対し、MINI 要素を用いた Petrov-Galerkin 型の有限要素近似を考える。速度場に対しては気泡関数要素  $(S_h)^2 = (\bar{S}_h \oplus \tilde{S}_h)^2 \subset \mathbf{S}$  と  $(V_h)^2 = (\bar{V}_h \oplus \tilde{V}_h)^2 \subset \mathbf{V}$  を用い、圧力場に対しては次の三角形一次の有限要素空間  $P_h$  と  $Q_h$  を用いる。

$$Q_h = \{q_h \in C^0(\Omega), \quad q_h|_{\Omega_e} \in P^1(\Omega_e), \quad \int_{\Omega} q_h dx = 0\} \quad (23)$$

$$P_h = Q_h \quad (24)$$

以上のことを踏まえ、Petrov-Galerkin 近似を適用することにより、有限要素近似解  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (S_h)^2 \times P_h$  を見出す近似問題が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{a}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle + \nu \langle \nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h \rangle \\ & - \langle p_h, \nabla \mathbf{v}_h \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \end{aligned} \quad (25)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h \rangle = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (26)$$

また、流速場の近似解  $\mathbf{u}_h$  と近似重み関数  $\mathbf{v}_h$  は以下のように表現できる。

$$\mathbf{u}_h = \bar{\mathbf{u}}_h + \tilde{\mathbf{u}}_h, \quad \mathbf{v}_h = \bar{\mathbf{v}}_h + \tilde{\mathbf{v}}_h \quad (27)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{u}}_h \in (\bar{S}_h)^2, \quad \bar{\mathbf{v}}_h \in (\bar{V}_h)^2, \quad \tilde{\mathbf{u}}_h = \sum_{e=1}^{N_e} \phi_e \mathbf{b}_e \in (\tilde{S}_h)^2,$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_h = \sum_{e=1}^{N_e} \psi_e \mathbf{c}_e = \sum_{e=1}^{N_e} \psi_e \mathbf{c}_e + \tilde{\mathbf{v}}'_h \in (\tilde{V}_h)^2 \quad (28)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}'_h = \sum_{e=1}^{N_e} \xi \mathbf{a} \cdot \nabla \phi_e \mathbf{c}_e \quad (29)$$

$$\psi_e = \phi_e + \xi \mathbf{a} \cdot \nabla \phi_e \quad (30)$$

である。次に静的縮約を行うために、式 (25) において  $\mathbf{v}_h = \psi_e \mathbf{c}_e$  とすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega}^2 \mathbf{b}_e = \tau_e A_e [\langle p_h, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} \\ & + \langle \mathbf{f}, \phi_e \rangle_{\Omega_e} - \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h, \phi_e \rangle_{\Omega_e}] \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 $\tau_e$  は前節の定常移流拡散方程式と同形のパラメータであり、次式のように表される。

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h, \bar{\mathbf{v}}_h \rangle + \nu \langle \nabla \bar{\mathbf{u}}_h, \nabla \bar{\mathbf{v}}_h \rangle \\
& - \langle p, \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_h \rangle_{\Omega_e} - \langle \mathbf{f}, \bar{\mathbf{v}}_h \rangle_{\Omega_e} \\
& + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \langle \nabla p_h, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}_h \rangle_{\Omega_e} \\
& + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}_h \rangle_{\Omega_e} \\
& - \langle \mathbf{f}, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}_h \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad (32)
\end{aligned}$$

次に、式 (25) において  $\mathbf{v}_h = \bar{\mathbf{v}}_h$  とすると、関係式 (13) を利用して次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h, \bar{\mathbf{v}}_h \rangle + \nu \langle \nabla \bar{\mathbf{u}}_h, \nabla \bar{\mathbf{v}}_h \rangle \\
& - \langle p, \nabla \bar{\mathbf{v}}_h \rangle_{\Omega_e} = \langle \mathbf{f}, \bar{\mathbf{v}}_h \rangle_{\Omega_e} \quad (33)
\end{aligned}$$

さらに、式 (31) を式 (6) に代入して要素毎に  $\bar{\mathbf{u}}_h$  を消去すると次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_h, q_h \rangle \\
& + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \left[ \frac{\langle p_h, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle q_h, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} \right] \\
& - \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \left[ \frac{\langle q_h, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle \phi_e, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} \right] \\
& = - \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \left[ \frac{\langle \mathbf{f}_h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle q_h, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} \right] \quad (34)
\end{aligned}$$

また、 $\mathbf{f}$  は要素内で定数となる関数であることを仮定し、 $p_h, q_h$  が一次関数、気泡関数  $\phi_e$  は  $C_0$  連続性を満たし要素  $\Omega_e$  の境界上であることを考慮すれば以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\langle p_h, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle q_h, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} \\
& = \langle \nabla p_h, \nabla q_h \rangle_{\Omega_e} \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\langle q_h, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle \phi_e, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} \\
& = - \langle \nabla q_h, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h \rangle_{\Omega_e} \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\langle \mathbf{f}_h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \langle q_h, \nabla \phi_e \rangle_{\Omega_e} A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} \\
& = - \langle \mathbf{f}, \nabla q_h \rangle_{\Omega_e} \quad (37)
\end{aligned}$$

以上のことを踏まえ、式 (34) は以下のように書き換えられる。

$$\langle \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_h, q_h \rangle + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \langle \nabla p_h, \nabla q_h \rangle_{\Omega_e}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h, \nabla q_h \rangle_{\Omega_e} \\
& = \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e \langle \mathbf{f}, \nabla q_h \rangle_{\Omega_e} \quad (38)
\end{aligned}$$

したがって、MINI 要素による Bubnov-Galerkin 型の定式型の定式化<sup>5)</sup> によって得られるものと同様に、安定化気泡関数を用いた Petrov-Galerkin 型の定式化によって得られた式 (33), (38) の近似式が、三角形一次要素を用いた同次補間 ( $P^1$ - $P^1$ ) を用いた流速場の上流型人工拡散および圧力場のラプラシアン作用素の導入によって安定化作用の働きをする安定化有限要素法<sup>1)~3)</sup> と等価となる。

## 2.3 安定化気泡関数

これまでに、気泡関数要素では Bubnov-Galerkin 型の定式化から静的縮約を経て得られた有限要素近似式が、安定化有限要素法<sup>1)~3)</sup> と等価な上流型の人工拡散を含む近似式となることがわかっている。このとき、全ての適合型気泡関数  $\phi_e \in H_0^1(\Omega_e)$  に対して、次式で定義される安定化パラメータ  $\tau_e$  によって気泡関数の安定化作用の強さ<sup>13)</sup> が表される。

$$\tau_e = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\nu \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 A_e} \quad (39)$$

上式における安定化パラメータ  $\tau_e$  は 2 次元、3 次元において次のような粗い安定化作用の評価式<sup>13)</sup> が得られている。

$$\tau_e = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{\nu \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 A_e} \leq \frac{h_e^2}{18\nu} \quad (40)$$

ここで、 $h_e$  は要素の代表長さである。すなわち、どのような適合型気泡関数を選んでも気泡関数要素の安定化パラメータを一定値にすることはできない。また、同次補間を用いた SUPG 法<sup>1)</sup> による安定化パラメータは次式のように表される。

$$\tau_e|_{\text{SUPG}} = \frac{h_e^2}{4\nu} \frac{\tilde{\xi}(\alpha)}{\alpha} \quad (41)$$

$$\tilde{\xi}(\alpha) = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{|\mathbf{a}| h_e}{2\nu} \quad (42)$$

ここで、 $\alpha$  は要素ペクレ数である。SUPG 法の安定化パラメータは、特に拡散が卓越する流れにおいては、 $\tau_e \rightarrow \frac{h_e^2}{4\nu}$  に収束し、式 (40) で表される安定化パラメータを用いた場合には、気泡関数による安定化作用は不足する。

一方、本研究で提案した安定化気泡関数を用い、Petrov-Galerkin 型の定式化によって得られる安定化パラメータ  $\tau_e$  は以下のように表された。

$$\tau_e = \frac{<\phi_e, 1>_{\Omega_e}^2 A_e^{-1}}{\xi \|\mathbf{a} \cdot \nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 + \nu \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2} \quad (43)$$

本研究では、SUPG 法に従い、安定化気泡関数の制御パラメータ  $\xi$  を決定することにより、人工拡散を制御するものとする。

次に、安定化気泡関数の特徴を把握するために、1次元 ( $x \in \mathbf{R}$ ) での議論をする。安定化気泡関数  $\psi_e$  の  $C_0$  連続性を満たす最も簡単な関数は、通常の気泡関数  $\phi_e$  を用いて次式のように表せる。

$$\psi_e = \phi_e + \xi a_x \phi_{e,x} \quad (44)$$

$$\phi_e = (L_1 L_2)^2 \quad (45)$$

$$L_1 = \left(1 - \frac{x}{h_e}\right), \quad L_2 = \frac{x}{h_e} \quad (46)$$

ここで、 $a_x$  は移流速度、 $L_i$  は線座標である。この場合の安定化気泡関数の安定化パラメータ  $\tau_e$  は次式のように書き直せる。

$$\tau_e = \frac{7}{120} \frac{h_e^2}{\nu'(\xi) + \nu}, \quad \nu'(\xi) = \frac{\xi a_x^2 h_e^2}{2} \quad (47)$$

このことから、安定化気泡関数要素を用いた場合には、要素の重心点のみに人工拡散  $\nu'(\xi)$  が付加されていることが分かる。

さらに、SUPG 法に従い、制御パラメータ  $\xi$  は要素ペクレ数  $\alpha$  を用いて以下の関係式を得られる。

$$\xi = \frac{1}{|a_x| h_e} \left( \frac{7}{30} \frac{1}{\xi(\alpha)} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (48)$$

つまり、制御パラメータ  $\xi$  は要素ペクレ数  $\alpha$  に応じて決定され、安定化気泡関数  $\psi_e$  の形状も変化する。図-1 に1次元における安定化気泡関数  $\psi_e$  の流れに対する形状の変化の様子を示す。 $\xi = 0$  の場合には、重み関数である安定化気泡関数  $\psi_e$  は、試行関数である気泡関数  $\phi_e$  と形状が等しくなる (図-1-(a))。移流の影響が強くなるに従って、安定化気泡関数  $\psi_e$  の形状は要素内  $h_e$  において、上流側では正の方向に、下流側では負の方向に成長する (図-1-(b))。一方、拡散の影響が強い場合には、移流卓越の場合とは逆のモードに形状が変化する (図-1-(c))。

次に移流、拡散のどちらかが局端に卓越する場合の、安定化気泡関数における安定化作用について述べる。1次元において移流が卓越する場合には式 (47) を用いて、次の関係式が得られる。

$$d_e = \xi a_x^2 = \frac{7}{30} \frac{|a_x|}{h_e} \left( \tau_e \rightarrow \frac{h_e}{2|a_x|} \right) \quad (49)$$

一方、拡散が卓越する場合には、次の関係式が得られる。

$$d_e = \xi a_x^2 = -\frac{23}{15} \frac{\nu}{h_e^2} \left( \tau_e \rightarrow \frac{h_e^2}{4\nu} \right) \quad (50)$$

ここで、 $d_e = \xi a_x^2$  は流線方向に粘性を与えるパラメータである。つまり、完全に移流が支配する流れ ( $\nu \rightarrow 0$ ) においても、拡散が支配する流れ ( $a_x \rightarrow 0$ ) においても、安定化作用が働く。このことは、2次元、3次元においても同様に議論ができ、安定化気泡関数要素の有効性を示し、安定化パラメータを任意の大きさとすることが可能となり、気泡関数要素における数値安定性の問題点を解決している。

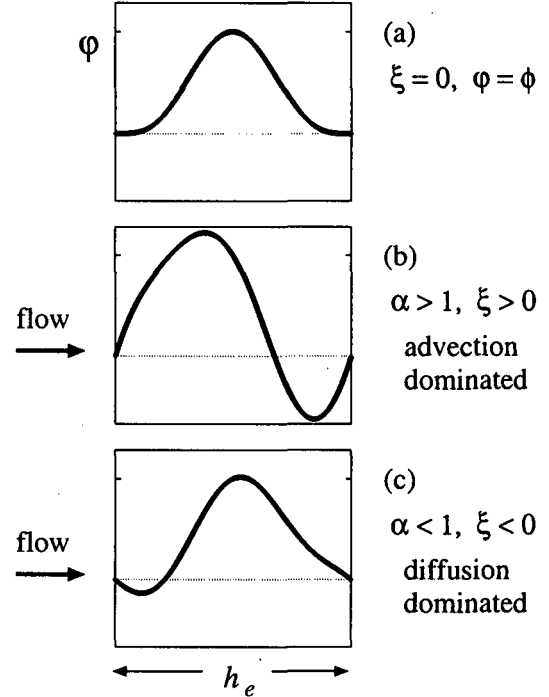


図-1 安定化気泡関数 (重み関数) の流れに対する形状の変化

以上のように、気泡関数要素における上流型の Petrov-Galerkin 型の近似式は、Bubnov-Galerkin 型の近似式において、要素の重心点のみに上流型的人工粘性が付加された近似式と等価となる。このとき現れる上流型的人工粘性は、通常の気泡関数要素の持つ安定化作用の不足を自動的に補い、適切な安定化作用を与えてくれる。また、この大きさは重み関数側の気泡関数のみの形状によって決定される制御パラメータ  $\xi$  によって与えられる。

### 3. 非定常移流拡散問題への適用

#### 3.1 基礎方程式

$\partial\Omega$  を境界とする二次元空間領域  $\Omega \in \mathbf{R}$  と時間領域  $I = [0, T]$  を定義し、領域  $\Omega \times I$  における非定常移流拡散問題を考える。流速  $u(x, t) : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}$  を未知関数とすると、非定常移流拡散方程式は、以下のよう表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u - \nu \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times I, \quad (51)$$

また、境界条件および初期条件は以下のようにする。

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times I, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (52)$$

ここで、 $a$  は移流速度、 $\nu$  は粘性係数、 $f$  はソース項である。

### 3.2 時間方向の離散化

時間方向の離散化には、時間に関して2次精度の解法である、Crank–Nicolson 法を適用する。 $u(x, t^n)$  の近似関数を  $u^n(x)$  とすると、 $u^{n+1}(x) : \Omega \rightarrow R$  を見出す次の境界値問題が得られる。

$$\frac{1}{\Delta t}(u^{n+1} - u^n) + a \cdot \nabla u^{n+\frac{1}{2}} - \nu \Delta u^{n+\frac{1}{2}} = f^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{in } \Omega, \quad (53)$$

$$u^{n+1} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (54)$$

ここで、 $u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^{n+1} + u^n)$  である。

### 3.3 安定化気泡関数と空間方向の離散化

前節で述べたように、気泡関数要素において、気泡関数の重み関数と試行関数に異なったものを用いる Petrov–Galerkin 法の考え方に基つけば、次式によって定義される安定化パラメータ  $\tau_e$  によって気泡関数  $\phi_e$  の安定化作用の強さが表される。

$$\tau_e = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2 A_e^{-1}}{\xi \|a \cdot \nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 + \nu \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2} \quad (55)$$

ここで、 $A_e$  は要素面積であり、 $\tau_e$  は SUPG 法等の安定化有限要素法で現れる安定化パラメータに等価である。また、 $\xi$  は気泡関数の重み関数  $\psi_e$  の形状を制御するパラメータであり、前節においてこれは安定化気泡関数と呼ばれ、気泡関数  $\phi_e$  を用いて以下のように表された。

$$\psi_e = \phi_e + \xi a \cdot \nabla \phi_e \quad (56)$$

式 (55) で定義される安定化パラメータ  $\tau_e$  を用いることにより、Petrov–Galerkin 法に従って空間方向の離散化を行うことが出来る。

スカラー関数  $u$  の重み関数と試行関数には、三角形一次要素に気泡関数を加えた気泡関数要素<sup>14)</sup>を用いて補間をする。気泡関数はアイソパラメトリック座標系  $\{r, s\}$  を用いて次式のように定義する。

$$\phi_e = (L_1 L_2 L_3)^2 \quad (57)$$

ここで、 $L_i$  は面積座標であり、以下のように表される。

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - r - s \\ L_2 &= r \\ L_3 &= s \end{aligned} \quad (58)$$

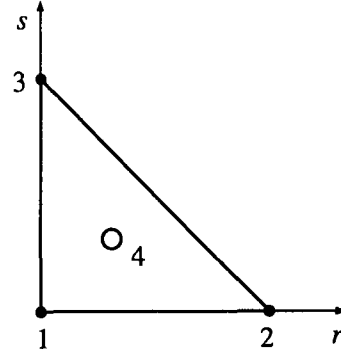


図-2 気泡関数要素 (スカラー場  $u$  の補間)

式 (53) に安定化気泡関数要素を用い、Petrov–Galerkin 近似を適用することにより、次の重み付き残差方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \langle u_h^{n+1} - u_h^n, v_h \rangle &+ \langle a \cdot \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h \rangle \\ &+ \nu \langle \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}}, \nabla v_h \rangle + \langle f^{n+\frac{1}{2}}, v_h \rangle \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \langle u_h^{n+1} - u_h^n, \xi a \cdot \nabla \tilde{v}_h' \rangle \\ &+ \langle a \cdot \nabla \tilde{u}_h^{n+\frac{1}{2}}, \xi a \cdot \nabla \tilde{v}_h' \rangle \\ &- \langle f^{n+\frac{1}{2}}, \xi a \cdot \nabla \tilde{v}_h' \rangle = 0 \quad (59) \end{aligned}$$

### 3.4 Rotating Cone の解析

本節では、一般的な移流方程式の Benchmark 問題である Rotating Cone の問題を取り上げ、本研究で提案する安定化気泡関数要素の有効性を検討する。この問題は、解析領域に定常な移流速度を仮定し、初期条件として人工的なスカラー量  $u$  を与えることにより cone の形状を決め、移流方程式により Cone 形状を解析領域内で回転させる。厳密解は cone の形状が初期形状と一致しなければならないが、数値解析においては離散化手法が持つ誤差により厳密解と等しい cone の形状は得られない。数値解析手法の持つ散逸誤差が cone の高さを減衰させ、位相誤差が cone の麓に波打ちを発生させる。また、人工粘性が適切に流線方向に入っていないければ、cone の形状が全体的に歪んでくる。このように、数値解析後の cone の形状を調べることにより、離散化手法の持つ解の特徴を把握することが出来る。

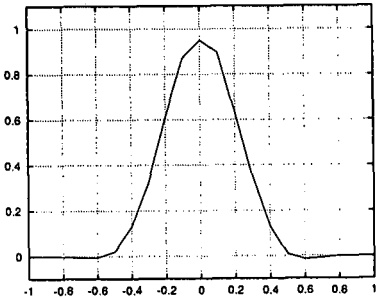
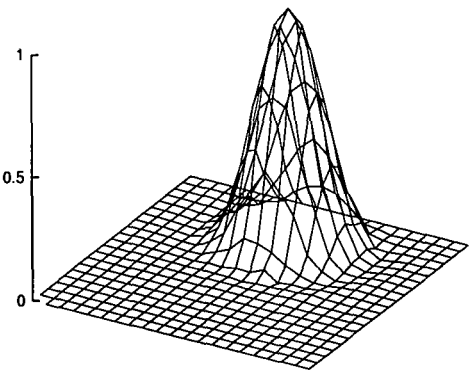
ここでは、解析領域  $(-1 \leq x_i \leq 1)$  において、定常な移流速度を  $a = (a_1 = -x_2, a_2 = x_1)$  とする。有限要素分割は、 $20 \times 20$  の均等分割である。初期条件として cone の形状を決定するスカラー量  $u$  は次式のように表される。

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} 0.5(\cos(2\pi r) + 1) & r \leq 0.5 \\ 0 & r > 0.5 \end{cases} \quad (60) \\ r &= \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 0.5)^2} \end{aligned}$$

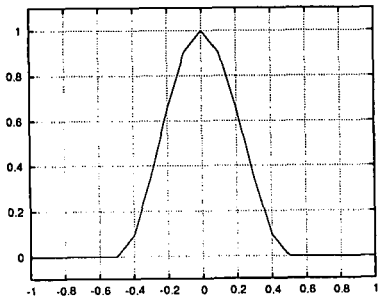
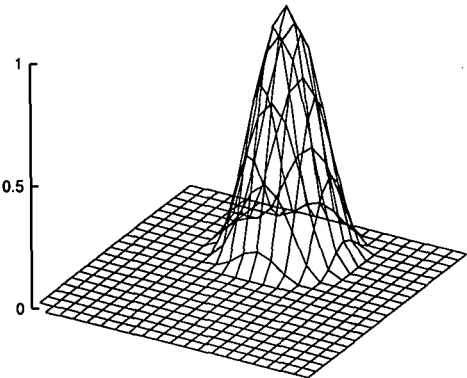
時間増分量  $\Delta t$  は、 $\Delta t = \pi/200, \pi/100, \pi/50$  の3ケースである。cone が1周するのに必要な計算ステップ数はそれぞれ、400, 200, 100 である。ここでは、比較のために SUPG 法<sup>1)</sup>による解析も行っている。

表-1 1周後のスカラー量  $u$  の比較

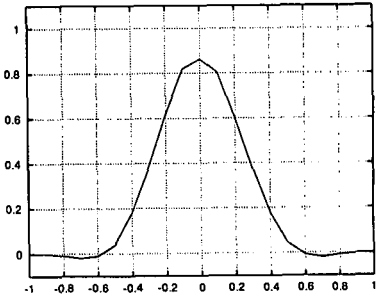
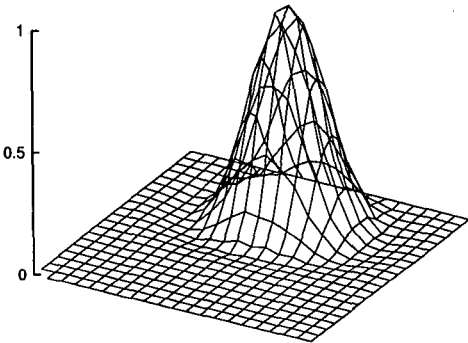
| 手法      | $\Delta t$ | $\pi/200$ | $\pi/100$ | $\pi/50$ |
|---------|------------|-----------|-----------|----------|
| 安定化気泡関数 | $u_{\max}$ | .950      | .950      | .949     |
|         | $u_{\min}$ | -.017     | -.019     | -.031    |
| SUPG 法  | $u_{\max}$ | .862      | .863      | .864     |
|         | $u_{\min}$ | -.021     | -.020     | -.022    |



安定化気泡関数



初期条件



SUPG 法

図-3 Rotating Cone の計算結果 ( $\Delta t = \pi/200$ )

表-1 にスカラー量  $u$  の最大値  $u_{\max}$  と最小値  $u_{\min}$  の比較を示す。厳密解では、 $u_{\max} = 1$ ,  $u_{\min} = 0$  となる。なお、ここでは連立一次方程式の解法に、行列の記憶に Element-by-Element 法を用い、非対称行列について Bi-CGSTAB 法を用いた。図-3 は、 $\Delta t = \pi/200$  のときの cone の 1 周後の形状と  $x_2 = 0.5$  における cone の断面図を示す。

スカラー量の最大値  $u_{\max}$  を見るとどちらのケースも時間増分量  $\Delta t$  に依存しにくい結果を示している。安定化気泡関数を用いた場合、SUPG 法よりも解の減衰が小さく、厳密解 1 に近い結果を示している。最小値  $u_{\min}$  を見ると、 $\Delta t = \pi/50$  のケース以外では安定化気泡関数の法が SUPG 法よりも誤差が少ない。この最小値  $u_{\min}$  に示す誤差は、解の位相誤差に対応するものである。1 周後の cone の形状を見ると、SUPG 法は cone の初期値と比べて、裾が広がっており、先端も鈍角になっている。安定化気泡関数では、cone の後方に若干のくぼみが見えるが、最も初期値に近い形状をしている。このように、安定化気泡関数要素を用いた手法は、定常問題においては SUPG 法と等価であるが、非定常問題においては SUPG 法よりも優れた結果を示す。

#### 4. 非定常 Navier-Stokes 方程式への適用

$\partial\Omega$  を境界とする二次元空間領域  $\Omega \in \mathbf{R}$  と時間領域  $I = [0, T]$  を定義し、領域  $\Omega \times I$  は非圧縮粘性流体で満たされているものとする。非圧縮粘性流れの基礎方程式は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式であり、流速  $u(x, t) : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}^2$  と圧力  $p(x, t) : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}$  を未知関数とすると、無次元化された非圧縮 Navier-Stokes 方程式における運動方程式と連続式は、以下のように表せる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \text{in } \Omega \times I, \quad (61)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega \times I. \quad (62)$$

ここで、 $\nu$  は粘性係数で  $1/Re$  を示し、 $Re$  は Reynolds 数であり、 $f$  はソース項である。また、境界  $\partial\Omega$  は、 $\partial\Omega_1$  と  $\partial\Omega_2$  に分けられ、境界条件は以下のように規定される。

$$u = \hat{u} \quad \text{on } \partial\Omega_1 \times I, \quad (63)$$

$$\{-p\delta + \nu \nabla u\} \cdot n = \hat{t} \quad \text{on } \partial\Omega_2 \times I, \quad (64)$$

ここで、 $\delta$  は単位テンソル、 $n$  は境界  $\partial\Omega$  の外向きの法線ベクトルである。

#### 4.1 時間方向の離散化

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分量を大きくとれる陰的解法を適用する。運動方程式 (61) には、時間に関して二次精度である Crank-Nicolson 法を適用し、連続式 (62) は完全陰的に表す。 $u(x, t^n)$  の近似を  $u^n(x)$  とし、 $p(x, t^n)$  の近似を  $p^n(x)$  と表現すれば、 $u^{n+1} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $p^{n+1} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を未知関数とする次の境界値問題に帰着される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u^{n+1} - u^n) + u^* \cdot \nabla u^{n+\frac{1}{2}} - \nu \Delta u^{n+\frac{1}{2}} \\ + \nabla p^{n+1} = f^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (66)$$

ここで、 $u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^{n+1} + u^n)$ ,  $u^* = \frac{1}{2}(3u^n - u^{n-1})$  である。移流速度には二次精度 Adams-Bashforth 公式により  $u^*$  を線形近似している。この問題において、時間増分量  $\Delta t$  及びソース項  $f^{n+\frac{1}{2}}(x) = f(x, t^{n+\frac{1}{2}})$  は与えられているものとする。このようにして得られたスキームは、二次精度を有する線形スキームとなる。

#### 4.2 分離型法

運動方程式 (65) と連続式 (66) に対して、分離型法<sup>16)</sup>を適用する。分離型法は、圧力 Poisson 方程式を導くことによって流速場と圧力場を分離して解くことが可能で、安定性と計算効率面に優れている。ここでは、SMAC 法、SIMPLE 法、また Hayashi らの A 法<sup>16)</sup>に準じ、連続式 (66) を完全に満足しない中間流速  $\tilde{u}$  を導出してから圧力 Poisson 方程式を導くアルゴリズムを導出する。前時間ステップの圧力  $p^n$  を近似的な圧力として、運動方程式 (65) の圧力を  $p^n$  に置き換えると、運動方程式 (65) は、未知流速  $u^{n+1}$  を中間流速  $\tilde{u}^{n+1}$  に置き換えることにより、次式のように書き表せる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\tilde{u}^{n+1} - u^n) + u^* \cdot \nabla \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} - \nu \Delta \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} \\ + \nabla p^n = f^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (67)$$

さらに、式 (65) と式 (67) の差をとることにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}) + \frac{1}{2}u^* \cdot \nabla(u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}) \\ - \frac{1}{2}\nu \Delta(u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}) + \nabla(p^{n+1} - p^n) = 0 \\ \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (68)$$

式 (68) の発散をとり、式 (66) を代入することにより圧力 Poisson 方程式が得られる。ただし、流速  $u^{n+1}$  は未知量なので、 $u^{n+1} \simeq \tilde{u}^{n+1}$  と近似している。

$$\Delta t \Delta(p^{n+1} - p^n) = \nabla \cdot \tilde{u}^{n+1} \quad \text{in } \Omega. \quad (69)$$

このアルゴリズムは、式 (67)  $\Rightarrow$  式 (69)  $\Rightarrow$  式 (68) となる。定常状態に収束する問題では、中間流速  $\tilde{u}$  が流速  $u$  に収束し、 $p^{n+1} - p^n \rightarrow 0$  となり、定常収束問題では式 (69) が連続式 (62) に収束するため、連続条件が時間増分量  $\Delta t$  に依存しない。空間方向の離散化のとき、同次補間を用いると、安定化の働きをする項が存在しないため、解が不安定になる。よって、この分離型法のアルゴリズムを用いる場合、混合補間が必要となる。

#### 4.3 安定化気泡関数と空間方向の離散化

空間方向の離散化には、流速場の補間関数には気泡関数要素を用い、圧力場の補間関数には三角形一次要素を用いた MINI 要素 (図-4) による混合型有限要素法の解析手法を適用する。気泡関数による混合補間を用いた場合の離散化には、通常の Galerkin 法を用いる。

本研究では、気泡関数の安定化パラメータに安定化気泡関数を用いた Petrov-Galerkin 法の考え方に基づいて導出される以下の関係式を用いる。

$$\tau_e = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2 A_e^{-1}}{\xi \|u^* \cdot \nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2 + \nu \|\nabla \phi_e\|_{\Omega_e}^2} \quad (70)$$

この安定化パラメータを用いた MINI 要素における通常の Galerkin 近似式は、安定化気泡関数を用いた Petrov-Galerkin 近似式と等価となる。また、気泡関数はアイソパラメトリック座標系  $\{r, s\}$  を用いて次式のように定義する。

$$\phi_e = (L_1 L_2 L_3)^2 \quad (71)$$

ここで、 $L_i$  は面積座標であり、以下のように表される。

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - r - s \\ L_2 &= r \\ L_3 &= s \end{aligned} \quad (72)$$

式 (66), (68), (67) に安定化気泡関数要素を用い、Petrov-Galerkin 近似を適用すると、重み付き残差方程式は、それぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \langle \tilde{u}_h^{n+1} - u_h^n, v_h \rangle + \langle u_h^* \cdot \nabla \tilde{u}_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h \rangle \\ & - \langle p_h^n \delta, \nabla v_h \rangle + \nu \langle \nabla \tilde{u}_h^{n+\frac{1}{2}}, \nabla v_h \rangle \\ & + \frac{1}{\Delta t} \langle \tilde{u}_h^{n+1} - u_h^n, \xi u_h^* \cdot \nabla \tilde{v}_h' \rangle \\ & + \langle u_h^* \cdot \nabla \tilde{u}_h^{n+\frac{1}{2}}, \xi u_h^* \cdot \nabla \tilde{v}_h' \rangle \\ & = \langle f^{n+\frac{1}{2}}, v_h \rangle + \langle f^{n+\frac{1}{2}}, \xi u_h^* \cdot \nabla \tilde{v}_h' \rangle \end{aligned} \quad (73)$$

$$\Delta t \langle \nabla(p_h^{n+1} - p_h^n), \nabla q_h \rangle = - \langle \nabla \cdot \tilde{u}_h^{n+1}, q_h \rangle \quad (74)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \langle u_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}, v_h \rangle \\ & + \frac{1}{2} \langle u_h^* \cdot \nabla(u_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}), v_h \rangle \\ & + \frac{1}{2} \nu \langle \nabla(u_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}), \nabla v_h \rangle \\ & - \langle (p_h^{n+1} - p_h^n) \delta, \nabla v_h \rangle \\ & + \frac{1}{\Delta t} \langle u_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}, \xi u_h^* \cdot \nabla \tilde{v}_h' \rangle \\ & + \frac{1}{2} \langle u_h^* \cdot \nabla(\tilde{u}_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}), \xi u_h^* \cdot \nabla \tilde{v}_h' \rangle = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

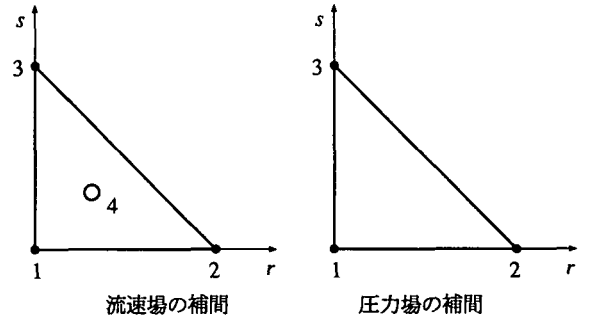


図-4 MINI 要素

式 (66), (68), (67) に

#### 4.4 Standing Vortex Problem

一つ目の数値解析例として、Standing Vortex Problem<sup>3)15)</sup> を取り上げる。Standing Vortex Problem は、非粘性流れ ( $\nu = 0$ ) を設定し、初期条件として人工的な流速分布を発生させ計算を進め、その流れの運動エネルギー及び渦度分布の時刻歴変化を見る。厳密解は初期条件そのものであるが、適切な数値粘性が離散化手法によって与えられていなければ、解は減衰もしくは発散する。その離散化手法が安定なものであれば、解は必ず減衰する。この Standing Vortex Problem を通じてわれわれは、離散化手法の持つ数値的な散逸誤差を定性的に評価することができる。

解析領域は図-5 に示す。この領域を  $20 \times 20$  の均等な有限要素 (図-6) に分割する。初期条件は図-5 に示してある極座標  $\{r, \theta\}$  を用いて、次式のように定義する。

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \begin{cases} 5r & r < 0.2 \\ 2 - 5r & 0.2 < r < 0.4 \\ 0 & r > 0.4 \end{cases} \quad (76)$$

流速分布の初期条件を図-7 に示す。時間増分量  $\Delta t$  は、 $\Delta t = 0.001, 0.005, 0.001$  である。計算時間は  $t = 3$  になるまでそれぞれの計算ステップ数を行う。

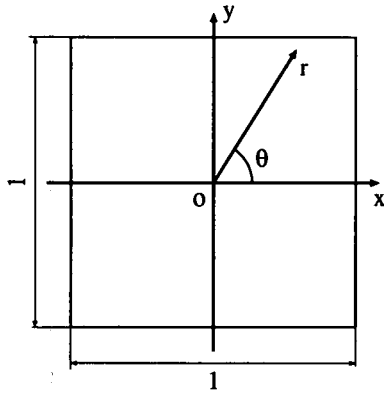


図-5 Standing Vortex Problem の解析領域

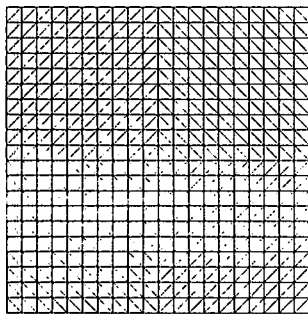


図-6 有限要素分割

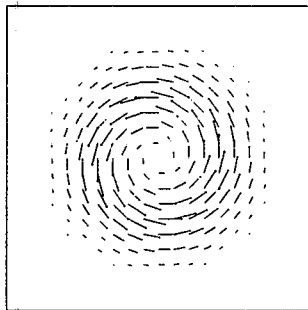


図-7 Standing Vortex Problem の流速分布の初期条件

初期の渦の減衰を調べる指標は、流速の  $L^2$  ノルム  $\|u_h\|_2$  で評価した運動エネルギーである。これが最終的  $t = 3$  にどの程度のエネルギー減衰があるかを調べるにより数値的な散逸誤差を評価し、各手法の比較を行っている。表-2 に各離散化手法の  $t = 3$  までの運動エネルギーの相対変化を示す。図-8 に運動エネルギーの時刻歴を示す。すべての計算結果において、他の手法<sup>3)</sup> に比べて散逸誤差が少なく、時間増分量にほとんど依存していない。この結果から、本手法は適切な数値粘性を与えていることがわかる。

表-2 運動エネルギーの相対変化 ( $t = 3.0$ )

| $\Delta t$ | 0.001 | 0.005 | 0.01  |
|------------|-------|-------|-------|
| 運動エネルギー    | 0.935 | 0.935 | 0.934 |

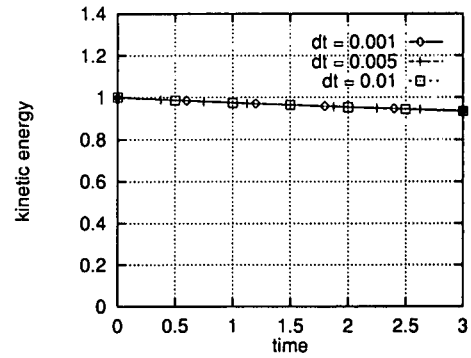


図-8 運動エネルギーの時刻歴

#### 4.5 Cavity 内の流れ

二つ目の数値解析例として、Cavity 内の流れの解析を行う。Cavity 内の流れの解析は、非圧縮粘性流れ解析において定常収束解を与える問題であり、定常解に対する離散化手法の検証問題としてしばしば数値解析例として用いられる。Cavity 内の流れの解析を通じて、本手法の特徴を把握することを目的とする。ここでは、Reynolds 数は変化させず、本手法の時間増分量及び有限要素分割に関する依存性を調べる。

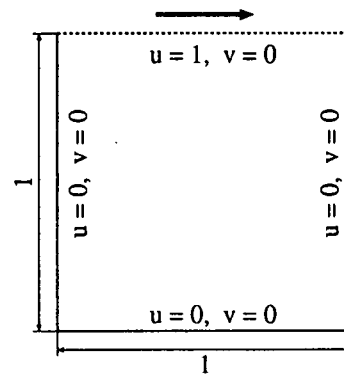


図-9 Cavity 内の流れの解析領域および境界条件

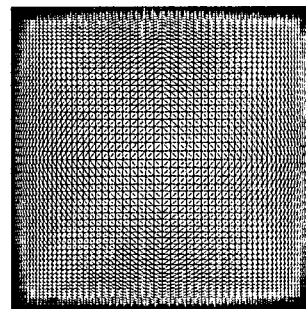
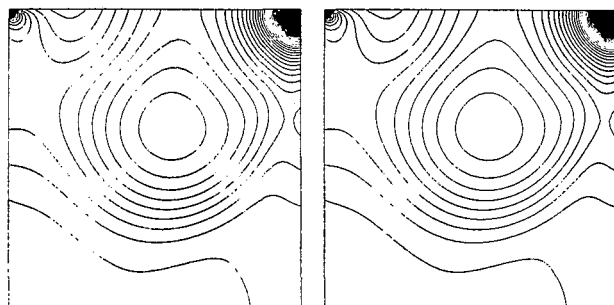


図-10 有限要素分割 ( $64 \times 64$  の不均等メッシュ)

解析領域及び境界条件を 図-9 に示す。Reynolds 数は  $Re = 400$  とし、図-10 に示すように有限要素分割には  $64 \times 64$  の不均等分割を行ったメッシュを用いた。計算は解が定常状態に収束するまで行った。時間増分量  $\Delta t$  は  $\Delta t = 0.01, 0.001$  の 2 ケースを用い、図-11 にそれぞれの圧力コンター図を示す。



Δt = 0.01 Δt = 0.001

図-11 圧力コンター ( $Re = 400$ )

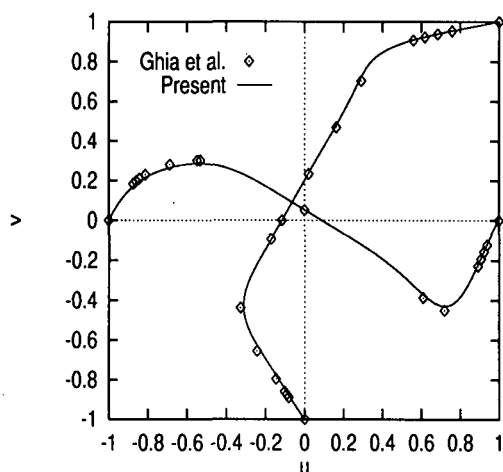
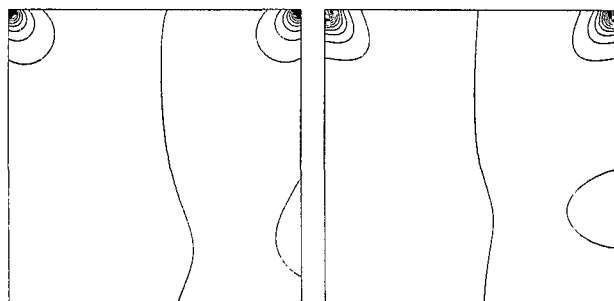


図-12 Velocity profiles along center lines ( $Re = 400$ )

図-11の圧力コンター図を見ると、解がほとんど時間増分量  $\Delta t$  に依存していないことがわかる。また、図-12に、領域の中心軸上の流速分布を示す。この結果 ( $\Delta t = 0.01$ ) は、Ghia らの結果<sup>17)</sup> によく対応している。このことから、不均等分割における気泡関数の安定化作用の効果が確認できる。



安定化気泡関数 正規化気泡関数

図-13  $Re = 0.5$  の圧力コンター

また、 $Re = 0.5$  の場合について、本手法の安定化気泡関数要素を用いた時の圧力コンター図と、正規化気泡関数要素<sup>9)10)</sup> を用いた時のものを示す(図-13)。正規化気泡関数を用いた場合には、特異点近傍において圧力の空間振動が見られるが、安定化気泡関数要素を用いた場合には圧力の振動は見られない。このように、安定化気泡関数要素を用いた場合には拡散が卓越する流れにおいても適切な数値粘性が与えられることが分かる。

## 5. おわりに

本研究では、安定化気泡関数要素を用いた Petrov-Galerkin 法の考え方にに基づき、新しい気泡関数要素を提案した。この気泡関数を用いた場合、気泡関数要素の重心点のみに上流型の人工拡散が付加された Bubnov-Galerkin 型の近似式と等価となる。このとき現れる安定化作用の大きさは、重み関数側の気泡関数の形状によって決定される制御パラメータによって自動的に与えられる。本手法の特徴は以下のようにまとめられる。

1. 従来の気泡関数要素に比べ、十分小さなセル Reynolds 数においても十分に数値粘性が入る。
2. 散逸誤差が非常に小さく、圧力解の振動が見られない。
3. 解の  $\Delta t$  に関する依存性はほとんど見られず、特に定常解においては全く見られない。
4. 有限要素分割に依存せず、安定化作用を与える。

## 参考文献

- 1) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. : Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.32, pp.199~259, 1982.
- 2) Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodationig equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.59, pp.85~99, 1986
- 3) Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.95, pp.221~242, 1992.
- 4) Brezzi, F., Bristeau, M.O., Mallet, M. and Roge, G. : A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.96, pp.117~129, 1992.
- 5) Pierre, R.: Simple  $C^0$  approximation for the computation of incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.68, pp.205~227, 1988.
- 6) Franca, L.P. and Farhat, C.: Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods, *COMput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.123, pp.299~259, 1995.
- 7) Baicocchi, C., Brezzi, F. and Franca, L.P. : Virtual bubbles Galerkin-Least-Squares type method (Ga.L.S.), *Compt. Methods Appl Mech. Engrg.*, Vol.105, pp.125~141, 1993.
- 8) Arnold, D.N., Brezzi, F. and Fortin, M.: A stable finite element for the Stokes equation, *Calcolo*, Vol.23, 337~344, 1984.
- 9) Yamada, T.: A bubble element for inviscid flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.9, pp.1567~1576, 1995.

- 10) Yamada, T.: A bubble element for the compressible Euler equations, *IJCFD*, Vol.9, pp.273~283, 1998.
- 11) Pierre, R.: Optimal selection of the bubble function in the stabilization of the  $P_1$ - $P_1$  element for the Stokes problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.32, pp.1210~1224, 1995.
- 12) Hughes, T.J.R.: Multiscale phenomena: Green's function. the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origin of stabilized methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.127, pp.387~401, 1995.
- 13) Simo, J.C., Armero, F. and Taylor, C.: Galerkin finite element methods with bubble for advection dominated incompressible Navier-Stokes, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.38, 1475~1506, 1995.
- 14) Fortin, M. and Fortin, A.: Newer and newer elements for incompressible flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.6, John Wiley & Sons Ltd., pp.171~187, 1985.
- 15) Gresho, P.M. and Chan, S.T.: Semi-consistent mass matrix techniques for solving the incompressible Navier-Stokes equations, *Lawrence Livermore National Laboratory*, Preprint UCRL-99503, 1988.
- 16) Hayashi, M., Hatanaka, K. and Kawahara, M.: Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.13, pp.895~840, 1991.
- 17) Ghia, U., Chia, K.N. and Shin, C.T.: High resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, Vol.43, pp.347~411, 1982.

(1999 年 4 月 23 日 受付)