応用力学論文集Vol.2,PP.171-175（1999年8月）　　　　土木学会

重調和微分作用素を伴う問題に対する計算点解析法の適用について

Application of Computing Point Method to the Problem with Biharmonic Differential Operator

神谷紀生*　許松青**
Norio KAMIYA and Song Qing XU

*非会員　工博　名古屋大学教授　情報文化学部（464-8601 名古屋市千種区不老町）
**非会員　学術博　名古屋大学大学院人間情報学研究科（464-8601 名古屋市千種区不老町）

In this paper, an application of the computing point method, proposed by the authors for boundary only computation of nonlinear and inhomogeneous problem by boundary element method, is presented to the problem with biharmonic differential operator. The original problem is decomposed into a system of simultaneous differential equations with similar harmonic operator and then boundary element formulation is employed. Nonlinear and/or inhomogeneous terms multiplied by the fundamental solution are converted into domain integrals. Solution procedure and example computation are shown for two-dimensional problems.

Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Biharmonic Equation

1. はじめに

境界要素法は，境界だけを要素に分けて解析する数値解析法であり，現在広く用いられている有限要素法，あるいは差分法のような領域型の解析法に比べて，種々の利点をもっている．しかしながら，非線形方程式あるいは非同次方程式によって与えられる問題においては，境界だけの要素分割では扱うことができない．その理由は，問題を積分方程式によって定式化したとき，非同次項，非線形項に関する領域積分が現れるからである．このため，このような問題を境界分割だけで可能にする方法を構築するための研究が精力的に行われた．これらの研究は，過去約15年間にわたる境界要素法に関する研究の主要なテーマであった．その結果，2重相反法 (DRM) [1]あるいは多重相反法 (MRM) [2]などが提案された．これらは一定の成果はあげたが，種々の問題が残されて現在に至っている．

同様の目的で，許・神谷 [3-5]は，計算点解析法と名付けられた別の方法を提案した．これは従来のDRM，MRMに見られる問題を解決できる方法として注目されている．さらにこの方法は大きい拡張性を備えている．そこで，本研究では重調和作用素を伴う問題へ計算点解析法を応用する方法を示す．

2. 重調和作用素を伴う非同次／非線形問題における計算点解析法

計算点解析法の詳細は文献 [3-5]に示されている．方法の主要な点は，非同次項あるいは非線形項を，未知係数を伴う座標の多項式によって表し，これらに関連する領域積分を境界積分に変換し，積分方程式を境界だけで表現することである．なお，上記の未知係数は，境界上および領域内部にとった計算点で最小2乗法によって平均的に決定される．

重調和作用素に関する基本解は知られているので，調和作用素について展開された計算点法を同様に応用することは原理的には可能であるが，良く知られているように，重調和問題では境界関数値に関する積分方程式だけでは問題を解くことはできない．したがって，追加の方程式として，境界関数値の微係数に関する積分方程式が用いられる．このとき，基本解の高次導関数の特異性が問題になることは，重調和問題の典型例である板曲げ解析において広く知られている．

そこで以下では，重調和作用素の問題を調和作用素に関する連立方程式とみなして，後者に関して確立された方法を用いて解析を可能にする方法を考える．

3. 積分方程式の定式化

2次元の閉領域において，次のような重調和作用素を伴う非同次／非線形問題を考える：

$$\nabla^4 u(x,y) + b(x,y,u) = 0 \qquad (1)$$

ここで，未知関数uを

$$\nabla^2 u(x,y) \equiv v \tag{2}$$

と表わすことによって，式(1)はPoisson方程式の連立方程式として扱うことができる．

$$\nabla^2 u(x,y) = v(x,y) \tag{3}$$

$$\nabla^2 v(x,y) + b(x,y,u) = 0 \tag{4}$$

式(3)の右辺を非同次項とみなし，式(4)の非同次項bとともにこれらを多項式表示する．

$$v(x,y) = \sum_{j=0}^{14} c_{vj} r_j \tag{5}$$

$$b(x,y,u) = \sum_{j=0}^{14} c_{bj} r_j \tag{6}$$

ここで，r_jはx, yに関する4次までの完全多項式の各項，すなわち$1, x, y, x^2, \cdots, y^4$ をとるものとする．

式(3), (4)に Laplace 方程式の基本解を用いて積分方程式に変換する．このとき非同次項に関連する領域積分は式 (5), (6)のように表されているから，境界積分に変換できる．これらの境界積分方程式を一定要素により離散化する．ソース点をn個の境界選点，m個の内部選点にとって考えれば，次のような方程式系を得る：

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq} + \mathbf{Dc}_v \tag{7}$$

$$\mathbf{Hv} = \mathbf{Gp} + \mathbf{Dc}_b \tag{8}$$

$$2\pi\mathbf{u}' + \mathbf{H}'\mathbf{u} = \mathbf{G}'\mathbf{q} + \mathbf{D}'\mathbf{c}_v \tag{9}$$

$$2\pi\mathbf{v}' + \mathbf{H}'\mathbf{v} = \mathbf{G}'\mathbf{p} + \mathbf{D}'\mathbf{c}_b \tag{10}$$

ここで，q, pはそれぞれu, vの境界外向き法線方向の導関数である．$\mathbf{u}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}'$ は，境界選点上のu, qおよび内部選点上のuのベクトル，境界上のv, pおよび内部選点上のvのベクトルである．$\mathbf{c}_b$, $\mathbf{c}_v$ はc_{bj}, c_{vj} のベクトルであり，$\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}'$, $\mathbf{G}'$, $\mathbf{D}'$ などはそれらの係数行列である．

式(8), (10)および境界条件により，境界未知数と内部のv'はc_{bj}の関数として表わすことができる．非同次項bの未知係数$c_{b0} \sim c_{b14}$を最小2乗法によって決定することで，式(4)における境界点と内部点の未知の値を得る．境界上および領域内部のvの値がわかったことで，非同次項vの未知係数$c_{v0} \sim c_{v14}$を最小2乗法によって決定することができる．以下同様の手順で式(3)における境界点と内部点の未知の値を得る[3-5].

4. 計算プロセス

この方法によって解を決定するプロセスはつぎのようになる：

1) 未知数uを仮定する（ただし内部ではu', 境界上ではu）.
2) これを用いて， 境界計算点および内部計算点でのこれらの値から，最小2乗法により，多項式近似の係数c_bを決定する.
3) 式(8), (10)により，vおよびpを求める.
4) この結果に基づき，2) と同様に係数 c_v を決定する.
5) 式(7), (9)により，uおよびqを求める.
6) 求められたuを先に仮定した値と比較して，それらの差が十分小さければ，計算を終了し，そうでなければ2)へ戻って計算を繰り返す.

なお，非同次項に未知数が含まれない場合は，1)は必要無いし，また反復計算も行わずに解を得ることができる．上記のプロセスを図1の流れ図に示す.

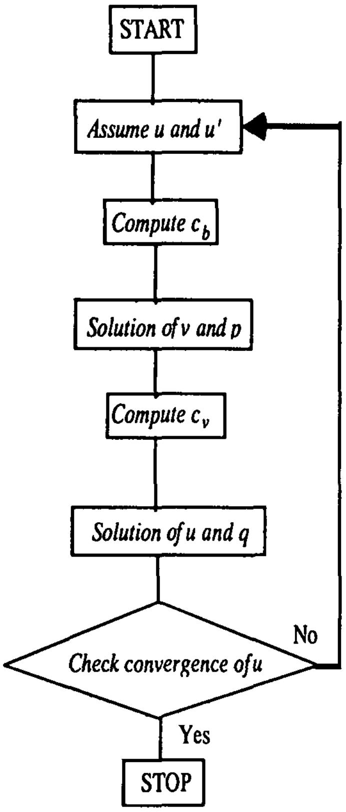

図1. 計算の流れ

5. 計算例と検討

図2に示す正方形領域の問題を考える．非同次項がつぎのように与えられるものとする：

$$1)\ b(x,y) = \sin\pi x \sin\pi y$$

$$2)\ b(x,y,u) = ku(x,y) + \sin\pi x \sin\pi y$$

1)の場合は非同次項が既知関数，2)の場合は未知関数を含む問題である．なお，k は定数であり，

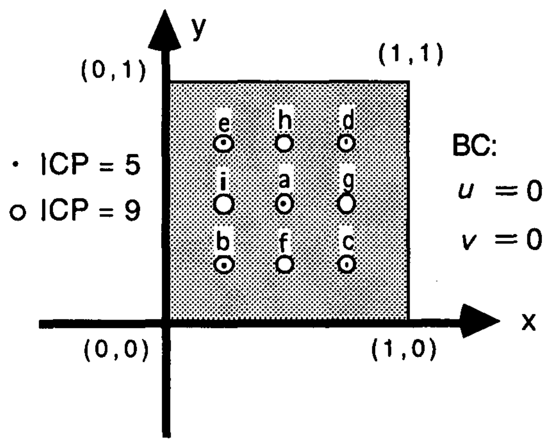

図2. 計算例題

境界条件はすべての境界において$u = 0$, $v = 0$と仮定する．このとき解析解はそれぞれつぎのように与えられる：

$$1)\ u = -\frac{1}{4\pi^4}\sin\pi x \sin\pi y$$

$$2)\ u = -\frac{1}{4\pi^4 + k}\sin\pi x \sin\pi y$$

境界要素としては直線で表わされる一定要素を用い，各辺ごとに8あるいは16個の要素によって離散化する．境界計算点(BCP)は等間隔に$\bar{n} =$ 16個とし，内部計算点 (ICP)は図2に示すように$m = 5$, 9個とした．境界要素（n個）と内部計算点（m個）の組合わせ，（n, m）=(16, 5), (32, 5), (16, 9), (32, 9)の4種類の場合の結果を求めた．図3は，求められたqおよびpを$x = [0, 1]$の境界に沿って，解析解と比較して示したものである．これらの結果には大きな違いがなく，図の上で区別できない．数値解と解析解の相対誤差を図4に拡大して示す．境界要素の数が変わっても計算結果に大きな違いはないが，ICPが5の場合に比べ，9の場合には計算の精度が高くなることがわかる．なお，正方形のかどの近くだけに他の位置とは違って，比較的大きい誤差が生じている．これはかどにおいて法線方向の導関数が不連続に変化することに原因がある．

表1, 2には，領域内部でのu'とv'の計算結果とそれらの解析解との相対誤差を示してある．この結果からも，内部計算点が多いほうが精度が高いことがわかる．

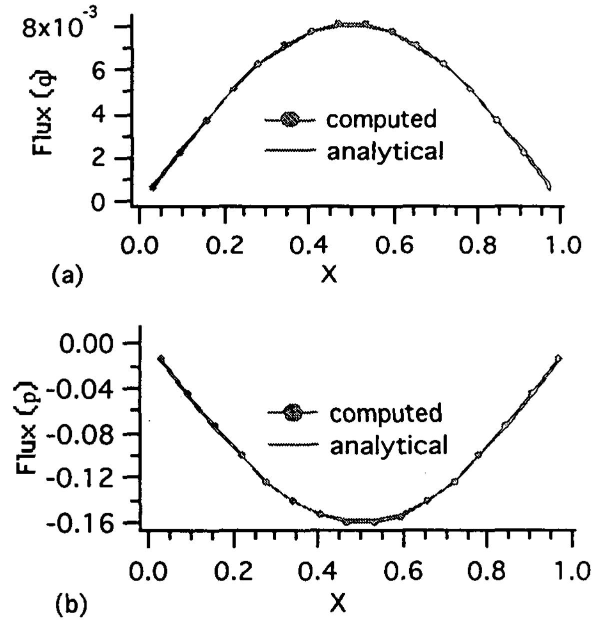

図3. 計算結果(a)q，(b)p

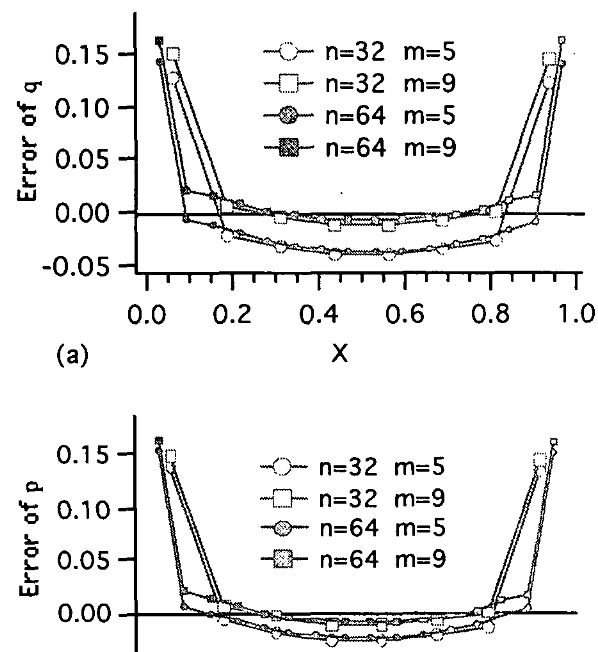

図4. 計算誤差(a)q，(b)p

表1. u' の計算結果と誤差

	n=32 m=5	Error	n=32 m=9	Error	n=64 m=5	Error	n=64 m=9	Error
a	-2.61e-03	-2.0e-02	-2.54e-03	6.9e-03	-2.61e-03	-1.7e-02	-2.53e-03	1.0e-02
b	-9.10e-04	-2.6e-02	-8.86e-04	6.3e-04	-9.10e-04	-2.6e-02	-8.84e-04	1.9e-03
c	-9.10e-04	-2.6e-02	-8.86e-04	6.3e-04	-9.10e-04	-2.6e-02	-8.84e-04	1.9e-03
d	-9.10e-04	-2.6e-02	-8.86e-04	6.3e-04	-9.10e-04	-2.6e-02	-8.84e-04	1.9e-03
e	-9.10e-04	-2.6e-02	-8.86e-04	6.3e-04	-9.10e-04	-2.6e-02	-8.84e-04	1.9e-03
f			-1.50e-03	-2.3e-05			-1.50e-03	2.5e-03
g			-1.50e-03	-2.3e-05			-1.50e-03	2.5e-03
h			-1.50e-03	-2.3e-05			-1.50e-03	2.5e-03
i			-1.50e-03	-2.3e-05			-1.50e-03	2.5e-03

表2. v' の計算結果と誤差

	n=32 m=5	Error	n=32 m=9	Error	n=64 m=5	Error	n=64 m=9	Error
a	5.115e-02	-9.6e-03	5.039e-02	5.2e-03	5.107e-02	-8.1e-03	5.027e-02	7.6e-03
b	1.776e-02	-1.4e-02	1.750e-02	-4.1e-05	1.777e-02	-1.5e-02	1.750e-02	6.0e-05
c	1.776e-02	-1.4e-02	1.750e-02	-4.1e-05	1.777e-02	-1.5e-02	1.750e-02	5.9e-05
d	1.776e-02	-1.4e-02	1.750e-02	-4.3e-05	1.777e-02	-1.5e-02	1.750e-02	5.7e-05
e	1.776e-02	-1.4e-02	1.750e-02	-4.0e-05	1.777e-02	-1.5e-02	1.750e-02	5.9e-05
f			2.981e-02	-1.3e-03			2.978e-02	-1.8e-04
g			2.981e-02	-1.3e-03			2.978e-02	-1.8e-04
h			2.981e-02	-1.3e-03			2.978e-02	-1.8e-04
i			2.981e-02	-1.3e-03			2.978e-02	-1.8e-04

つぎに，非同次項が未知関数を含む場合の計算を行った．境界上のuは境界条件により与えられているものとすれば，領域内部のu'は未知数である．したがって，前項とは違って，あらかじめ仮定した値から収束値を求める方法をとる．u'の初期値を仮定して，係数c_b, c_vを最小2乗法によって決定するプロセスにおいて反復計算を行いながら，全体として解が収束するまで計算を続ける．c_b, c_vが決まればそれを用いて，境界上および領域内部の未知数が決定される．

境界要素数，内部計算点が$n = 64$, $m = 9$のとき，u'の初期値を0，反復計算におけるu'の収束条件を10^{-6}として3回の反復計算を行い，それをもとにqを求めた結果を図5に示した．表3は，内部計算点におけるu'とv'の値とその相対誤差を示してある．前の例題と同様に，かどに近いところを除き精度の高い解が得られている．

表3. u', v' の計算結果と誤差

	u'	Error	v'	Error
a	-2.53e-03	1.0e-02	5.02e-02	7.6e-03
b	-8.84e-04	1.9e-03	1.74e-02	6.1e-05
c	-8.84e-04	1.9e-03	1.74e-02	8.7e-05
d	-8.84e-04	1.9e-03	1.74e-02	6.8e-05
e	-8.84e-04	1.9e-03	1.74e-02	5.1e-05
f	-1.50e-03	2.5e-03	2.97e-02	-1.8e-04
g	-1.50e-03	2.5e-03	2.97e-02	-1.8e-04
h	-1.50e-03	2.5e-03	2.97e-02	-1.9e-04
i	-1.50e-03	2.5e-03	2.97e-02	-1.6e-04

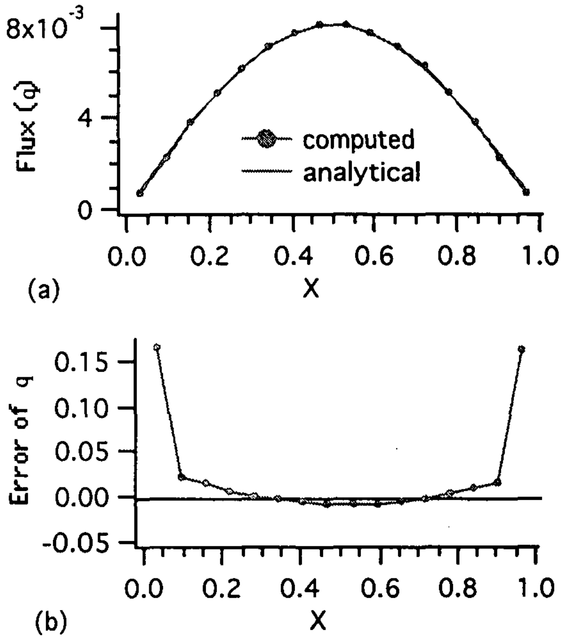

図5. (a) q の計算結果, (b) 誤差

6. まとめ

非同次項あるいは非線形項を伴う重調和方程式の問題を境界だけの離散化によって解析する方法を示した．例題の解析により，非同次項が既知関数で与えられる場合，未知関数を含む場合ともに有効な解析が可能であることがわかった．境界条件が未知関数およびその1階の微係数で与えられる場合においても同様な計算ができる．

謝辞：計算データ作製に協力された山口洋行君（名古屋大学情報文化学部学生）に感謝する．

文献

1．P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method,* Comp. Mech. Pub., 1992
2．A. J. Nowak and A. C. Neves, eds., *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method,* Comp. Mech. Pub., 1994
3．神谷・許，非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法，日本機械学会論文集 (A), Vol .64, pp. 147-154, 1998
4．許・神谷，非同次・非線形問題に対する境界要素の一定式と解法（続報：未知関数の導関数を含む非同次項の場合），日本機械学会論文集(A), Vol. 64, pp. 1341-1347, 1998
5．許・神谷，計算点解析法による境界要素法のためのアダプティブ境界要素，日本機械学会論文集 (A), Vol. 64, pp. 1598-1595, 1998

(1999 年 4 月 23 日 受付)