

境界要素法による非線形水波の数値シミュレーション

Numerical Simulation of Nonlinear Water Wave by Boundary Element Method

杉野隆三郎*・登坂宣好**

Ryuzaburo SUGINO and Nobuyoshi TOSAKA

*非会員 工博 阿南工業高等専門学校助教授 専攻科 (〒774-0017 徳島県阿南市見能林町青木265)

**非会員 工博 日本大学教授 生産工学部数理工学科 (〒275-0006 千葉県習志野市泉町1-2-1)

This paper discusses the boundary element method with use of new scheme and procedure applied to numerical simulation of non-linear water wave motions in a tank with wave maker. The methods based on the mixed Lagrangian-Eulerian scheme and direct differentiation procedure are verified its effectiveness with the motion of a solitary wave in a water tank with various configurations. Numerical results are compared with other existing solutions. Our solution procedure can be tracked large deformation of free surface caused by the mutual action between water wave and geometrical configuration of tank. The numerical simulations in the case of tank with gentle slope make clear difference on deformation process of breaking wave. The existence of similar phenomena to collision and fission which are well-known as the solutions of K-dV equation is pointed out through our numerical simulations on water wave over mound or trench and wave propagation in a steep slope tank.

Key Words: Free Surface Problem, Nonlinear Water Wave, Solitary Wave, Wave Fission & Collision, Breaking Wave, Eulerian-Lagrangian Method, Direct Differentiation Method

1. 序論

工学の多くの分野に現れる自由表面を有する流体の運動は、自由表面問題と呼ばれ興味深い現象が存在している。自由表面問題の典型的なものとして、容器内流体のスロッシング運動や水面波の運動があげられる。

海洋工学や湾岸工学においては、非線形水波問題の研究が重要な課題の一つと考えられる。代表的な非線形水波問題として、トロコイド波、クノイド波、ストークス波や孤立波などの有限振幅波が伝播する際に海底の形状に応じて様々な変形を受ける問題がある。近年、様々な種類の海洋構造物が建設されることが多くなってきたため、非線形水面波の波力がどんな流体力学的作用を構造物に及ぼすか正確に評価する必要がでてきた。このような目的のために非線形水波の非定常運動を調べなければならないが、特に有限振幅波や巻き波等の非線形性の強い水面波と構造物の相互作用を解析することが極めて重要である。

さらに、理工学の各分野に非線形波の相互作用問題が存在するため、その問題を多くの数学者、物理学者そして工学者が様々な学術的側面から研究してきた^{1)~5)}。それらには、K-dV 方程式の解と同様な波動の相互作用について興味深い現象が存在し、一般的には浅水長波理論^{1),2)}の意味で解析することができる。これらの現象を、浅水長波理論における波の運動の非線形性と分散性の競合として理解することができる^{3),4),6),7)}。

これらの非線形水波の問題を具体的に調べるには、数値シミュレーションを用いた解析が有効であり、これまでも差分法、有限要素法、境界要素法などの数値計算法に立脚した計算例が数多く存在する^{5)~15)}。自由表面を有する流体の流れを非粘性、非圧縮そして非回転と仮定すると、その問題をラプラス方程式の初期値-境界値問題として数学的に定式化できる。ラプラス方程式などの線形な支配方程式を数値的に解くには、差分法や有限要素法などの数値計算法よりも境界要素法がすぐれていることが知られており、多くの研究報告が

なされている^{8)~15)}。しかしながら、今問題にしているような非線形水波問題を解析するためには、水面形状が大きく変形する自由表面問題に有効な計算スキームを境界要素法に導入する必要がある。

著者らはこれまで、Longuet-Higginsらが複素平面上でのポテンシャル流れの境界積分方程式を用いて示した解析法⁸⁾に基づき、いわゆる Eulerian-Lagrangian 混合解法を導入した境界要素法が水面波運動や液体スロッシングなどの自由表面問題に有効であることを示してきた^{16)~20)}。

この自由表面問題の解析手法は、実変数の空間におけるラプラス方程式の境界値問題を境界要素法で解き、自由表面条件をラグランジュ的に記述した発展方程式をオイラー時間積分スキームで解くという2種類の計算手法で構成される。この計算手法はシンプルであるが、水波が伝播時に砕波したり、斜面を遡上時に巻き波になるなど、強い非線形性を呈する問題でも簡単に解析することができる。

この枠組みの計算手法で重要な点は、移動する自由表面の速度評価であり、法線と接線方向の速度成分を求めて、自由表面上での幾何学的関係を用いて x-y のデカルト座標系に変換するのが一般的である。ここで、法線微分は境界要素方程式を解いて得られるフラックス値で得られるが、接線微分は自由表面上のポテンシャル値になんらかの差分近似を導入して評価する必要があり、高精度の自由表面解析をする際にはその評価法が問題となる。そのため、その近似計算スキームの検討について研究報告がなされている¹⁵⁾。

そこで、我々は境界積分方程式をグローバルな座標系で直接微分することで、直接的に x-y 座標系の微分量を求めることができる直接微分法 (Direct Differentiation Method) を自由表面-境界要素解析に導入することを提案し、その有効性を確認してきた。また、非線形性の強い自由表面流れを数値計算する際には、水面運動の数値的な不安定性にどのように対処するのかが問題となるので様々な数値的技法の導入についての研究が存在しており、著者らもこれまでいくつかの数値技法について検討してきた。

本論文では、これまで著者らが開発してきた計算手法をまとめる形で、自由表面問題に対する境界要素法の有効性を示し、その本計算スキームの適用性を明らかにする。

具体的には、Eulerian-Lagrangian 混合型の自由表面-境界要素スキームにおける次数の選択とその組み合わせについては、これまでの研究報告により様々なものが提案されているが、本研究では最も単純でシンプルなスキームを用いて各種の非線形水波問題の解析を試み、その適用性を提示する。

また、自由表面の数値的不安定性の解決手段として、解のスムージング技法、計算節点の再配置技法そして境界要素の適合的再分割技法を紹介し、これら3つの数値的技法を組織的に導入することで、計算の安定性を実現でき、現象の解析に十分な長時間の計算を実施することが可能となることを提案する。

従来より、空間の微分係数の計算に対するDDM型の境界要素スキームは、その計算精度の高さから有効性が報告されているが⁽²¹⁾、計算時間が既存の境界要素スキームよりかかることが指摘されている。しかしながら、自由表面問題を境界要素解析する際の計算時間がどの程度のものかは、これまで明らかされていない。そこで、自由表面の移動速度の評価について、差分近似による数値結果と直接微分法(DDM)による数値結果を計算精度および計算時間の観点から比較し、DDMの境界要素-自由表面スキームに対する有効性も明らかにする。

2. 数学的定式化

本論では、水槽における流体の2次元な運動について考えることにする。この流体領域 Ω は、閉曲線 Γ により囲まれており、この閉曲線は図-1に示されるように自由表面境界 Γ_f 、可動壁 Γ_{w1} と固定壁 Γ_{w2} により構成されているものとする。

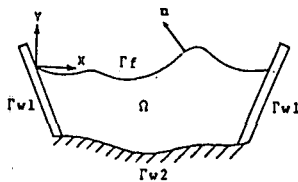


図-1 可動壁と固定壁によって囲まれる水槽

ここで、流体は非粘性、非圧縮であるとし、流れは非回転であるとする。これらの仮定のもとに、流体の速度ベクトルを $\mathbf{u} = (u, v)$ 、流れの速度ポテンシャルを ϕ とする次のような支配方程式を得る。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ であり、 ∇^2 は2次元のラプラス作用素である。

この支配方程式に対して、解析境界の属性に応じ、2種類の境界条件が与えられることになる。第1は壁に対する境界条件であり、次のように与える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi \equiv q \quad \begin{cases} \hat{q} & \text{on } \Gamma_{w1} \\ 0 & \text{on } \Gamma_{w2} \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は境界上に定義される外向き単位法線ベクトルである。

他の条件は自由表面境界 Γ_f で与えるいわゆる自由表面条件である。それらは、運動学的条件と力学的条件であり、数学的表現としてラグランジュ表現を導入することにし、自由表面上のマーカー粒子のラグランジュ座標 (ξ_1, ξ_2) とすることで、表面粒子の運動学的条件を以下のように与える。

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\xi_1}{Dt} &= u = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{D\xi_2}{Dt} &= v = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad \text{on } \Gamma_f \quad (4)$$

ここで、 D/Dt は実質微分作用素とする。次に、力学的条件を一般化されたベルヌーイの圧力方程式を用いて速度ポテンシャル ϕ の時間変化を実質微分表現することで

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 \right\} - g\eta \quad \text{on } \Gamma_f \quad (5)$$

のように記述する。ここで、水面上に加わる圧力は零とし、 g は重力加速度とする。

本論では、方程式(1)-(5)により与えられる数学モデルをラプラス方程式(1)の境界値問題と発展方程式(4)、(5)の初期値問題の連成問題として取り扱うこととし、それらをそれぞれ境界要素法と時間積分法を用いて自由表面問題を数値的に解くことにする。また、DDMスキーム⁽¹⁹⁾を孤立波の生成、伝播、反射問題に適用し、既存のスキームと比較することで、精度が高くまた計算時間もそれほど増加しないことを示す。また、3種類の数値技法を組織的に運用することで数値的安定性で十分に長い数値計算の実行が実現できることも示す。

3. 数値計算手法

この節では、前述の数学的定式化を解くための数値計算手法を境界値問題の境界要素解析そして初期値問題の時間積分の2つに分けて説明する。この手法は、ラプラス方程式(1)の境界積分方程式による解法に立脚している。

3.1 境界値問題の境界要素法

前節で示した境界値問題(1)-(3)を以下の境界積分方程式に変換する。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \phi(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 α は観測点における境界形状の内角係数、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ は観測点、 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ はソース点、 ω^* はラプラス作用素の基本解として次のように表すものとする。

$$\omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \quad (7)$$

さらに境界条件(3)を考慮すると、式(6)を次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \phi(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma_f} \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\Gamma_{w1}} \hat{q} \omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \int_{\Gamma_f + \Gamma_{w1,2}} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、自由表面 Γ_f 上の速度ポテンシャル ϕ が与えられると、上式の境界積分方程式(8)を解くことで、壁境界 Γ_w 上のポテンシャル ϕ と Γ_f 上の法線微分係数(フラックス) $\partial\phi/\partial n$ を得る。式(6)を近似的に解くために、境界要素法を用い、境界要素としては最も簡単な一定要素を採用すると、以下のような式(6)の離散化表現を得る。ここで、境界要素の積分は計算精度を高めるため解析的に積分を行った。

$$\mathbf{H}\Phi = \mathbf{G}\mathbf{Q} \quad (9)$$

影響係数行列 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{G}$ と節点ベクトル Φ 、 $\mathbf{Q}$ は、それぞれ次式で表せられるものとする。

$$\mathbf{H} = [\hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}], \quad \mathbf{G} = [G_{ij}] \quad (10)$$

これらの係数行列の成分を示すと以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_{e_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|} \right) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ G_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_{e_j} \ln \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|} d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T \\ \mathbf{Q} &= [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで、 e_j は j 番目の境界要素であり、 $\mathbf{x}_i$ は i 番目の境界要素上に定義される節点である。式(9)のベクトル Φ 、 $\mathbf{Q}$ の成分にデータが与えられると、自由表面上の法線微分係数 $\partial\phi/\partial n \equiv q$ を決定することができる。

多くの論文では、自由表面の時間発展問題に用いる初期値を直交座標系に則した空間に関する2つの微係数 $\partial\phi/\partial x_1$ 、 $\partial\phi/\partial x_2$ を法線の微係数 $\partial\phi/\partial n$ と接線の微係数 $\partial\phi/\partial s$ を幾何学的関係を用いて求めている^{10),11),14)}。この計算スキームの問題点として、 $\partial\phi/\partial n$ は境界積分方程式の未知量として直接得ることができ、境界要素法の離散化手法を慎重に行えば高精度に求めることができるが、 $\partial\phi/\partial s$ は速度ポテンシャルの差分近似で求めるため境界要素に加えてさらに別の離散化を持ち込むことになる上、自由表面の形状に基づく幾何学的変換が入り込むので、精度を保つためにはその取り扱いに十分な注意を要することになる。

そこで、著者らは初期値問題で用いる空間の微係数を構成するために、境界積分方程式(6)を直接に空間変数で微分する直接微分法(DDM)を用いた計算スキームを開発した¹⁹⁾。このスキームは、境界積分方程式を空間変数で微分するため、問題により必要な任意の変数についてその微分係数が直接得られることになる。従って境界上の微係数は、もとの積分方程式が有する精度を保持し、さらに考えている空間座標に合わせるための空間微係数の座標変換を実施する必要もないため、他の近似スキームの精度を考慮することなく高精度の解析が可能となる。ただし、積分核の特異性のオーダーが上がった超特異積分方程式を扱うことになり、この超特異核の積分は、通常のコーシーの主値積分(p.v.積分)では、有界とならないので、超特異積分の有限部分を評価したp.f.積分を用いなくてはならない。

式(6)をソース点の空間変数 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ を用いて、それぞれ直接微分することで以下に示す2本の超特異積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial\phi}{\partial y_1}(\mathbf{y}) &= pf \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \frac{\partial\omega^*}{\partial y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- pf \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial q^*}{\partial y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial\phi}{\partial y_2}(\mathbf{y}) &= pf \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \frac{\partial\omega^*}{\partial y_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- pf \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial q^*}{\partial y_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 pf は基本解とその導関数における超特異性の無限積分の有限部分の意味で用いている。

これらの積分方程式を速度ポテンシャルの微分係数として考えることで、自由表面上の2つの流速成分 $\partial\phi/\partial x_1$ 、 $\partial\phi/\partial x_2$ が法線微係数および接線微係数の座標変換を用いることなく直接得られる。

3.2 初期値問題の時間積分法

自由表面上の運動学的条件(4)と力学的条件(5)は、以下のような時間に関する連立1階発展型常微分方程式として表わされる。

$$\frac{D}{Dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right)^2 \right\} - g\xi_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

このような時間発展系の数値積分法として、1次のオイラー時間積分スキームを用いることにする。このオイラー・スキームを前述の発展系に適用すると、次のような形式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^{k+1} &= \xi_1^k + \Delta t \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right)^k \\ \xi_2^{k+1} &= \xi_2^k + \Delta t \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right)^k \\ \phi^{k+1} &= \phi^k + \Delta t \left(\frac{D\phi}{Dt} \right)^k \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left(\frac{D\phi}{Dt} \right)^{k+1} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right)^k \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right)^k \right)^2 \right\} - g\eta^k \quad (17)$$

ここで、 Δt は時間ステップ k と $(k+1)$ との間の微小時間刻みとする。これらの近似計算で、 $k+1$ ステップにおける自由表面のラグランジュ座標 ξ_1 、 ξ_2 と速度ポテンシャル ϕ を (k) ステップを求めることができる。これらを用いることで、自由表面の時間依存問題を追跡することができる。

したがって、式(15)で示される発展系の初期条件として自由表面上の初期値 ξ_1^0 、 ξ_2^0 として ϕ^0 を与えなければならないが、それぞれ平衡状態におかれた場合の自由表面上の各値を与えるものとする。ここで、時間積分スキームとしては最も簡単な1次精度のオイラー法を選択した。これは、本手法による非線形水波問題の有効性を調べるためにその基本的な適用限界を調べるためのものであり、もし現象によって、より高精度なスキームが必要であるなら問題の要求に応じて精度次数

を上げていけばよい。ただし、この種の非線形水波の非定常計算は自由表面の要素分割を多くとることが多いので、次数を上げると計算時間が非常に長くなることを指摘しておく。

4. 数値計算技法

非線形水波のような自由表面問題を数値計算する場合には、様々な自由表面の運動に数値的不安定性が発生することが知られており、問題の難しさに応じて適切な処理をしないと計算が破綻することになるため、自由表面運動の不安定に対処する種々の数値的な技法がこれまでも研究されている^{(8),(9),(12)}。そこで、著者らも自由表面問題に有効な数値技法をいくつか導入し、長時間の数値計算を安定に処理することを提案してきた^{(17),(18),(20)}。本論では、次に示す3種類の数値計算技法を自由表面計算の実行中に組織的に適用し、その結果として計算の安定性と精度を実現することが可能であることを提案する。

4.1 平滑化技法

水波問題の数値計算において、'saw-tooth'型の不安定性が生じることが知られており、長時間の計算を実行すると水面の形状が「のこぎり波」状になることで計算が破綻する場合がある。このタイプの不安定性は、水波運動の非線形性が卓越してきたり、造波装置のピストンの押し込みによる物理的な要因で発生し、実際の現象では粘性効果で減衰するものが、ポテンシャル流れで問題を設定している場合は非粘性流体であるため、形状不安定が消えることがなく、さらには数値計算の過程に悪影響を与えているものと考えられる。Longet-Higginsらは、この'saw-tooth'タイプの不安定性を除去するために、高次多項式型適合法を用いた平滑化技法を自由表面計算に導入し、非線形性の強い水波の数値計算を安定して長時間計算した⁸⁾。この種の平滑化技法は、デジタル・フィルターとして信号処理の分野で盛んに用いられており、大別して移動平均法と積算平均化法の2種類がある。Longet-Higginsらの手法は2次精度を有する移動平均法の一つであるが、データをfittingする際の重み係数を直接数学的に計算しているため、より高次のフィルタリングを求めるのがたいへんである。そこで、我々はSavitzky & Golayが提案した移動平均法に属するデジタル・フィルターを自由表面の数値計算に適用した。この場合の平滑化は、重み係数を最小2乗法を用いて決定しているため、高次のフィルタリング式を構成する際の重み係数を簡単に計算できるという特徴を有する²²⁾。よってSavitzky-Golay法に関しては、既に12次精度まで係数の表が存在しているので、高精度のフィルタリングが必要な場合でも簡単にフィルタリング式を求めることができる。本論では、Savitzky-Golay法の2次フィルタリングを自由表面上の節点 x_j に定義される計算量 $f(x)$ に対して次式のように適用した。

$$\bar{f}_j = \frac{1}{35}(-3f_{j-2} + 12f_{j-1} + 17f_j + 12f_{j+1} - 3f_{j+2}) \quad (18)$$

ここで、 $\bar{f}_j$ は節点 x_j における平滑化後の値を示す。計算実行時において、上述のフィルタリング公式(18)を関数値 ξ_1^j 、 ξ_2^j と ϕ_j に対して10時間ステップ毎に適用することにする。以上の結果、saw-tooth型の形状のないなめらかな自由表面が得られ、数値計算の安定性が確保できる。

4.2 節点再配置技法

自由表面の運動をラグランジュ的に取り扱う際には、仮想粒子が集中することで数値不安定が発生することがある。こ

れは、解析している境界要素の長さに大きなばらつきがあると、影響係数行列 H 、 G の成分の値にばらつきが発生し、結果としてソルバーによる線形計算の反復に大きな数値誤差を蓄積することを要因とするものである。そこで、この不安定性による数値計算の破綻を回避するために節点の再配置技法を導入する必要がある。これまでいくつかの技法が提案されている。本論で用いた再配置技法は、自由表面計算の実行中、計算ステップ毎に自由表面の境界要素の長さをチェックして、全境界要素の平均長さと比較し、非常に小さな要素が発見されたときには、境界要素の端点に定義される節点を移動させるというものである。しかしながら、本論で対象としている水波の問題では、砕波などの非線形性が非常に強い現象を除いてこの種の不安定はほとんど発生しない。

4.3 適合的再分割技法

本来、支配方程式とその境界条件には質量保存則が満足されるように構成されているが、自由表面問題のように解析境界が時々刻々変化する問題では、この保存則が破れて結果として解析領域の体積が変動し、数値誤差が発生する。そこで、本論では各計算ステップで領域中に配置された流体領域の体積(2次元の場合は面積)をチェックして、体積になんらかの変化(すなわち、増加や減少)が発生した場合には、その体積変化に合わせてそれを補正するように境界要素を再分割する適合的再分割技法を導入した。しかしながら、重力の卓越したタイプの水波問題では、この種の数値誤差はほとんど発生しないことを確認している。

5. 数値計算例

5.1 矩形水槽内での孤立波の生成と伝播

これまで述べてきた計算手法の有効性と適用性を示すため、図-2示すような矩形水槽内で造波装置により生成された孤立波が伝播する問題を数値計算する。この水槽の諸元は、無次元化長さ $L/h = 18.0$ と静水時水深 $h = 1.0$ とする。なお、左端にピストン型の造波装置が配置され、平衡水面まで均一に流体が満たされているものとする。

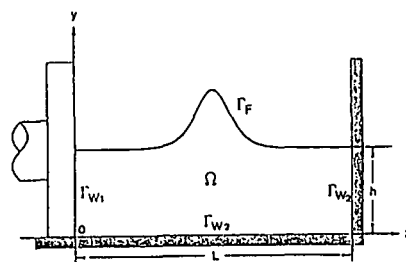


図-2 造波装置付矩形水槽

造波装置を配置した境界 Γ_{w1} の境界条件は、ピストンの運動を考慮して次式で与える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{dX_p(t)}{dt} \quad \text{on } \Gamma_{w1} \quad (19)$$

ピストンの前進運動を関数 $X_p(t)$ を用いて次のように仮定する。

$$X_p(t) = X_0 \tanh[\omega(t - t_c)] \quad \text{for } 0 \leq t \leq T \quad (20)$$

ここで、 X_0 はピストン板の半行程、 ω と t_c はピストン板の運動を特徴づけるパラメーター、 T はピストン板が停止する時間を示す。

数値計算を実行するにあたり、境界要素分割は全領域を一定要素で80分割、そのうち自由表面を30分割し、時間刻みは $\Delta t = 0.02$ とした。

図-3は、造波装置の運動パラメーターとして、 $X_0/h = 0.5$, $\omega\sqrt{h/g} = 0.4$, $t_c\sqrt{g/h} = 6.0$, $T\sqrt{g/h} = 15.0$ のように与えた場合の孤立波のプロファイルの時間変化を示したものであり、この場合、波高 $A/h = 0.312$ の孤立波が生成される。図-4は上で得られた孤立波の形状を造波過程を考慮しない次式で示される孤立波の平衡解¹⁾と比較したものである。

$$\eta = \frac{A}{\cosh^2 \left[\sqrt{3A/h} (x/2h) \right]} \quad (21)$$

ここでは、数値解との比較として $A = 0.312$, $h = 1.0$ を選択した。これは、数値計算において造波装置により生成された孤立波が水槽の中央付近に来たときに得られた形状を有限時間内に式(20)で示される平衡解に漸近したものとみなして比較したものである。図-5は、右端の垂直壁に孤立波が駆け上がる際の最大高さ R/h をDDMスキームを用いたBEM解と差分スキームを用いたBEM解をByatt-Smithの理論解²⁾と実験解⁵⁾と比較したものである。

ここで、DDMスキームの有効性を示すため、この最大駆け上り高さの結果をもとに差分スキームの数値結果と比較する。

最初に、計算精度を比較するために数値解 R_k と理論解 $\bar{R}$ を用いて次に示す相対誤差 ϵ と誤差ノルムの和 E_k を調べてみる。

$$\epsilon \equiv \frac{R_k - \bar{R}}{\bar{R}} \quad (22)$$

$$E \equiv \sum \sqrt{(R_k - \bar{R})^2} \quad (23)$$

ここで、添え字 $k = 1, 2$ は各々DDM解、差分近似解を示すものとする。図-6が相対誤差をグラフにプロットしたものであり、DDM解の方が誤差が小さいことがわかる。次に、誤差ノルムの和を比較すると、

$$E_1 = 0.045866, E_2 = 0.012839$$

となり、明らかにDDM解の方が精度が高いことがわかる。

次に、DDMスキームと差分近似スキームの計算時間を比較する。一般に、直接微分法はもとの境界積分方程式を解いてから任意の変数で微分された積分方程式を計算するので計算が遅くなることが指摘されているが、自由表面問題の実際問題に適用した場合にどの程度のCPU時間が増加するのかについて調べた報告はない。そこで、本論ではこの孤立波の伝播問題で差分スキームの場合と比較する。用いた計算機は、日本大学生産工学部の汎用スーパーコンピュータFACOM-VP30Eを使用し、すべての演算はスカラー演算として実行した。数値計算した問題の自由度は、DDM解、差分解ともに総分割数80、自由表面分割30として波高 $A/h = 0.31$ の孤立波が時間30秒まで伝播したときのCPU時間を比較する。その結果は、

差分近似解：402.38sec, DDM解：432.6sec

となり、確かにDDMスキームの方がCPU時間がかかることがわかる。しかしながら、計算時間の増加は約8%であり、その他の場合でも約10%程度である。この理由として、基本となる影響係数の積分は終了しており、DDMによる計算はそれを用いて微分量に関する積分方程式を構成するだけに過ぎ

ず、計算時間の多くはソルバーによる線形計算に割かれるためである。計算精度が良いことを考慮に入れると、空間微係数に費やす時間としては特に問題とならないと考えられる。

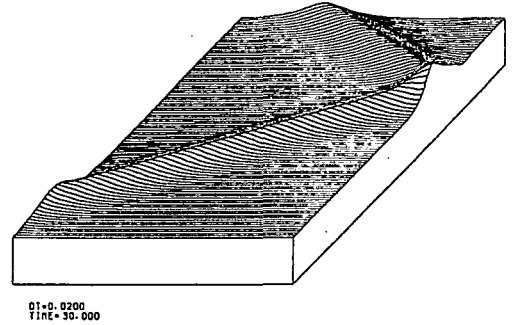


図-3 生成し伝播する孤立波の形状変化

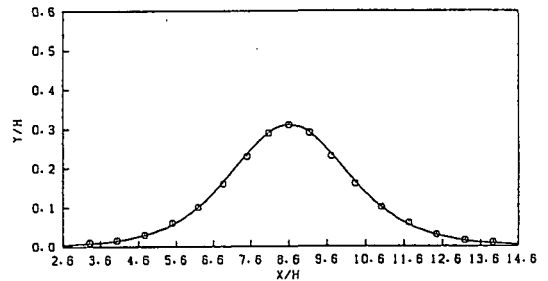


図-4 水槽を伝播する孤立波の形状
○: 数値解, —: 平衡理論解

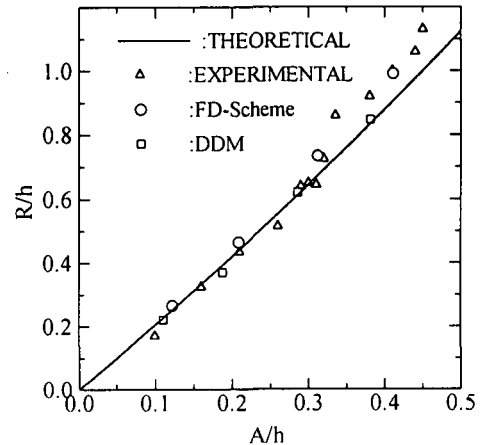


図-5 最大駆け上り高さ R/h と波高比 A/h

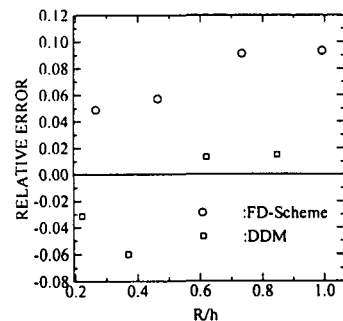


図-6 DDM解と差分解の相対誤差

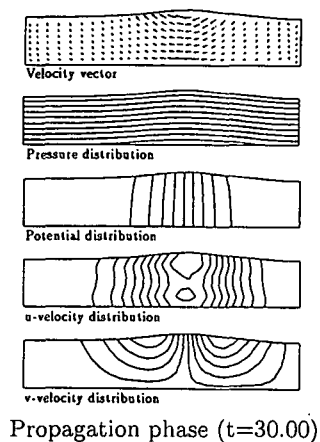
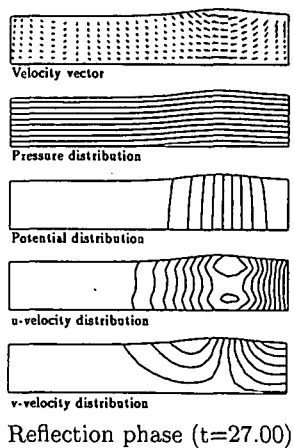
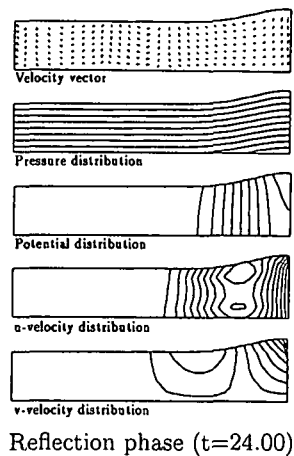
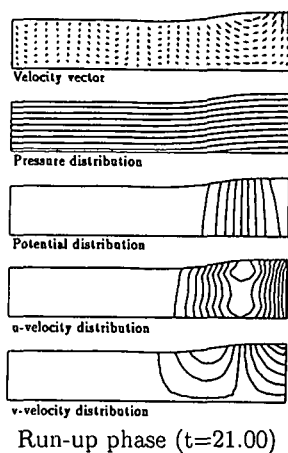
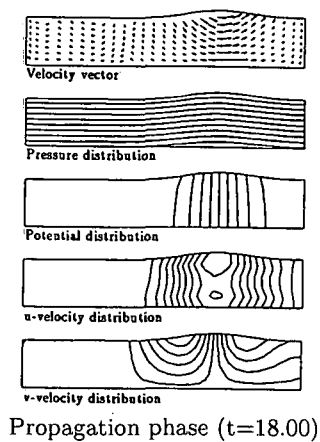
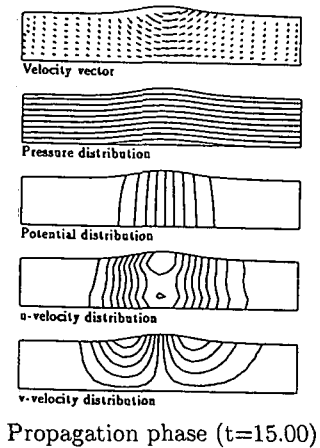
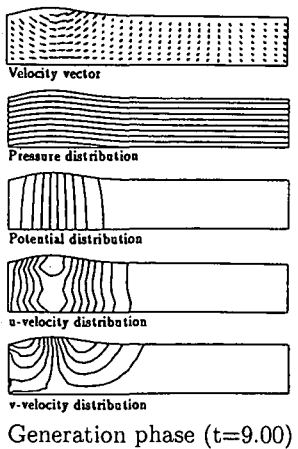
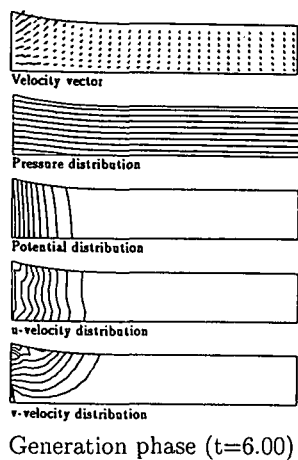


図-7 発生, 伝播, 駆け上がり, 反射のフェイズにおける物理量の分布

図-7は、波高 $A/h = 0.19$ の孤立波が発生し、右へ伝播し、反射して左へ進行していく過程の各種物理量を示したものである。グラフは上からそれぞれ、速度ベクトル、圧力分布、ポテンシャル分布、水平方向ならびに垂直方向の速度分布を示しており、水槽内の孤立波の運動の詳細を見ることができる。

5.2 マウンドやトレンチ上を伝播する孤立波

次に、矩形水槽の底部中央に半円形のマウンドないしトレンチを設置した場合の孤立波の伝播問題を数値シミュレーションし、孤立波の挙動を調べる。

境界要素分割は、全領域を120分割し、自由表面部分を80分割する。計算パラメータは、 $L/h = 18.0$ 、 $X_0/h = 0.5$ 、 $\omega\sqrt{h/g} = 0.4$ 、 $t_c\sqrt{g/h} = 6.0$ 、 $T\sqrt{g/h} = 15.0$ として実行した。さらに、マウンドの半径は $R/h = 0.7$ 、トレンチの半径は $R/h = 1.5$ とした。

図-8と図-9はそれぞれ、半円形のマウンドとトレンチの上を通過していく孤立波形状の時間変化を示したものであり、これらの図よりマウンドやトレンチによる水底形状の影響を主波が分波して複数の小さな2次波が発生していることがわかる。さらに、これらの2次波は垂直壁で反射して、主波と衝突—通過現象を繰り返し、ソリトンの挙動を示し2次波が発生することで複雑な水波運動をすることが分かる。

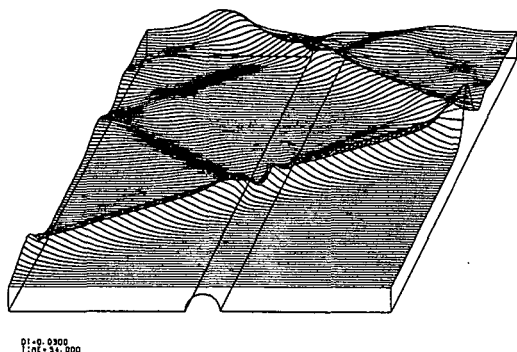


図-8 半円形のマウンドによる孤立波の伝播過程の変化

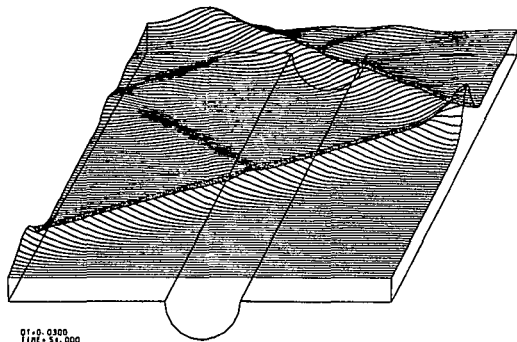


図-9 半円形のトレンチによる孤立波の伝播過程の変化

5.3 急斜面を有する水槽内での孤立波の伝播

この節では、孤立波が急斜面に駆け上がり反射する問題を数値計算し、孤立波の挙動が垂直壁の場合とどのように異なるかを調べる。水槽の諸元は $L/h = 18.0$ で、垂直壁の水槽と同じものとし、孤立波は前のケースと同様なピストン運動で発生するものとする。数値計算を実行するにあたり、全境界を95分割、自由表面部分を45分割し、時間刻みを $\Delta t = 0.02$ とする。

図-10では、波高 $A/h = 0.309$ の孤立波の3つのフェーズすなわち、発生、伝播、駆け上がりと反射を斜面角度 $\theta = 45^\circ$ に対し経過時間 $0.0 \leq t \leq 30.0$ を連続的に示したものである。図-11は、急斜面 ($\theta = 45^\circ$) に駆け上がる際の最大駆け上がり高さ R/h をプロットし、2つの理論解 Hall & Watts³⁾ と C.E.Synolakis⁴⁾、Hall & Wattsの実験結果³⁾そして他の境界要素解 Ohyama¹⁴⁾と比較したものである。本手法による結果は、他の結果と非常によく一致していることがわかる。

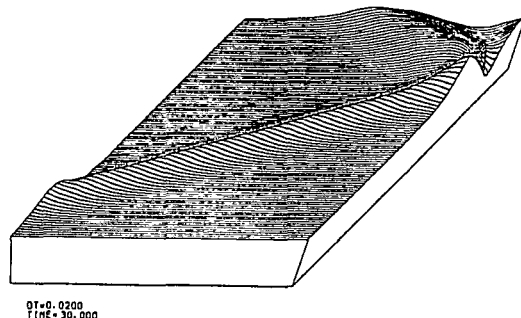


図-10 急斜面を有する水槽内での孤立波の運動 ($A/h = 0.309$, $\theta = 45^\circ$, $0.0 \leq t \leq 30.0$)

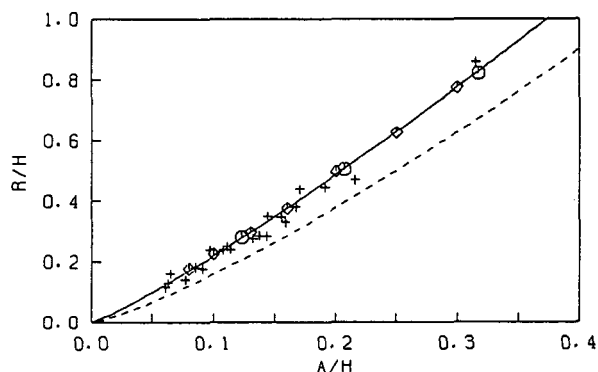


図-11 斜面角度 $\theta = 45^\circ$ に対する最大駆け上がり高さ R/h と波高 A/h の関係
 ○: 本数値解,
 ◇: 他のBEM解 (Ohyama),
 +: 実験データ (Hall&Watts),
 —: 理論解 1 (Hall&Watts),
 ----: 理論解 2 (C.E.Synolakis)

次に先のモデルでさらに長時間の計算を試み、孤立波が斜面と相互作用をした結果どのような挙動が現れるかを調べる。図-12は孤立波が伝播後、斜度 $\theta = 45^\circ$ の急斜面に入射し、その後垂直壁と急斜面の間を伝播、反射を繰り返す過程の水面プロファイルの変化を時間 $0.0 \leq t \leq 60.0$ まで示したものである。自由表面の時間変化を注意深く見ると、急斜面から反射した後の進行波運動に複雑な挙動が現れていることが明らかである。さらに詳しくこれらの現象を観察するために、図-13に伝播、駆け上がり、反射、分裂、衝突、すり抜け (passing through) の各時間ステップの形状を示す。これらの結果より斜面と孤立波の相互作用における分裂現象は、もとの孤立波が斜面に入射し反射する過程で波の分散性が卓越してきて、

小さな副次波が発生したものと考えられる。これらの非線形挙動は、K-dV方程式における2進行波の解挙動とよく似ている。

次に、斜面角度の違いによる影響をみるために、 $\theta = 30^\circ$ の場合の孤立波の相互作用による自由表面の挙動をシミュレーションする。諸元と計算パラメータは先と同じものを用いる。図-14で、1回目と2回目の反射における進行波の運動をみるためのプロファイル変化を連続的に示す。得られた結果より、先に示した $\theta = 45^\circ$ の場合と同様な過程をみることができる。しかしながらより詳しく観察すると、図-15に示すようにそれぞれのフェイズの発生が $\theta = 45^\circ$ の場合より遅れていることが確認できる。

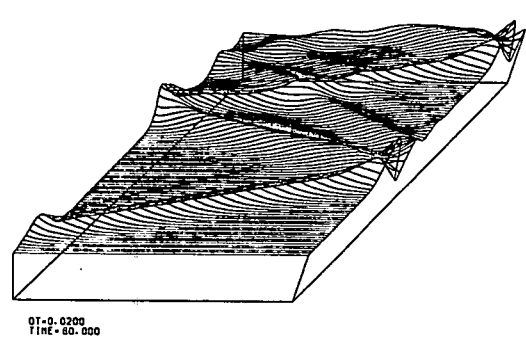


図-12 急斜面 $\theta = 45^\circ$ から孤立波が反射した後の進行波の運動 ($A/h = 0.309, \theta = 45^\circ, t=0.0$ to 60.0)

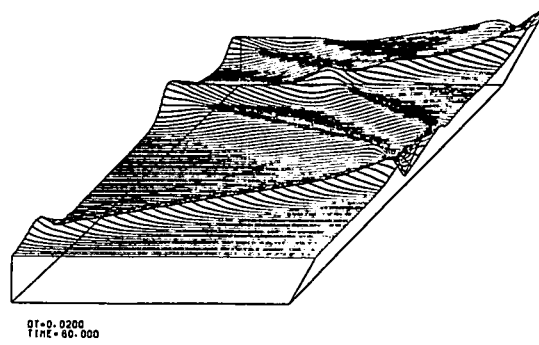


図-14 急斜面 $\theta = 30^\circ$ から孤立波が反射した後の進行波の運動 ($A/h = 0.309, \theta = 30^\circ, t=0.0$ to 60.0)

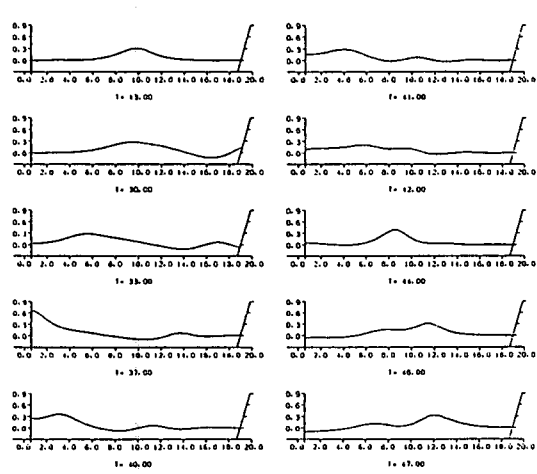


図-13 伝播、駆け上がり、反射、分裂、衝突、合体そして通過する孤立波 ($A/h = 0.309, \theta = 45^\circ, t=0.0$ to 60.0)

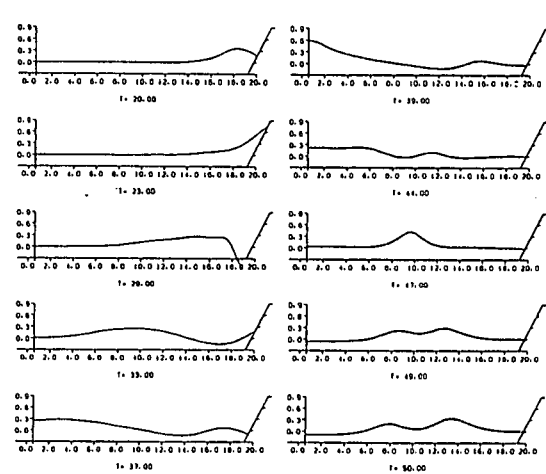


図-15 伝播、駆け上がり、反射、分裂、衝突、合体そして通過する孤立波 ($A/h = 0.309, \theta = 30^\circ, t=0.0$ to 60.0)

5.4 緩斜面を有する水槽内の砕波

次に、非常に非線形性が強い問題として、孤立波が水底の形状と相互作用して、砕波したり巻き波に至る過程を数値シミュレーションする。対象とする数値水槽は、図-16に示す右端に緩斜面を設置した2次元水槽とし、その諸元は、水平な水底部分の長さを $L/h = 10.0$ 、斜面の斜度を決定する水底部分の長さとして $M = 20.0, 15.0, 10.0$ の3種類を設定した。

これら3つのケースにおいて、左端の造波装置により発生した波高 $A/h = 0.58$ の孤立波が左方に伝播し、緩斜面を遡上しながらその自由表面形状を変えていく過程を調べる。要素分割は、斜度 $h/M = 1/20, 1/15$ の場合は自由表面部分を200分割し、斜度 $h/M = 1/10$ の場合は180分割とし、時間刻みについてはいずれも $\Delta t = 0.02$ とした。ここで、各ケースについて水面が砕波して境界形状が極端に変形し、境界要素解析が現実的な意味を持たなくなるまで計算を実行した。

図-17,18,19に、各々斜度 $h/M = 1/20, 1/15, 1/10$ における孤立波の生成、伝播、砕波の過程の自由水面形状の時間変化を示す。これらを見ると、斜度が強くなるほど水波のブレイク・ポイントが斜面部分において水深が浅い方に前進し、斜度が緩やかであるほど深いところで砕波することがわかる。

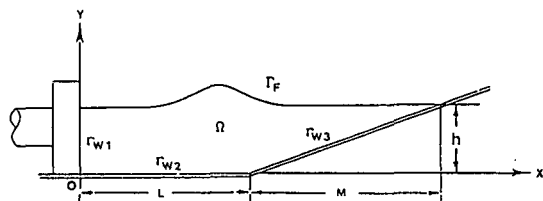


図-16 造波装置と緩斜面を有する水槽

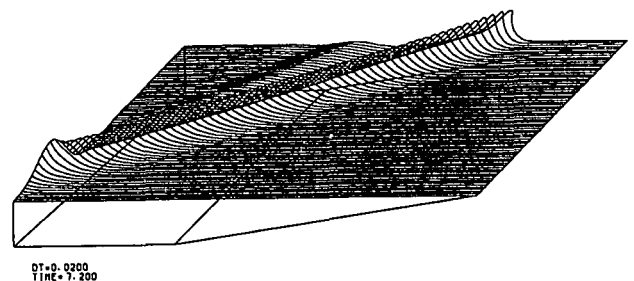


図-17 斜度1/20の斜面を遡上する孤立波

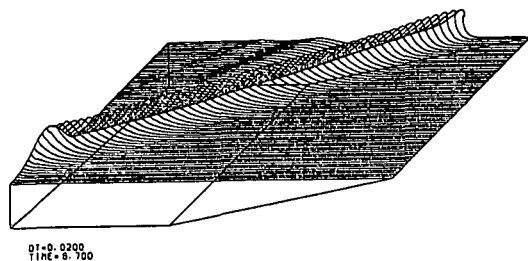


図-18 斜度1/15の斜面を遡上する孤立波

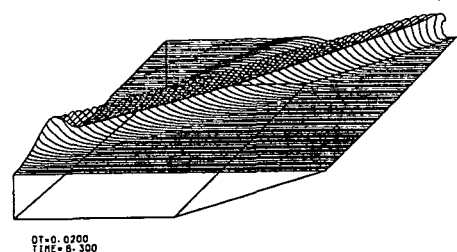


図-19 斜度1/10の斜面を遡上する孤立波

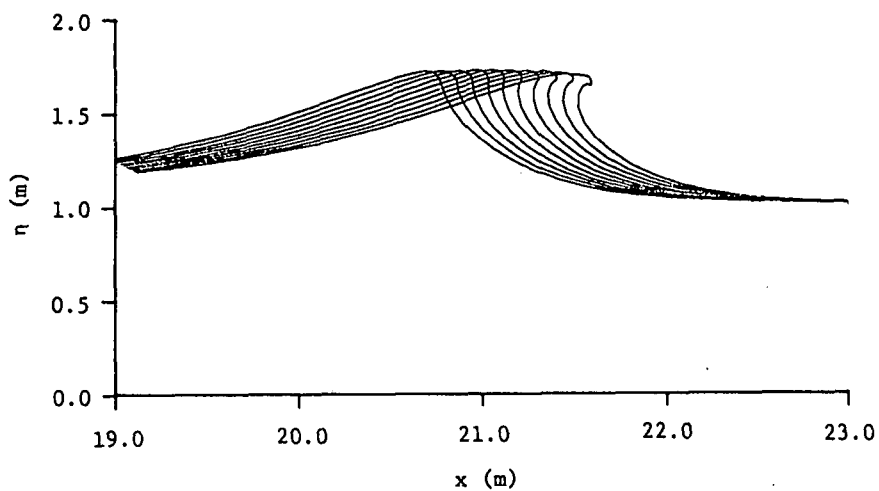


図-20 斜度1/20遡上時に碎波する孤立波の変形過程
($6.80 \leq t \leq 6.98$ について、時刻0.02 毎にプロット)

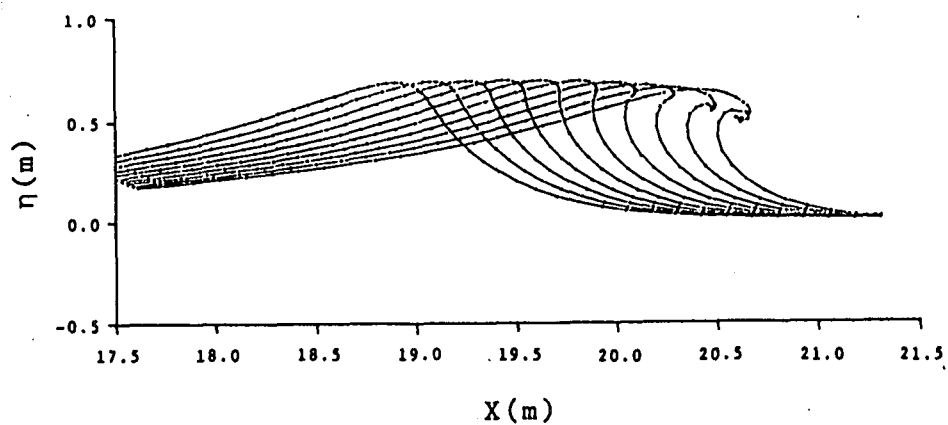


図-21 斜度1/15遡上時に碎波する孤立波の変形過程
($6.30 \leq t \leq 6.70$ について、時刻0.04 毎にプロット)

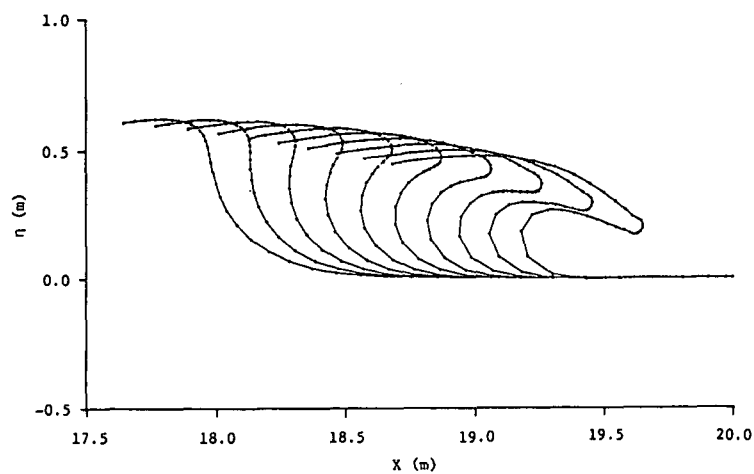


図-22 斜度1/10遡上時に碎波する孤立波の変形過程
($6.02 \leq t \leq 6.38$ について、時刻0.04 毎にプロット)

6. 結語

本論では、境界要素法に自由表面問題を解析するためのスキームとしてラグランジュの手法を導入し、様々な非線形水波問題の数値計算例を通じて、水面波運動の解析に対する境界要素を用いた離散化手法の適用性と有効性を明らかにした。

本研究で用いた自由表面の取り扱い手法は、Lagrangian-Eulerian 混合解法の系列に属するものであり、問題の定式化が簡便なことに加えて、水面の砕波などのかなり非線形性の強い問題でも特殊な工夫を導入することなく数値シミュレーションができることがわかった。この枠組みで、非線形水波問題を数値解析する際の計算スキームの選択については様々なものが提案されているが、本研究では最も次数の低い離散化スキームを用いて、かなり複雑な水波の運動を数値実験し、その適用限界を示した。自由表面をラグランジュ的に扱う際に重要な水面の速度評価法について、既往の差分近似法と直接微分法(DDM)の2種類を導入し、それらを計算精度とCPU時間の両面から検討することで、具体的な非線形水波問題の数値計算する際の目安となるデータを提示した。

具体的な問題として、2次元数値水槽内での水面波の造波、伝播、各種の水底形状による自由水面の変形過程を取り上げ、孤立波が進行するときの非線形性や分散性の卓越の違いで水面波が様々な挙動を呈することを数値的に示した。特に、急斜面やマウンドなどの水中の構造物に孤立波が入・反射を繰り返す場合は、分裂・衝突などのK-dV方程式の2進行波解と類似の挙動が現れて、複雑な水面運動が発生することを示した。さらに、孤立波が緩斜面遡上時に砕波する過程を長時間にわたり追跡することができ、その水底の幾何学的形状で水面波の崩れるパターンが変化することを数値実験で示した。

これらの結果より、海洋構造物などを設計するときのデータを収集する際の、特に水面波と構造物の相互作用を調べる場合に境界要素法による数値解析が有効であることがわかり、本研究により自由表面運動を伴う流れを境界要素解析する際の基礎的なデータを提示することができた。

さらに複雑で実際的な問題を解析するために、本論で示した自由表面-境界要素法をベースとして、さらに有効な数値計算スキームが開発されることが期待される。

参考文献

- 1) Mehaute, B.L.: *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*, Springer-Verlag, 1976
- 2) Byatt-Smith, J.G.B.: An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation, *J. Fluid. Mech.*, Vol.49, pp.625-633, 1971
- 3) Hall, J.D. and G.M. Watt: Laboratory investigation of the vertical rise of solitary waves on impermeable slopes, *U.S. Army Corps of Engineers Beach Erosion Board Tech. Memo*, No.33, 1953
- 4) Synolakis, C.E.: The runup of solitary waves. *J. Fluid. Mech.*, Vol.185, pp.523-545, 1987
- 5) Camfield, F.E. and R.L. Street: An investigation of the deformation and breaking of solitary waves, *Dept. Civil Engineering Technical Report*, Vol.81, Stanford Univ, 1967
- 6) Mirie, R.M. and C.H. Su: Collisions between two solitary waves. Part 2. A numerical study, *J. Fluid. Mech.*, Vol.115, pp.475-492, 1982
- 7) Sugimoto, N., Y. Kusaka and T. Kutani: Reflection of a shallow-water soliton. Part 2. Numerical evaluation, *J. Fluid. Mech.*, Vol.178, pp.99-117, 1987
- 8) Longuet-Higgins, M.S. and Cokelet, E.D.: The deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 350, pp.1-26, 1976
- 9) Dold, J.W. and Peregrine, D.H.: Steep unsteady water waves - An efficient computational scheme, In: *Proc. 19th. Coastal Engng. Conf.*, Huston, Texas, Vol.1, pp.955-967, 1984
- 10) Liu, P.L.-F. and J.A. Liggett: Application of boundary element methods to problems of water waves, *Developments in Boundary Element Methods-2*, (Eds. P.K. Banerjee and R.P. Shaw), pp.37-67, Applied Science Publishers, London, 1982
- 11) Kim, S.K., P.L.-F. Liu and J.A. Liggett: Boundary integral equation solutions for solitary wave generation propagation and run-up, *Coastal Engineering*, Vol.7, pp.299-317, 1983
- 12) Nakayama, T.: Boundary element analysis of nonlinear water wave problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.19, pp.953-970, 1983
- 13) Grilli, S., J. Skourup and I.A. Sevendsen: The modelling of highly nonlinear waves: A step toward the numerical wave tank, *Proceedings of 10th Int. Conf. on Boundary Elements*, (Eds. C.A. Brebbia), Vol.1, pp.549-564, Computational Mechanics Publication, U.K., 1988
- 14) Ohya, T.: Boundary element analysis for run-up of nonlinear water wave, *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Japan Society of Computational Fluid Dynamics, Vol.1, pp.356-363, 1989
- 15) 阿部和久・土原達雄: 導関数境界要素方程式と自由水面重み付き残差式によるスロッピング解析, 境界要素法論文集, 第12巻, pp.109-114, 1995
- 16) Sugino, R. and Tosaka, N.: Boundary element analysis of nonlinear water wave problems, In: *Proceedings of the Fourth Pacific Congress on Marine Science and Technology*, Vol. II, pp.309-316, 1990
- 17) Sugino, R. and Tosaka, N.: Boundary element analysis of unsteady nonlinear surface waves on water, In: *Boundary Elements XII*, Vol.2, pp.107-117, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, 1990
- 18) Sugino, R. and Tosaka, N.: Boundary element analysis of non-linear liquid motion in two-dimensional containers, In: *Boundary Integral Methods - Theory and Applications* (Eds. L. Morino & R. Piva), pp.490-499, Springer-Verlag, 1991
- 19) Sugino, R. and Tosaka, N.: Direct differentiation approach to boundary element method for nonlinear water wave problems, In: *Boundary Element Methods - Fundamentals and Applications*, pp.314-323, Springer-Verlag, 1991
- 20) Tosaka, N. and Sugino, R.: Boundary element approach to Laplacian moving boundary problems, In: *BE Applications in Fluid Mechanics* (ed. H. Power), International Series on Advances in Fluid Mechanics, Vol.4, pp.73-89, Computational Mechanics Publication, U.K., 1995
- 21) 松本敏郎・田中正隆・平田秀生: 境界要素法を用いた静弾性問題の感度解析に関する一考察, 境界要素法論文集, 第7巻, pp.159-164, 1990
- 22) Savitzky, A. and Golay, M.J.E.: Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedure, In: *Analytical Chemistry*, Vol.36, No.8, pp.1627-1639, 1964

(1999年4月23日受付)