

粘弾性波動伝播問題における時間領域境界要素法

Time Domain Boundary Element Method in Viscoelastic Wave Propagation Problems

船戸慶輔¹⁾ 福井卓雄²⁾

Keisuke FUNATO and Takuo FUKUI

- 1) 石川工業高等専門学校建築学科 (〒929-0392 石川県河北郡津幡町字北中条)
 2) 福井大学工学部建築建設工学科 (〒910-8507 福井市文京 3-9-1)

Time domain boundary element method of viscoelastic wave propagation problems is presented and some numerical implementations are pointed out. In time domain, the time domain fundamental singular solutions of viscoelastic wave propagation problem cannot be given analytically in closed form. If the fundamental singular solution of dynamic viscoelasticity is obtained, the formulation of the boundary integral equation and discretized equation of BEM are directed by the theory of reciprocity as well as elastodynamics. In frequency domain, however, the fundamental singular solutions of viscoelastic wave propagation problems are given analytically in closed form. So, the fundamental singular solutions in time domain are derived from corresponding frequency domain fundamental singular solutions by Fourier transformation with numerical integration method. In this paper, time domain boundary element method is derived from corresponding frequency domain boundary element method by Fourier transformation with numerical integration method. The numerical implementations are shown to prove the availability of this numerical method to solve time domain wave propagation problems in dynamic viscoelasticity.

Keywords : viscoelastic wave, time domain, boundary element method.

1. はじめに

本論文では、粘弾性波動問題における時間領域境界要素法の数値的構成手法について示す。一般に、時間領域境界要素法では、与えられた初期値境界値問題より境界積分方程式を導き、得られた境界積分方程式を離散化技法により代数方程式とし、それらを各離散時刻において解くことにより解を得る。これらの代数方程式の各係数は、空間および時間上での積分を含む。各係数の被積分関数を影響関数と呼べば、境界要素法ではそれら影響関数の積分値を数値的に求めて解を得ている。これら影響関数を得るためには、基本特異解の具体的な形が必要となるが、2次元粘弾性波動問題においては、与えられた基礎方程式に対する基本特異解が解析的に閉じた形で得られていない。

時間領域において直接解析することが困難な場合に、Fourier変換を用いて周波数領域において定式化すると、解析が容易になる場合がある。粘弾性波動問題においても、与えられた基礎式を周波数領域に変換すると、基本特異解を求めることが容易となる。しかしながら、非線形解析を行う際などには時間領域そのものの解析が必要となり、何らかの手法によって時間領域の基本特異解もしくは影響関数を得る必要がある。

周波数領域から時間領域への変換にはFourier逆変換を用いればよいことは明白であるが、周波数領域基本特異解から高速Fourier変換などの数値的手法をそのまま適用して逆変換を行うことが困難である。筆者らは、得られた周波数領域の基本特異解から、時間領域の基本特異解および影響関数を数値的に求める手法について検討してきた¹⁾。ここで弾性問題について開発した手法は、粘弾性面外波動問題についても適用できることを示してきた²⁾。また、基本特異解がテンソル性を有する場合においても、同様の手法が適用できることはすでに示してある³⁾。

本論文では、これらの検討をふまえた上で、粘弾性波動問題だけでなく同様の解表現を持つ他の散逸性物体における波動問題についての時間領域境界要素法の数値的構成法の一般的適用について検討している。先に報告した論文における数値例は、境界上での離散化にスプライン関数を用いていたが、本論文では区分線形関数を用いた数値解析を行っており、より一般性の高い問題に本手法の適用が可能であることを示している。本論文の数値解析例から、粘弾性波動伝播問題の時間領域境界要素法解析が可能であることが示され、時間領域で基本特異解が求められない場合における、手法の適用性が検証される。

2. 2次元粘弾性波動問題

まず、粘弾性波動問題を定式化する。媒体として境界 ∂B で囲まれた、等方等質の2次元粘弾性体 B を考える。座標系を直角直行座標系とし、変数の添え字 (1, 2, 3) はそれぞれ座標軸に沿った変数を表すものとする。数式中の太字はベクトルもしくはテンソル量を表す。2次元波動問題では、波の振動が進行方向と同一の面内問題と、波の振動が進行方向に対して垂直になる面外問題とが想定できる。

2.1 時間領域問題

まず、時間領域面内波動問題の定式化を行う。領域 B における線形粘弾性面内波動問題の基礎方程式は、物体力が存在しないと仮定する場合、変位 $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$ について、つぎのように表される。

$$G * d(\nabla^2 \mathbf{u}) + (K + \frac{G}{3}) * d(\nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1)$$

ここに ρ は媒体 B の密度である。 ∇ はナブラ演算子、 ∇^2 はラプラシアン演算子である。 $K(t)$, $G(t)$ はそれぞれ体積緩和関数、せん断緩和関数である。それぞれの緩和関数は、与えられた粘弾性体の時間軸上での変形特性を表す量であり、波動が到達する時点 ($t = 0$) 以前には物体は静止しているため、不遡及の公理

$$K(t) = 0, \quad G(t) = 0 \quad -\infty < t < 0$$

を満足する必要がある⁴⁾。なお $f * dg$ は、繰り込み積

$$f * dg = \int_0^t f(t - \tau) \frac{dg}{d\tau} d\tau + f(t)g(0)$$

を表すものとする。

同様に、面外波動問題については、変位 u_3 について、次の基礎方程式が与えられる。

$$G * d(\nabla^2 u_3) = \rho \ddot{u}_3 \quad (2)$$

面内問題および面外問題について、それぞれ初期条件

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$$u_3(\mathbf{x}, 0) = u_3^0(\mathbf{x}) \quad \dot{u}_3(\mathbf{x}, 0) = v_3^0(\mathbf{x}) \quad (4)$$

および境界条件

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t)$$

$$u_3(\mathbf{x}, t) = \hat{u}_3(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

$$s_3(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 = \hat{s}_3(\mathbf{x}, t)$$

を与えることができる。ここに、 $\mathbf{n}$ は境界 ∂B での外向き法線ベクトルであり、 $\mathbf{u}^0 = \{u_1^0, u_2^0\}$, $\mathbf{v}^0 = \{v_1^0, v_2^0\}$, および u_3^0 , v_3^0 はそれぞれ与えられる初期値、 $\hat{\mathbf{u}} = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$, $\hat{\mathbf{s}} = \{\hat{s}_1, \hat{s}_2\}$, および $\hat{u}_3$, $\hat{s}_3$ はそれぞれ与えられる境界値である。境界応力 $\mathbf{s}$, s_3 は、法線ベクトルおよび応力 $\boldsymbol{\sigma}$ および $\boldsymbol{\sigma}_3$ から得られる。面内問題についての応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{u}] \\ &= (K - \frac{2}{3}G) * d(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + G * d(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ここに、 $\mathbf{I}$ は恒等テンソルを表す。面外問題について $\boldsymbol{\sigma}_3$ は

$$\boldsymbol{\sigma}_3 = G * d(\nabla u_3) \quad (8)$$

より与えられる。

2.2 周波数領域問題

与えられた時間領域での基礎方程式から、Fourier 変換を用いて、周波数領域の粘弾性波動問題を示し、基礎方程式の基本特異解を導いていく。ここで、Fourier 変換およびその逆変換を次のように定義する。

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= \mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[f^*] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (9)$$

このような定義のもとに、時間領域における2次元粘弾性波動問題の基礎方程式(1)および(2)を Fourier 変換すると、周波数領域における基礎方程式が以下のように導ける。

まず、面内問題については、基礎方程式(1)より、Fourier 変換された変位 $\mathbf{u}^*(\omega)$ について

$$G^* \nabla^2 \mathbf{u}^* + (K^* + \frac{G^*}{3}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^* = -\rho \omega^2 \mathbf{u}^* \quad (10)$$

が得られる。同様に面外問題では、基礎方程式(2)より、変位 $u_3^*(\omega)$ について

$$G^* \nabla^2 u_3^* = -\rho \omega^2 u_3^* \quad (11)$$

より周波数領域における基礎方程式が与えられる。ここに $K^*(\omega) = -i\omega \mathcal{F}[K(t)]$, $G^*(\omega) = -i\omega \mathcal{F}[G(t)]$ はそれぞれ複素体積弾性係数、複素せん断弾性係数である。

応力についてはそれぞれ次のように表される。まず、面内問題については、式(7)を Fourier 変換すると、

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (K^* - \frac{2}{3}G^*) \nabla \cdot \mathbf{u}^* \mathbf{I} + G^* (\nabla \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \nabla) \quad (12)$$

となり、面外問題については、式(8)より

$$\sigma_3^* = G^* \nabla u_3^* \quad (13)$$

となる。

周波数領域における2次元粘弾性波動問題の基礎方程式(10)および(11)は、2次元弾性波動問題の基礎方程式と全く同様に表される。粘弾性波動問題では、弾性係数が複素数となっているだけの違いである。よって、周波数領域においては、粘弾性波動問題についての基本特異解を求めることは容易である。つまり、面内問題の基本特異解は、弾性波動問題の基本特異解においてそのパラメータを複素数とするのみで求められる。面外問題では、Helmholtz 型の方程式であるので基本特異解を得るのはたやすい。

以上より、面内問題についての基本特異解を表すと

$$G^*(x; y|\omega) = [E][F]\{C^*\} \quad (14)$$

となる。基本特異解(14)は、2次元弾性波動問題と同様に、Hörmander の方法で得られる⁵⁾。ここでは、幾何学的成分と波の成分とを、 $[E]$ と $\{C^*\}$ とに分けて表現している。 $[F]$ はこれらに関係づける行列である。

$[E]$ および $[F]$ は、それぞれ次のように表せる。

$$[E] = \begin{bmatrix} I & \nabla r \nabla r \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

式(15)において、 $[E]$ および $[F]$ は、共に周波数 ω に依存しないことに注意されたい。ここに、 $r = \|x - y\|$ は x と y との距離である。波の特性を表す量 $\{C^*\}$ は

$$\{C^*\} = \frac{i}{4G^*} \begin{Bmatrix} \kappa^2 H_0^{(1)}(k_L r) \\ H_0^{(1)}(k_T r) \\ \frac{H_1^{(1)}(k_L r)}{k_T r} - \kappa^2 \frac{H_1^{(1)}(k_L r)}{k_L r} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

となる。ここに $\kappa^2 = k_L^2/k_T^2$ であり、 k_L , k_T はそれぞれ縦波の波数、横波の波数である。また、 $H_0^{(1)}$ は第一種 0 次の Hankel 関数、 $H_1^{(1)}$ は第一種 1 次の Hankel 関数である。 $\{C^*\}$ の第一成分が縦波を、第二成分が横波、第三成分が遷移波をそれぞれ表している。

面外問題についての基本特異解は、

$$G_{33}^*(x; y|\omega) = \frac{i}{4G^*} H_0^{(1)}(k_T r) \quad (17)$$

と表される。

3. 時間領域境界要素法の構成

一般に、時間領域境界要素法を定式化するためには、与えられた基礎方程式に関する時間領域の基本特異解が必要となる。粘弾性波動問題では時間領域基本特異解が解析的に閉じた形で得られない。

筆者らは、Fourier 逆変換を直接数値積分することにより、それら基本特異解が数値的に得られることを示した^{2),3)}。これらの基本特異解は、弾性波動問題の基本特異解と、その関数の特異性が同等である。そこで、数値的に得られた基本特異解を用いれば、粘弾性波動問題の境界要素法の定式化についても、弾性波動問題と同様に扱うことができるといえる。

本節では、このように基本特異解が与えられるものとして、粘弾性波動問題の境界要素法を定式化することを試みる。

3.1 面内波動問題の時間領域境界要素法

粘弾性波動における初期値境界値問題に対する境界積分方程式は、一般化された Green 公式⁶⁾により、境界 ∂B 上で以下のように与えられる。面内問題については、基礎方程式(1) および初期条件(3)、境界条件(5)より、境界が十分に滑らかな場合、境界積分方程式

$$\frac{I}{2} \cdot u(x, t) = \bar{u}(x, t) - \int_{\partial B} S(x; y|t) \star u(y, t) + \int_{\partial B} G(x; y|t) \star s(y, t) ds_y \quad (18)$$

が得られる。ここに、 $\bar{u}$ は入射進行波ならびに初期値によって決まる項である。また、 $f(t) \star g(t)$ は内積を含んだ繰り込み積

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau$$

を表すものとする。

$S(x; y|t)$ は第二基本特異解であり、応力の定義より導くことができる。面内問題について $S(x; y|t)$ は、応力の定義式(7)より以下となる。

$$S(x; y|t) = \{n \cdot \Sigma[G(x; y|t)]\}^T$$

境界積分方程式(18)に適当な離散化を行うと、解くべき離散方程式が求められる。そこで、面内波動問題について、境界上で得られる変位 u および境界応力 s について、離散化を次のようにする。

$$u(x, t) = \sum_m \sum_K \psi_K^u(t) \phi_m(x) u_m^K$$

$$s(x, t) = \sum_m \sum_K \psi_K^s(t) \phi_m(x) s_m^K \quad (19)$$

ここに、 $\psi_K(t)$ および $\phi_m(x)$ は、それぞれ時間および空間の離散基底関数であり、 u_m^K および s_m^K はそれぞ

れ、節点における変位および応力の離散値である。空間上の離散基底関数 ϕ_m は、変位および境界応力について同じものを用い、時間上の離散基底 ψ_K に関しては、変位の離散基底 ψ_K^u と、応力の離散基底 ψ_K^s とはそれぞれ別のものを用いれるようにした。

これらの離散近似 (19) を境界積分方程式 (18) に代入し、選点法を用いると、面内波動問題についての解くべき離散方程式が得られる。

$$\frac{I}{2} \cdot u = \bar{u} + \sum_m \sum_K \{ [A]_m^K s_m^K - [B]_m^K u_m^K \} \quad (20)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [A]_m^K &= \int_{\partial B} [G(x; y|t) * \psi_K^s] \phi_m ds_y \\ [B]_m^K &= \int_{\partial B} [S(x; y|t) * \psi_K^u] \phi_m ds_y \end{aligned} \quad (21)$$

であり、式 (21) の被積分関数が影響関数である。

3.2 面外波動問題の時間領域境界要素法

粘弾性面外波動問題の時間領域境界要素法も面内問題と同様の手法で導くことができる。式 (2) および初期条件 (4)、境界条件 (6) より、面内問題の境界積分方程式は次のように得られる⁵⁾。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_3(x, t) &= \bar{u}_3(x, t) - \int_{\partial B} S_{33}(x; y|t) * u_3(y, t) \\ &+ \int_{\partial B} G_{33}(x; y|t) * s_3(y) ds_y \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、 $\bar{u}_3$ は入射進行波ならびに初期値によって決まる項である。 $S_{33}(x; y|t)$ は、式 (7) より

$$S_{33}(x; y|t) = n \cdot (G * \nabla G_{33}(x; y|t))$$

と表される第二基本特異解である。

境界積分方程式 (22) から、面内問題の定式化と同様の手順で離散方程式を求める。離散近似を

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= \sum_m \sum_K \psi_K^u(t) \phi_m(x) \{u_3\}_m^K \\ s_3(x, t) &= \sum_m \sum_K \psi_K^s(t) \phi_m(x) \{s_3\}_m^K \end{aligned} \quad (23)$$

とする。近似基底関数 ψ および ϕ は、それぞれ面内波動問題の離散化で用いた量と同じである。離散近似 (23) を境界積分方程式 (22) に代入すると、離散方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_3 &= \bar{u}_3 \\ &+ \sum_m \sum_K \{ [A_{33}]_m^K \{s_3\}_m^K - [B_{33}]_m^K \{u_3\}_m^K \} \end{aligned} \quad (24)$$

が得られる。面外問題の影響関数は

$$\begin{aligned} [A_{33}]_m^K &= \int_{\partial B} [G_{33}(x; y|t) * \psi_K^s] \phi_m ds_y \\ [B_{33}]_m^K &= \int_{\partial B} [S_{33}(x; y|t) * \psi_K^u] \phi_m ds_y \end{aligned} \quad (25)$$

の被積分関数である。

4. 影響関数の数値計算手法

時間領域境界要素法の定式化より、粘弾性波動問題を時間領域で解析するためには、影響関数を具体的に求める必要がある。この影響関数を解析的に求めることは容易ではない。以下に、数値的手段による境界要素法の影響関数を求める手法について示す。

面内波動問題を例にとると、影響関数 $[A]_m^K$ および $[B]_m^K$ の積分核のうち、角振動数 ω に関係する量は、空間上での離散基底 ϕ_m をのぞいたものである。よって影響関数を Fourier 逆変換する際には、くりこみ積分の Fourier 変換を考慮すると、必要となる数値計算は、

$$\begin{aligned} G(x; y|t) * \psi_K^s &= \mathcal{F}^{-1} [G^*(x; y|\omega) \mathcal{F} [\psi_K^s]] \\ S(x; y|t) * \psi_K^u &= \mathcal{F}^{-1} [S^*(x; y|\omega) \mathcal{F} [\psi_K^u]] \end{aligned} \quad (26)$$

となる。これらの関数のうち、 $G(x; y|t) * \psi_K^s$ を一重層核、 $S(x; y|t) * \psi_K^u$ を二重層核と呼んでおこう。 ψ_K^s および ψ_K^u を具体的に決定できれば、これらの変換が数値的に可能となる。

そこで、時間上での離散近似について、変位 u および境界応力 s にそれぞれ区間線形近似および階段関数近似を導入してみる。変位については時間軸上での連続性を保つ必要があるが、この条件を満足する最も簡単な近似として区分線形近似を採用している。一方、変位を区分線形としているため、その勾配は各時間ステップで不連続となるため応力の離散近似は不連続性を有する近似を採用する必要がある。このような離散化を行うと、それぞれの離散基底 ψ_K^u, ψ_K^s は

$$\begin{aligned} \psi_K^u(t) &= 1 - \frac{|t - K\Delta t|}{\Delta t}, \\ (K-1)\Delta t &\leq t \leq (K+1)\Delta t \end{aligned} \quad (27)$$

および

$$\psi_K^s(t) = 1, \quad (K-1)\Delta t \leq t \leq K\Delta t \quad (28)$$

と表せる。これら基底関数の Fourier 変換を求めれば、影響関数 $[A]_m^K$ および $[B]_m^K$ の積分核が具体的に決定でき、時間領域境界要素法を構成できる。

数値積分によって式 (26) を Fourier 逆変換するため、半無限区間の振動積分に用いられる手法⁹⁾を適用す

る。粘弾性波動問題における周波数領域基本特異解は、面内波動問題および面外波動問題において、Hankel 関数の組み合わせにより構成される。これらの組み合わせは、2次元波動問題の基本特異解の性質であり、飽和多孔質弾性体の波動問題においても同様の解表現をとる⁸⁾。そこで、

$$\mathcal{F}^{-1} \left[C_\omega H_n^{(1)}(k_\omega r) \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[C_\omega H_n^{(1)}(k_\omega r) e^{-i\omega t} \right] d\omega \quad (29)$$

について数値積分手法を検討してみる。ここに、 $H_n^{(1)}$ は第一種 n 次 Hankel 関数である。 C_ω は $\omega \rightarrow \infty$ において $C_\omega = \text{一定}$ となるような実数関数とする。また、 k_ω は波数であり、角周波数 ω に依存する複素数であると仮定する。

式(29)の被積分関数

$$f(\omega) = \operatorname{Re} \left[C_\omega H_n^{(1)}(k_\omega r) e^{-i\omega t} \right]$$

は、周波数軸に沿って振動している関数である。そこで、Fourier 変換による半無限領域積分 I を得るには、被積分関数 $f(\omega)$ 根を用いて積分区間を分割し、それぞれの区間ごとの積分値 I_k の総和

$$I = \mathcal{F}^{-1} \left[C_\omega H_n^{(1)}(k_\omega r) \right] = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} I_k \quad (30)$$

として、積分値を得る手法が検討できる。ここに、 I_k は $f(\omega) = 0$ の根 ω_k を用いて、

$$I_0 = \int_0^{\omega_0} f(\omega) d\omega, \quad I_k = \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f(\omega) d\omega$$

と表される。

このような近似関数の周期ごとの積分を考えると、角周波数が大きい範囲では、その値はそれぞれ打ち消しあってほとんど 0 と見なすことができると予想される。また、変換して得られる時間領域関数は実数関数となるので、Fourier 逆変換ではその対象性を用いることで計算を簡略化できる。

ここで示した Fourier 逆変換手法では、被積分関数の各根の間における区間積分値が必要である。そこでまず、 I_k について考察してみよう。ハンケル関数の引数 z が十分大きい場合の漸近展開式から、式(29)の積分核は w が十分大きい場合には

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[C_\omega H_n^{(1)}(k_\omega r) e^{-i\omega t} \right] &\simeq \operatorname{Re} \left[C_\omega \sqrt{\frac{2}{\pi k_\omega r}} e^{-i \left\{ \omega t - k_\omega r + \frac{2n+1}{4} \right\}} \right] \\ &= C_\omega \sqrt{\frac{2}{\pi |k_\omega| r}} e^{-|k_\omega| r \sin \delta_\omega} \cos \Phi(\omega, t) \end{aligned} \quad (31)$$

となる。ここに、 δ_ω は、波数 k_ω の偏角である。式(31)のように、被積分関数 $f(\omega)$ は、振動部分と減衰部分とに分割して考えられる。振動部分の引数 $\Phi(\omega, t)$ は

$$\Phi(\omega, t) = \omega t - |k_\omega| r \cos \delta_\omega + \frac{\delta_\omega}{2} + \frac{2n+1}{4}$$

である。よって、被積分関数の根 ω_k は、 $\cos \Phi(\omega_k, t) = 0$ の解より求めることができる。このようにして得られた、区間積分値 I_k は交代級数となる。

つぎに、 I_0 について考察しておこう。周波数領域での基本特異解の性格を考慮すると、一般に $\omega = 0$ で特異性を有する可能性がある。そこで、区間積分値

$$I_0 = \int_0^{\omega_0} \operatorname{Re} \left[C_\omega H_n^{(1)}(k_\omega r) e^{-i\omega t} \right] d\omega$$

は、区間積分 I_k を求める積分計算と同一で扱うことはせず、特異積分などに対応した積分公式が必要になる。

数値計算においては、 I_k の計算には Romberg 積分などの数値積分法が適用できる。また、求める積分値 I は無限級数の和である。絶対値の収束は極めて遅いが、交番級数なので、いくつかの加速法⁹⁾によって計算速度の向上が見込まれる。

ここで示す数値計算手法は、粘弾性波動問題に適用が限定されるものではない。数値積分における被積分関数は、角周波数に依存する減衰性成分と Hankel 関数との組み合わせを含む形で表現しており、2次元粘弾性波動問題の周波数領域基本特異解と同様の解表現を持つ他の散逸性物体に対しても適用できる。

4.1 一重層核の数値計算手法

基底関数 ψ_K^s の Fourier 変換は、定義(9)および式(28)より

$$\mathcal{F}[\psi_K^s(t)] = \Delta t \frac{\sin(\omega \Delta t / 2)}{\omega \Delta t / 2} e^{i\omega(K-1/2)\Delta t} \quad (32)$$

となる。これを影響関数の計算式(26)に代入して、全体を Fourier 逆変換すれば、求める積分値を得る。

よって、一重層核を得るには、

$$\begin{aligned} G(x; y|t) * \psi_K^s &= \frac{\Delta t}{\pi} \int_0^\infty G(x; y) \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\omega \Delta t / 2} e^{-i\omega \{t - (K-1/2)\Delta t\}} d\omega \\ &= P(\omega, \hat{t}) - P(\omega, \hat{t} - \Delta t) \end{aligned} \quad (33)$$

を計算すればよいことになる。ここで $\hat{t} = t - (K-1)\Delta t$ とした。 $P(\omega, \hat{t})$ は

$$P(\omega, \hat{t}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{i}{\omega} G(x; y) e^{-i\omega \hat{t}} d\omega$$

となる。ここで得られた関数 $P(\omega, t)$ の周波数軸上での根をそれぞれ求めれば、それぞれの根と根との間の区間積分値は容易に得ることができる。このようにして求めた区間積分値の級数和をとることにより、 $P(\omega, t)$ の Fourier 逆変換が得られる。

上記の手法により一重層核が得られるが、若干の注意が必要となる。 $P(\omega, t)$ の積分核は、 $\omega \rightarrow 0$ の付近において特異性が強くなるため、周波数原点から最初の根までの区間積分値を求めることが困難である。よって ω が小さい場合には、式(33)を直接数値積分するほうが都合がよい。しかしながら ω が十分に大きくなれば $P(\omega, t)$ をそれぞれ求めて影響関数を得ることになる。

以上より、一重層影響関数を求めるには、式(33)の積分核の最初の根までは直接数値積分し、それ以降については $P(\omega, t)$ を、先に示した数値積分法を用いて積分値を求める、という方法をとる。また、波の到達時刻付近においては積分核の減少が穏やかになるだけでなく、周波数軸上での振動が見られなくなる。このような場合においては、二重指数関数などの積分公式を導入することで積分値を得ることができる。

図-1に、面内波動問題の一重層核 $G_{11}(x; y|t) * \psi_K^u$ を示す。媒体の粘弾性特性は、3要素標準線形個体⁴⁾に準じるものと仮定し、せん断弾性係数 G^* を

$$G^*(\omega) = G_R \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2}}$$

と与え、体積弾性係数は周波数軸上で一定値とした。ここに、 τ_σ , τ_ε はそれぞれ応力緩和時間、ひずみ緩和時間である。 G_R は緩和弾性定数であり、 $t \rightarrow \infty$ におけるせん断弾性係数となる。逆に $t \rightarrow 0$ における初期弾性定数 G_0 は

$$G_0 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G^*(\omega) = G_R \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}$$

と表される。計算例では、 $G_R/G_0 = 0.5$ となるようにパラメータを調整した。粘弾性効果の違いによる影響関数の変化を示すために、緩和弾性係数が $\tau_\sigma = 10T, T, 0.1T$ の場合の計算例を示している。緩和弾性係数の値が大きくなるに従い粘弾性効果が高まっている。ここに、 T は基準時間であり、十分緩和した後の縦波の波速 cLr を用いて $cLrT = 1.0$ とした。また、弾性係数が同等の弾性問題の一重層核を破線で示してある。図-1は、影響を受ける位置が荷重作用方向と同一方向の場合で、縦波が卓越している場合の結果である。図-1の上図には時間軸上でプロットし、下図には距離の変化による一重層核をプロットしてある。結果より、計算された一重層核は、応力緩和時間が大きくなるに従って弾性体に近づいており計算結果が妥当なものであることが示される。

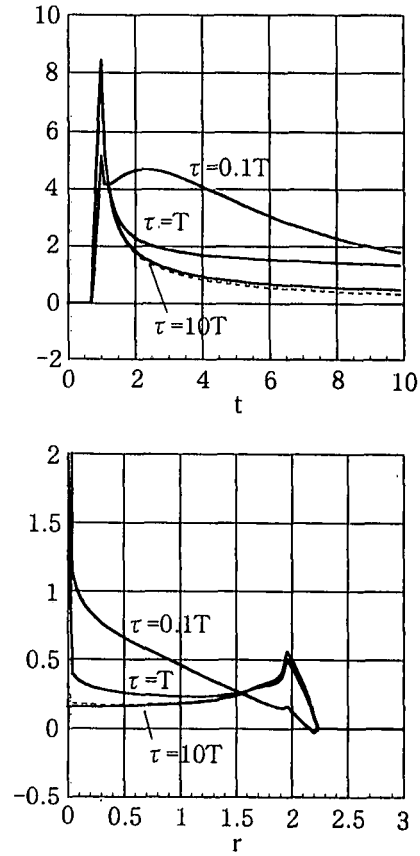


Fig.1 一重層核の数値計算例

4.2 二重層核の数値計算手法

基底関数 ψ_K^u の Fourier 変換は、

$$\mathcal{F}[\psi_K^u(t)] = \Delta t \left(\frac{\sin(\omega \Delta t / 2)}{\omega \Delta t / 2} \right)^2 e^{i\omega K \Delta t} \quad (34)$$

となる。よって、二重層核の計算式は次式となる。

$$\begin{aligned} S(x; y|t) * \psi_K^u &= \frac{\Delta t}{\pi} \int_0^\infty S(x; y) \frac{\sin^2(\frac{\omega \Delta t}{2})}{(\omega \Delta t / 2)^2} e^{-i\omega(t - K \Delta t)} d\omega \quad (35) \\ &= Q(\omega, \hat{t} + \Delta t) - 2Q(\omega, \hat{t}) - Q(\omega, \hat{t} - \Delta t) \end{aligned}$$

ここに、 $\hat{t} = t - K \Delta t$ である。 $Q(\omega, \hat{t})$ は

$$Q(\omega, \hat{t}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{-1}{\omega^2 \Delta t} S(x; y) e^{-i\omega \hat{t}} d\omega$$

となる。

ここで、一重層影響関数を数値的に求める際と同様の注意が必要である。つまり、式(35)の積分核の最初の根までは直接数値積分し、それ以降については、一重層影響関数を求めた際の数値積分手法により、 $Q(\omega, \hat{t})$ の積分値が得られる。また、波の到達時刻付近においては、

二重指数関数などの積分公式を導入することで積分値を得ることができる。

二重層核の計算に用いる基底関数 ψ_K^u は、区分線形関数であるので、第 N ステップにおいては特別な計算が必要となる。すなわち基底

$$\psi_K^u(t) = 1 + \frac{t - N\Delta t}{\Delta t} \quad (36)$$

$$(N-1)\Delta t \leq t \leq N\Delta t$$

についての数値積分を検討する必要がある。この Fourier 変換は

$$\mathcal{F}[\psi_K^u(t)] = \frac{i}{\omega} \left(i \frac{e^{-i\omega\Delta t} - 1}{\omega\Delta t} - 1 \right) e^{i\omega N\Delta t} \quad (37)$$

である。 $t = N\Delta t$ とし、式(26)に代入すると、

$$S(x; y|t) * \psi_K^u$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(x; y) \frac{i}{\omega} \left(i \frac{e^{-i\omega\Delta t} - 1}{\omega\Delta t} - 1 \right) d\omega \quad (38)$$

$$= Q(\omega, \Delta t) - Q^-(\omega, \Delta t)$$

となる。ここに、

$$Q^-(\omega, \Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{-(1 - i\omega\Delta t)}{\omega^2\Delta t} S(x; y) d\omega$$

である。 $Q(\omega, \Delta t)$, $Q^-(\omega, \Delta t)$ とともに、周波数が大きい場合については先の数値積分手法を用いて計算が可能である。以上より、二重層影響関数についても本論文で示す数値 Fourier 逆変換の手法を用いて数値積分が可能である。

面内波動問題の二重層核 $S_{11}(x; y|t) * \psi_K^u$ の計算例を、図-2に示す。媒体の粘弾性特性は、一重層核の計算例と同様に3要素標準線形個体に準じるものと仮定し、緩和弾性係数 G_R と初期弾性係数 G_0 との比は $G_R/G_0 = 0.5$ とした。図中には粘弾性効果が強い場合と弱い場合についての計算例をプロットしてある。また、弾性係数が同等の弾性問題の二重層核を破線で示してある。

5. 散乱問題についての適用例

粘弾性波動伝播問題の時間領域境界要素法解析への適用例として、面外波動問題の時間領域解を示しておく。本論文で示した数値計算手法の一般的適用性を検証するために、著者らがこれまでに示した数値計算例^{2),3)}と異なり、空間上での離散基底関数 ϕ を区分線形関数とした。そこで、無限媒体中の方状空洞による散乱問題を取り扱うものとする。入射進行波は、散乱体への

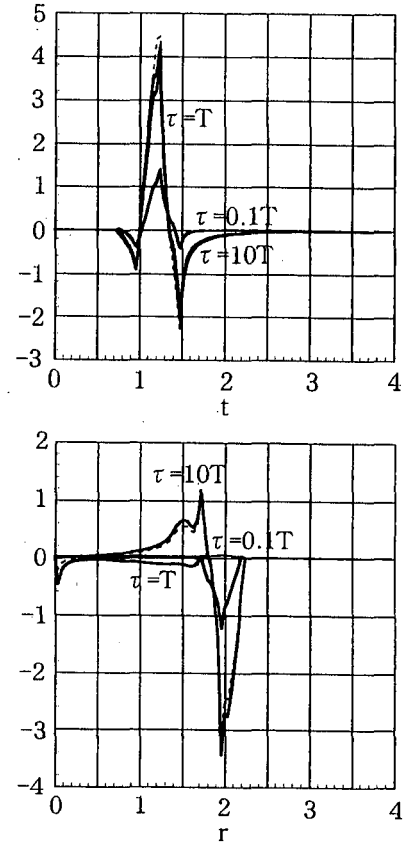


Fig.2 二重層核の数値計算例

入射時刻において応力が発散しないように、Ricker のウェーブレット¹⁰⁾を粘弾性波動に適応するように修正して用いている。すなわち、ウェーブレットを求める際に、波数などのパラメータを対象とする粘弾性体にあわせ、複素数として計算を行っている。媒体の粘弾性特性は、3要素標準線形個体に準じるものと仮定し、緩和弾性係数 G_R と初期弾性係数 G_0 との比は $G_R/G_0 = 0.5$ とした。

図-3-図5に、 x_1 軸方法に進行する入射波による空洞境界上での変位の解析結果を示す。境界分割は32分割とし、方形空洞一片をそれぞれ8個の要素に分割している。それぞれの解析結果では、応力緩和時間 τ_σ が異なっており、図-3では $\tau_\sigma = 10T$ 、図-4では $\tau_\sigma = T$ 、図-5では $\tau_\sigma = 0.1T$ とした。ここに、 T は縦波が空洞を通過するのにかかる時間であり、十分緩和した後の縦波の波速 cLr より $T = 2a/cLr$ となる。それぞれの解析例において、時間ステップ Δt は、 $\Delta t = T/4$ とした。

応力緩和時間が異なるため、図-3、図-4、図-5の順で粘弾性効果が強くなっている。方状空洞は一辺 $2a$ の正方形とし、図に示すように境界上での解は A 点、B 点、C 点を選び、境界上の x_3 方向変位の時間履歴をそれぞれプロットしてある。

図-3-図-5より、応力緩和時間が長く、粘弾性効果が弱

いほど粘弾性効果が現るのが遅くなり、境界上での応答は弾性体の場合とほぼ同様になっていく。粘性効果が強くなると、変位応答の絶対値は小さくなり、波の速度が遅くなっていることが示される。これらの結果より、本論文で示した粘弾性波動伝播問題の境界要素法による時間領域解析の妥当性が示される。

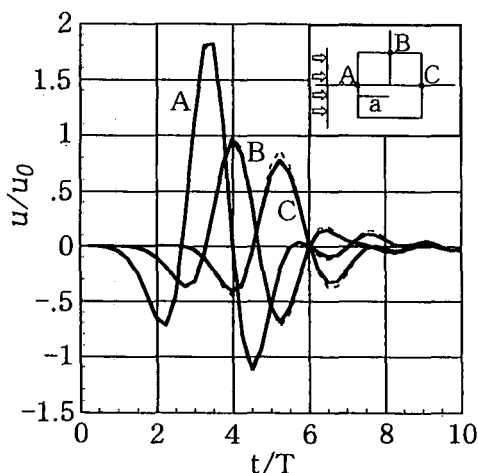


Fig.3 散乱問題の境界変位: $\tau_\sigma = 10T$

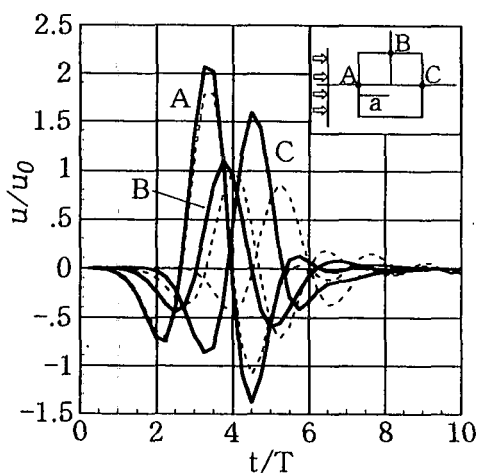


Fig.4 散乱問題の境界変位: $\tau_\sigma = T$

6. おわりに

本論文では、2次元粘弾性波動伝播問題の時間領域境界要素法を定式化し、境界要素法を数値的に構成して解を得る手法について示した。

境界要素法の構成には、時間軸上での離散化基底を含んだ影響関数が必要であるが、それら影響関数を求めるには基本特異解が必要となる。2次元粘弾性波動問題では、時間領域における基本特異解が解析的に得られていない。そこで、周波数領域の基本特異解を用いて影響関数を数値的に Fourier 逆変換することで、時間領域境界要素法を構成している。数値例として、面外波動問題および面内波動問題に適用した解析例を示すことで、

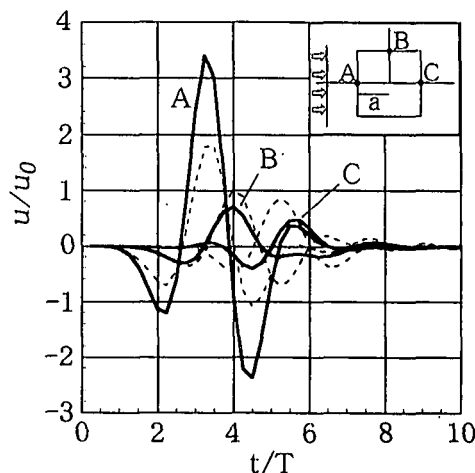


Fig.5 散乱問題の境界変位: $\tau_\sigma = 0.1T$

手法の妥当性が検証された。

本論文では数値解析手法を示す際に、粘弾性波動伝播問題のみに適用されるのではなく、一般性を持たせるような形式での定式化を行っている。したがって、同様の解表現を持つ種々の波動伝播問題に適用が可能であろう。飽和多孔質弾性体における波動伝播問題など、時間領域において解析的に閉じた形で基本特異解が得るのが容易でない問題に本手法を適用することで、さらに広い範囲の問題を直接時間領域で解析が可能となる。

参考文献

- 1) 福井卓雄, 船戸慶輔: 数値積分変換による時間領域境界要素法の構成, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第19巻, pp.49-54, 1995.
- 2) 福井卓雄, 船戸慶輔: 粘弾性面外波動問題の時間領域境界要素法による解析, 境界要素法論文集, 第12巻, pp.69-74, 1995.
- 3) 福井卓雄, 船戸慶輔, 井上耕一: 粘弾性面内波動問題の時間領域境界要素法, BEM・テクノロジー・コンフェレンス論文集, 第6巻, pp.1-6, 1996.
- 4) ファン, Y.C.: 固体の力学/理論, 大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生 共訳, 培風館, 1970.
- 5) 境界要素法研究会編: 境界要素法の理論と応用, コロナ社, 1986.
- 6) Achenbach, J.D.: Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, 1975.
- 7) 長野直樹: 数値微分積分法, 現代数学社, 1987.
- 8) 福井卓雄, 船戸慶輔, 井上耕一: Biot 物体中における波動問題の周波数領域境界要素法解析, 境界要素法論文集, 13, (1996), pp.149-152.
- 9) 黒木健夫: 計算力学における数値積分の応用, 森北出版, (1991).
- 10) Ricker, N.: The computation of output disturbances from amplifiers for true wavelet inputs, *Geophysics*, Vol.10, pp.207-220, 1945.

(1999年4月23日 受付)