

異方性材料中の様々な欠陥による散乱特性

Scattering Characteristics by Various Defects in Anisotropic Materials

廣瀬 壮一*・桂 健太郎**

Sohichi HIROSE and Kentaro KATSURA

*正会員 工博 東京工業大学大学院教授 情報理工学研究科情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

**学生会員 東京工業大学大学院理工学研究科 (〒1520-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

Since scattering and propagation of elastic waves in anisotropic materials are quite different from those in isotropic materials, it is necessary to investigate scattering characteristics for quantitative nondestructive evaluation of anisotropic materials. In this study, a time domain boundary element method is developed with use of fundamental solutions for a general anisotropic solid. The boundary element method is applied to the scattering of elastic waves by various defects such as a cavity and an inclusion, and the radiation patterns and phases of scattering waves are discussed.

Key Words : scattering, anisotropic solid, boundary element method, fundamental solutions

1. はじめに

異方弾性体における弾性波速度は波動の進行方向によって変化するため、異方弾性体における弾性波動の散乱・伝播特性は等方弾性体における特性とはかなり異なったものとなる。しかし、一般に超音波探傷試験に用いられる探触子は、試験体が均質等方なものであると仮定して、設計されている。したがって、そのような探触子を用いて複合材料、TMCP 鋼板、アルミニウム合金などの異方性材料の超音波探傷試験を行なった場合、探傷角度によって屈折角やエコー高さが変化し、超音波探傷試験の精度が低下したり、時には十分な散乱エコーが得られずに欠陥を見落としてしまう可能性もある。よって、異方弾性体に対する超音波非破壊評価法の定量化・高精度化を進めるにあたり、異方性材料における弾性波動の散乱解析を行なうことは必須であると言える。

従来より、異方性材料中における超音波の伝播特性に関する解析的研究は多く行なわれてきた。特に、複合材料の非破壊評価を目的として、層状異方弾性体での波動特性については多くの解析的研究がある^{1),2)}。また、数値解析手法としても波線理論や差分法など様々なものが提案されているが³⁾⁻⁶⁾、これらの研究の多くは異方弾性体内の超音波の伝播特性あるいは平面境界における反射特性に関するもので、欠陥を含めた散乱・伝播特性については十分に解明されていない。そこで本研究では、境界要素法を用いて無限弾性体中における様々な欠陥による散乱問題を解析するものである。

境界要素法による異方弾性体の動的解析としては、西村らによる研究がある^{7),8)}。彼らは時間域の2次元動弾性問題の基本解を陽な形で求め、それを用いて様々

な境界条件のもとでの半無限弾性体内の動弾性場の解析やクラックの動的挙動の解析を行なっている。

一方、Wangら⁹⁾はラドン変換による基本解を用いた境界要素法によって、異方弾性体内の空洞による散乱問題を解析している。Wangらが用いた動的な基本解は単位円上の積分を残した積分形となっているが、3次元問題や半無限問題への拡張性を持っているので、本研究では2次元問題を扱うものの、Wangらの定式化に従って解析を進め、無限異方弾性体中の様々な欠陥による平面波の散乱特性を明らかにする。

2. 基礎式

(x_1, x_2, x_3) の直交座標系における波動場が座標 x_3 には無関係であると仮定して、均質、異方、線形な弾性体での2次元動弾性問題を考える。このとき、変位場 u_j は次式を満足する。

$$\{\Gamma_{ij}(\partial_1, \partial_2) - \rho \delta_{ij} \partial_t^2\} u_j(x, t) = 0 \quad (1)$$

である。ただし、

$$\Gamma_{ij}(\partial_1, \partial_2) = c_{i\alpha j\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \quad (2)$$

であり、 ρ は密度、 $c_{i\alpha j\beta}$ は、 $c_{i\alpha j\beta} = c_{aij\beta} = c_{i\alpha j\beta} = c_{j\beta i\alpha}$ なる性質を持つ弾性定数である。上式ならびにこれ以降において、 i, j などのローマ文字の指標は1,2,3の値をとり、 α, β などのギリシャ文字の指標は1,2をとるものとする。

さて、図-1に示すような均質、異方、線形な無限弾性体 D 内の散乱体 $\bar{D}$ による散乱問題を考える。領域 D における全変位場 u_j^{sc} は、入射波 u_j^{in} と散乱体 $\bar{D}$ による散乱波 u_j^{sc} の重ね合わせとして次のように表わすこと

ができる。

$$u_i^{to} = u_i^{in} + u_i^{sc} \quad (3)$$

u_i^{to} , u_i^{in} , u_i^{sc} の各波動成分はいずれも式(1)を満足する。解くべき問題は、入射波 u_i^{in} が与えられ、以下に示す初期条件と境界条件が与えられた時に、式(1)を満足する散乱場 u_i^{sc} あるいは全変位場 u_i^{to} を求めるものである。

入射波が空洞に到達する以前には散乱波 u_i^{sc} は存在しない。よって、

$$u_i^{sc}(x, t) = 0 \quad \text{for } t < 0 \quad (4)$$

なる初期条件が与えられる。

散乱体 $\bar{D}$ の境界 ∂D 上では散乱体の種類に応じて何らかの境界条件が課せられる。例えば、散乱体が空洞であるときは ∂D 上で全表面力がゼロである。よって、その境界条件は次式によって与えられる。

$$t_i^{to}(x, t) \equiv e_\alpha(x) c_{i\alpha k\beta} u_{k,\beta}(x, t) = 0, \quad x \in \partial D \quad (5)$$

ここに、 $e_\alpha(x)$ は点 x での外向き法線ベクトル成分である。もし、散乱体 $\bar{D}$ が介在物で、界面 ∂D において D と $\bar{D}$ が完全に接合しているとすると、

$$u_i^{to}(x, t) = \bar{u}_i^{to}(x, t), \quad t_i^{to}(x, t) = \bar{t}_i^{to}(x, t), \quad x \in \partial D \quad (6)$$

なる連続条件が与えられる。ここに、バー(−)は介在物側における量を示している。

さらに、散乱波は無限遠方において外向き方向の波動のみからなるという放射条件¹⁰⁾を満足しなければならない。これは無限遠方での境界条件に相当するものである。

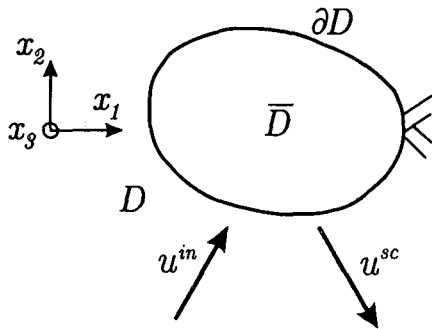


図-1 無限弾性体における弾性波動の散乱。

3. 基本解

境界積分方程式を構成するために、次の支配方程式と初期条件 ($g_{ij}(x, t) = 0, t < 0$) ならびに無限遠方での放射条件を満足する基本解 g_{ij} を定義する。

$$\{\Gamma_{pi}(\partial_1, \partial_2) - \rho \delta_{pi} \partial_t^2\} g_{ij}(x, t) = -\delta_{pj} \delta(x) \delta(t) \quad (7)$$

Wang and Achenbach¹¹⁾は、ラドン変換を用いて上式を満足する基本解を任意関数 $f(t)$ との合成積の形で、

次のように求めている。

$$\begin{aligned} g_{ij}(x, t) * f(t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^L \frac{P_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} \left\{ \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{c_\ell \tau + n \cdot x} d\tau \right\} dn \\ &= g_{ij}^S(x) f(t) + g_{ij}^R(x, t) * f(t) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 g_{ij}^S と g_{ij}^R は、それぞれ静弾性問題に対する特異基本解と動的正則部であり、次式によって与えられる。

$$g_{ij}^S(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^L \frac{P_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} \log |n \cdot x| dn \quad (9)$$

$$g_{ij}^R(x, t) = \frac{H(t)}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^L \frac{P_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} \log |c_\ell t + n \cdot x| dn \quad (10)$$

ここに、 $P_{ij}^\ell = E_{i\ell} E_{j\ell}$ であり、 ρc_ℓ^2 と $E_{i\ell}$ は

$$\{\Gamma_{pi}(n_1, n_2) - \rho c_\ell^2 \delta_{pi}\} E_{i\ell} = 0, \quad (\ell = 1, \dots, L) \quad (11)$$

を満たす固有値と固有ベクトルである。また、 L は異なる固有値 ρc_ℓ^2 の数を表す。

式(7)より明らかなように、 g_{ij} は時刻0、座標原点において x_j 方向に作用する集中衝撃力によって時刻 t 、点 x において生じる x_i 方向の変位を表す。一方、

$$h_{ij}(x, t) = c_{i\alpha p\beta} e_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_\beta} g_{pj}(x, t) \quad (12)$$

によって定義される h_{ij} は同様な集中衝撃力による時刻 t 、点 x における x_i 方向の表面力を定義する。 h_{ij} と任意関数 $f(t)$ との合成積は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} h_{ij}(x, t) * f(t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^L \frac{Q_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} \\ &\times \left\{ \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{c_\ell \tau + n \cdot x} \right) f(t-\tau) d\tau \right\} dn \\ &= h_{ij}^S(x) f(t) + h_{ij}^R(x, t) * f(t) \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、

$$h_{ij}^S(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^L \frac{Q_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} \frac{1}{n \cdot x} dn \quad (14)$$

$$h_{ij}^R(x, t) = \frac{H(t)}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^L \frac{Q_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} \log |c_\ell t + n \cdot x| dn \quad (15)$$

であり、 Q_{ij}^ℓ は

$$Q_{ij}^\ell = c_{i\alpha p\beta} e_\alpha(x) n_\beta P_{pj}^\ell(n) \quad (16)$$

である。なお、式(14)の積分は主値の意味における積分である。

式(14)に示すように、 h_{ij}^S は $1/|x|$ の特異性を持っているので、境界積分方程式の定式化において特別に取り扱う必要がある。すなわち、文献¹²⁾に従って、式(14)における単位円上の積分を解析的に評価し、次のよう

に表わしておく。

$$h_{ij}^S(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s_x} \text{Im} \sum_{\ell=1}^L \left[\frac{B_{ij}(\eta_\ell)}{\partial_\eta D(\eta_\ell)} \log(x_1 + \eta_\ell x_2) \right] \quad (17)$$

ここに、 $D(\eta) = \det[\Gamma_{ij}(1, \eta)]$ であり、 η_ℓ は $D(\eta_\ell) = 0$ の根のうち、 $\text{Im}(\eta) > 0$ を満たすものである。また、 s_x は点 x における接線方向を表わし、

$$B_{ij}(\eta) = (c_{i2p1} + c_{i2p2}) \text{adj}[\Gamma_{pj}(1, \eta)] \quad (18)$$

である。

4. 境界積分方程式とその離散化⁹⁾

前節で定義された基本解 g_{ij} とその表面力成分 h_{ij} を用いれば、図-1に示す領域 D における波動場に対して次の積分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & u_j^{\text{in}}(y, t) \\ & + \int_{\partial D} g_{ij}(x - y, t) * t_i^{\text{to}}(x, t) ds_x \\ & - \text{p.v.} \int_{\partial D} h_{ij}(x - y, t) * u_i^{\text{to}}(x, t) ds_x \\ & = \begin{cases} u_j^{\text{to}}(y, t) & y \in D, \\ c_{ij}(y) u_i^{\text{to}}(y, t) & y \in \partial D, \\ 0 & y \in \bar{D} \end{cases} \quad (19) \end{aligned}$$

ここに、p.v. は主値積分を表わし、 $c_{ij}(y)$ は自由項と呼ばれ、点 y が滑らかな境界上にあるとき $c_{ij} = \delta_{ij}/2$ とする関数である。

式(19.b)は以下に示すように離散化して数値的に解くことができる。まず、境界 ∂D を N 個の要素に分割し、その要素の代表点を x_n ($n = 1, \dots, N$) とする。また、時間軸は等間隔 Δt に分割する。このとき境界上の変位 u_i^{to} ならびに表面力 t_i^{to} を次のように近似する。

$$u_i^{\text{to}}(x, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \phi_u^n(x) \psi_u^k(t) u_i^{\text{to}}(n, k), \quad (20)$$

$$t_i^{\text{to}}(x, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \phi_t^n(x) \psi_t^k(t) t_i^{\text{to}}(n, k). \quad (21)$$

ただし、 $\phi_u^n(x)$, $\phi_t^n(x)$ は点 x_n に関する空間的な形状関数であり、 $\psi_u^k(t)$, $\psi_t^k(t)$ は時刻 $t = t_k \equiv k\Delta t$ に関する時間形状関数である。本研究では、境界 ∂D を N 個の線分によって近似し、各要素上では変位、ならびに、表面力は一定であると仮定する。よって、 n 番目の要素 ∂D_n が点 x_n を中点に持つ長さ $2a_n$ の線分からなるとすると、 $x = x_n + s_n \xi$ ($-a_n < \xi < a_n$, s_n : 単位接線ベクトル) なる点 x に対して、

$$\phi_u^n(x) = 1, \quad \phi_t^n(x) = 1 \quad (22)$$

となる。一方、変位と表面力の時間に関する形状関数には次式で定義されるものを用いる。

$$\psi_u^k(t) = \frac{1}{\Delta t} [(t - t_{k-1})H(t - t_{k-1})$$

$$-2(t - t_{k-2})H(t - t_{k-2}) + (t - t_{k-3})H(t - t_{k-3})] \quad (23)$$

$$\psi_t^k(t) = H(t - t_{k-1}) - H(t - t_{k-2}) \quad (24)$$

すなわち、変位は各時間ステップ間において線形に変化するのに対して、表面力は一定であると仮定した。これらの形状関数は、 $\phi_u^n(x_m) = \phi_t^n(x_m) = \delta_{mn}$, $\psi_u^k(t_K) = \psi_t^k(t_K) = \delta_{kK}$ となるように定義されているので、式(20), (21)における $u_i^{\text{to}}(n, k)$, $t_i^{\text{to}}(n, k)$ は点 x_n , 時刻 $t = t_k$ における変位と表面力の値そのものを表わしている。

式(20), (21)を式(19.b)に代入し、 $y = y_m$, $t = t_K$ として離散化すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} & c_{ij}(m) u_i^{\text{to}}(m, K) = u_j^{\text{in}}(m, K) \\ & + \sum_{n=1}^N [G_{ij}^S(n, m) t_i^{\text{to}}(n, K) - H_{ij}^S(n, m) u_i^{\text{to}}(n, K)] \\ & + \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N [G_{ij}^R(n, m; K - k + 1) t_i^{\text{to}}(n, k) \\ & - H_{ij}^R(n, m; K - k + 1) u_i^{\text{to}}(n, k)] \quad (25) \end{aligned}$$

ただし、式(8), (13)に示したように、 g_{ij} , h_{ij} がそれぞれ静的特異解と動的正則部に分離できることを用いて上式の離散化を行なっている。

式(25)において、現在時刻 $t = t_K$ に関する項 $u_i^{\text{to}}(n, K)$, $t_i^{\text{to}}(n, K)$ をすべて左辺に集めて整理し、行列表示すると、

$$\begin{aligned} & (c \cdot 1 + H^S + H_1^R) u_K^{\text{to}} - (G^S + G_1^R) t_K^{\text{to}} \\ & = u_K^{\text{in}} + \sum_{k=1}^{K-1} [G_{K-k+1}^R t_k^{\text{to}} - H_{K-k+1}^R u_k^{\text{to}}] \quad (26) \end{aligned}$$

と書ける。上式の右辺は入射波に関する項と過去の波動場の影響を表わす項からなる。よって、境界条件を代入して連立方程式系を構成し、 $K = 1, 2, \dots$ と時間ステップを進めながら逐次、方程式を解けば各時間毎の境界上の未知数を決定することができる。一旦、境界上の変位、表面力が求まれば、それを式(19.a)の左辺に代入することにより、領域内の任意の点での変位を求めることができる。

以下においては、式(25)あるいは(26)における H^S や G_k^R などの係数行列の具体的な計算方法を述べる。例えば、上式の係数行列 G_{K-k+1}^R の成分 $G_{ij}^R(n, m, K - k + 1)$ を書き下すと次のようになる。

$$\begin{aligned} & G_{ij}^R(n, m, K - k + 1) \\ & = \int_{\partial D} g_{ij}^R(x - y, t_K) * \psi_t^k(t_K) \phi_t^n(x) ds_x \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^L \frac{p_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} dn \int_{\partial D} \phi_t^n(x) ds_x \\ & \quad \times \int_0^{t_K} \log |c_\ell(t - \tau) + n \cdot (x - y)| \psi_t^k(\tau) d\tau \quad (27) \end{aligned}$$

上式より明らかなように、本解析における係数行列の

評価には境界上の積分，時間に関する繰り込み積分の他に，ラドン逆変換における単位円 $|n|=1$ 上の積分を実行する必要がある．これらすべての積分を数値積分によって評価しようとするとかかなりの計算時間を要する．しかし，時間 τ と空間変数 x は対数関数にしか含まれていないので，式(22)，(24)において定義されたような簡単な形状関数 $\phi_\ell^n(x)$ ， $\psi_\ell^k(t)$ に対しては，時間 τ と空間変数 x に関する積分を解析的に評価できる．実際，式(27)における要素 ∂D_n 上の積分と時間に関する繰り込み積分を実行すると，次式を得る．

$$G_{ij}^R(n, m, k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^L \frac{P_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} \Psi_\ell^1(x_n - x_m, t^k; s_n, a_n) dn \quad (28)$$

ここに，

$$\Psi_\ell^1(x, t; s, a) = \Psi_\ell(x, t; s, a) - \Psi_\ell(x, t - \Delta t; s, a) \quad (29)$$

$$\Psi_\ell(x, t; s, a) =$$

$$H(t) [(\chi_\ell^+ \log |\chi_\ell^+| - \chi_\ell^- \log |\chi_\ell^-|) / (n \cdot s) - 2a] \quad (30)$$

である．ただし， $\chi_\ell^\pm = c_\ell t + n \cdot (x \pm as)$ である．

同様に， G_{ij}^S ， H_{ij}^R についても以下のように計算できる．

$$G_{ij}^S(n, m) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^L \frac{P_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} \Psi_\ell(x_n - x_m, 0; s_n, a_n) dn \quad (31)$$

$$H_{ij}^R(n, m; k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|n|=1} \sum_{\ell=1}^M \frac{Q_{ij}^\ell}{\rho c_\ell^2} \Psi_\ell^2(x_n - x_m, t^k; s_n, a_n) dn \quad (32)$$

ただし，

$$\Psi_\ell^2(x, t; s, a) = [\Psi_\ell(x, t; s, a) - 2\Psi_\ell(x, t - \Delta t; s, a) + \Psi_\ell(x, t - 2\Delta t; s, a)] / \Delta t \quad (33)$$

である．式(28)，(31)，(32)において，残された積分は $|n|=1$ の単位円に関する正則な積分のみである．これについては数値積分によって評価した．

式(26)の係数行列の内， H^S については積分核が特異性を持っているため，特別に取り扱う． h_{ij}^S は式(17)によって表わされ，変位の空間に関する形状関数 ϕ_ℓ^n は式(22)によって与えられているので， H^S の成分 $H_{ij}(n, m)$ は次のように計算することができる．

$$H_{ij}^S(n, m) = \int_{-a_n}^{a_n} h_{ij}^S(x_n - x_m + s_n \xi) d\xi = \frac{1}{\pi} Im \sum_{\ell=1}^M \left[\frac{B_{ij}(\eta_\ell)}{\partial_\eta D(\eta_\ell)} \Theta_\ell(x_n - x_m; s_n, a_n) \right] \quad (34)$$

ここに，

$$\Theta_\ell(x; s, a) = [\log(z_\ell^+) - \log(z_\ell^-)] \quad (35)$$

である．ただし， $z_\ell^\pm = d_\ell \cdot (x \pm as)$ ， $d_\ell = (1, \eta_\ell)$ である．なお， $m = n$ のときは， $H_{ij}^S(n, n) = 0$ である．

5. 数値解析例

解析例として，図-2に示すような無限弾性体中における円筒形空洞，円筒形介在物，楕円形空洞 ($b/a = 0.2$) による散乱問題を取り上げる．

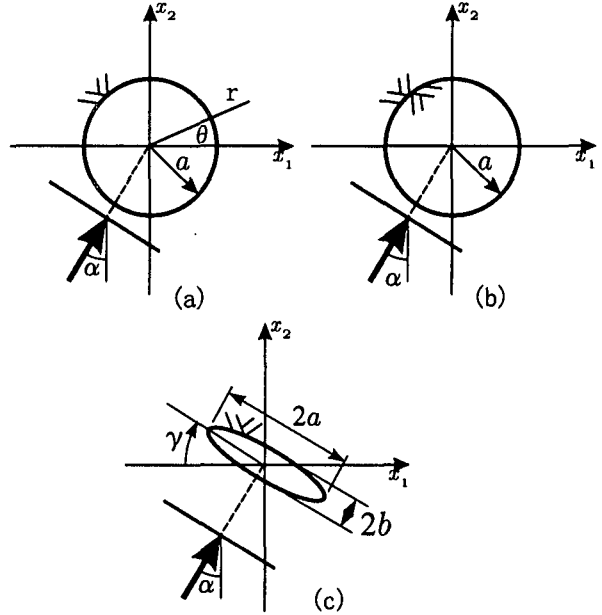


図-2 無限弾性体中の様々な散乱体 [(a) 円筒形空洞，(b) 円筒形介在物，(c) 楕円形空洞] による平面波の散乱．

5.1 等方弾性体における散乱 — 精度の確認

異方弾性体における解析を行なう前に，まず，等方弾性体内の円筒形空洞による散乱解析を行ない，等方弾性体の基本解を用いた境界要素法¹³⁾との比較によって本解析法の精度の確認を行なう．弾性体のポアソン比を0.25とし，入射波は，振幅 u_0 ，入射波 α ，周期 $C_T T/a = 1$ (C_T は横波速度， a は空洞の半径)の正弦波形一波を持つ平面P波であるとした．図-3は， $r = 5a$ ， $\theta = 3\pi/2 - \alpha$ における後方散乱波の径方向変位成分 u_r^{sc} の時間変化を図示したものである．等方弾性体の場合には，空洞からの距離 r が同じであれば，後方散乱波は入射角 α に依らず常に同じ波形が観測されることになる．また，入射波の波面が空洞に最初に到達した時刻を $t = 0$ としているので，空洞から $4a$ の距離にある観測点での後方散乱波は縦波速度 C_L で無次元化した時刻 $C_L t/a = 4$ において初動が観測されている．

図-3より，本解析法による結果は従来の等方弾性体に対する境界要素法による結果とほぼ一致していて，本解析法の精度が十分であることが確認された．

5.2 異方弾性体における散乱

無限領域における異方弾性体を横等方弾性体であるとし，以下のような弾性定数を与えた．

$$C_{11} = C_{33} = 160.7, \quad C_{22} = 13.92,$$

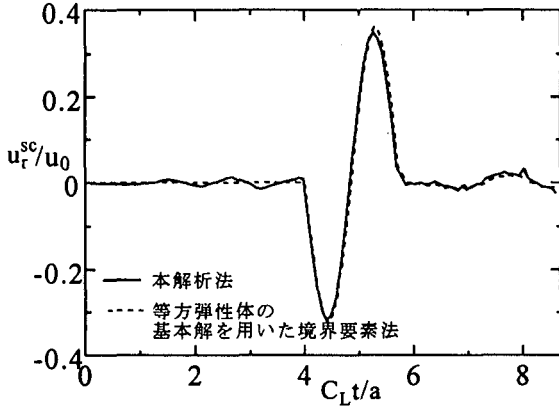


図-3 等方弾性体の $r = 5a$ における後方散乱波の時間変化.

$$\begin{aligned} C_{12} = C_{23} = 6.44, \quad C_{44} = C_{66} = 3.5, \\ C_{55} = (C_{33} - C_{13})/2 = 7.07(\text{GPa}) \end{aligned} \quad (36)$$

ここに、 C_{ij} はVoigt定数を表わす.

入射波は入射角 α 、振幅 u_0 、周期 $\sqrt{C_{66}/\rho}T/a = 1$ の正弦波形一波を持つ平面擬似縦波であるとし、時刻 $t\sqrt{C_{66}/\rho}/a = 1$ (a は図-2に示す散乱体の代表長)において座標原点に到達するものとした.

数値解析において、散乱体の境界は約50個の一定要素に分割し、時間ステップは $\Delta t\sqrt{C_{66}/\rho}/a = 0.05$ とした. また、式(28)、(31)、(32)における単位円上の積分に関しては、円周を100等分し、各区間を4点ガウス積分公式を用いて評価した.

境界要素法による結果を示す前に、ここで仮定した横等方弾性体における位相速度と波面の方向依存性をそれぞれ図-4(a),(b)に示す. 値は $\sqrt{C_{66}/\rho}$ によって正規化されている. 図-4(a)より、 x_2 方向の擬似横波の速度に対して、 x_2 方向の擬似縦波速度は約2倍であり、 x_1 方向の擬似縦波速度は約7倍であることがわかる. 図-4(b)は原点での点震源に対するある時刻での波面を表わしている. 擬似縦波の波面は x_1 方向に広く延びた菱形をしていて比較的単純であるが、擬似横波の波面は非常に複雑な形状をしていることがわかる.

図-5は、図-2(a)に示すような横等方弾性体中の円筒形空洞に対して $r = 5a$ における後方散乱波の径方向変位成分 u_r^{sc} の時間変化を入射角 α を変化させて図示したものである. 等方弾性体における円筒形空洞の場合は、入射波に依らず、図-3に示す後方散乱波が得られるのに対し、横等方弾性体の場合には、入射波の入射角 α によって散乱波の到達時間や振幅、波形などが大きく変化していることがわかる. 散乱波の到達時間は図-4(b)に示した群速度の方向依存性に対応して、 $\alpha = 90^\circ$ 方向にもっとも早く、入射角 α が大きくなるにつれて遅くなっている. 一方、振幅については $\alpha = 90^\circ$ に対する散乱波が最も大きな振幅を示している. 次に

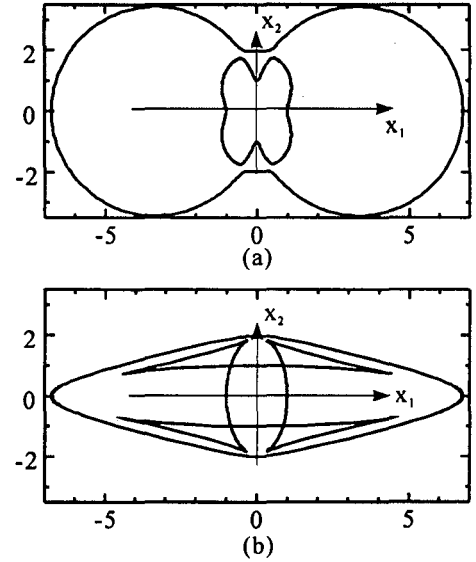


図-4 横等方弾性体における(a)位相速度と(b)波面の方向依存性.

$\alpha = 0^\circ$ が大きい振幅を示し、 $\alpha = 45^\circ$ 方向に近づくにつれて散乱波の振幅が小さくなっている. このことは、横等方弾性体の超音波探傷において 45° 方向の斜角探傷では感度が落ちることを示唆しており、興味深い.

図-6は、図-2(b)に示すような円筒形介在物による $r = 5a$ での後方散乱波の径方向変位成分 u_r^{sc} の時間変化を示したものである. 介在物 $\bar{D}$ の弾性定数 $\bar{C}_{ij}$ は外部領域の弾性定数 C_{ij} の2倍、すなわち、 $\bar{C}_{ij} = 2C_{ij}$ とした. 介在物は外部領域よりも堅いので、散乱波の初動波形の位相は入射波の位相と反転すると考えられる. 実際、 $\alpha = 90^\circ$ における初動は入射正弦波の位相が反転したものとなっている. また、空洞の場合と比べると、介在物による散乱振幅は全体的に小さくなっている. これは、空洞の場合、境界にあたった波動エネルギーはほとんど反射されるのに対して、介在物の場合は波動エネルギーの一部が透過するためである. また、空洞と同様、散乱特性の方向依存性が強く現れており、特に、 $\alpha = 45^\circ$ 付近ではほとんど散乱波が得られないことがわかる.

図-7は図-2(c)に示すような楕円形空洞による $r = 5a$ での後方散乱波の径方向変位成分 u_r^{sc} の時間変化を入射角 α を変化させて図示したものである. ただし、楕円の形状比は $b/a = 0.2$ とし、 x_1 軸から $\gamma = 45^\circ$ だけ傾いているものとした. 比較のために、図-8にポアソン比0.25の等方弾性体中にある同様な楕円形空洞による後方散乱波形の結果を示す. 当然ながら、等方弾性体においては、楕円形の長軸に垂直に平面波が入射した場合(図-8では $\alpha = 45^\circ$ の場合)に最も大きな散乱振幅が得られている. そして、入射角が垂直方向からずれるにつれて、平面波に対する散乱体の有効断面積が

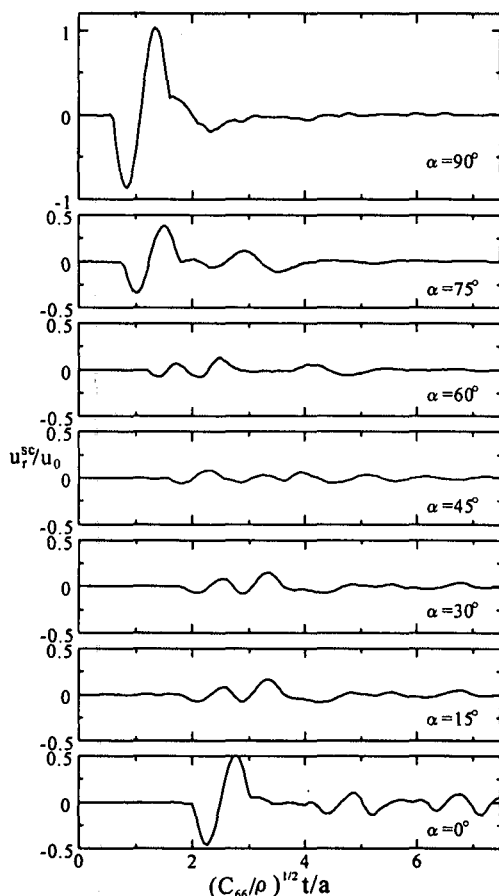


図-5 横等方弾性体中の円筒形空洞による $r = 5a$ における後方散乱波の時間変化.

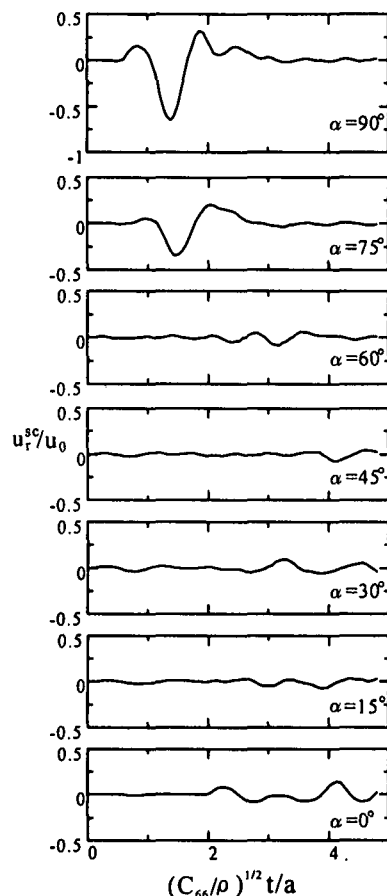


図-6 横等方弾性体中の円筒形介在物による $r = 5a$ における後方散乱波の時間変化.

減少するため散乱振幅は小さくなる一方、楕円形の端点から観測点までの距離は短くなるため散乱波の到達時間が早くなっている。それに対して、図-8に示す横等方弾性体中の楕円形空洞に対する結果は等方弾性体の結果とことごとく異なっている。すなわち、入射角 $\alpha = 45^\circ$ の場合は平面波が楕円形空洞に垂直に入射しているにも関わらず、得られる散乱波の振幅は他のどの入射角の場合よりも小さくなっている。これは、横等方弾性体における擬似縦波の振動方向が必ずしも進行方向と一致せず、反射面に垂直に入射しても反射方向は斜めになるためであると考えられる。また、等方弾性体の場合には、得られる散乱波の縦波初動の波形は入射波形の正弦波形がほぼ保たれていたのに対して、横等方弾性体の場合には、 $\alpha = 0^\circ, 90^\circ$ 以外の入射角の場合には入射波形の原形は見られない。これは、横等方弾性体の場合には、図-4に示すように擬似縦波と擬似横波が近接する角度が存在して複雑な波形を示すからである。当然ながら、散乱波の到達時間については、楕円形空洞の向きだけでなく、群速度の方向依存性も考慮して解釈しなければならない。

6. おわりに

本研究では、異方弾性体の基本解を用いた時間域境界要素法により、横等方無限弾性体中の円筒形空洞ならびに介在物、および楕円形空洞による平面波の散乱解析を行なった。その結果、横等方弾性体での後方散乱波は方向依存性、散乱波形、到達時間などあらゆる波動特性に関して等方弾性体の特性とは異なる性質を持つことが明らかとなった。今後、2次元解析のみならず3次元解析にも拡張して、異方弾性体に対する超音波探傷技術の精度の向上に結び付ける予定である。なお、この研究は文部省科学研究費基盤研究(C)09650527、ならびに、(社)鋼材倶楽部平成10年度土木鋼構造研究助成金制度の補助のもとで行われた。

参考文献

- 1) van der Hijden, J. H. M. T. : *Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media*, Elsevier Sci., Amsterdam, 1987.
- 2) Nayfeh, A. H. : *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media with Applications to Composites*, Elsevier Sci., Amsterdam, 1995.
- 3) 裏垣 博: 超音波による音響異方性材料の溶接欠陥評価に関する研究, 大阪大学博士論文, 1992.

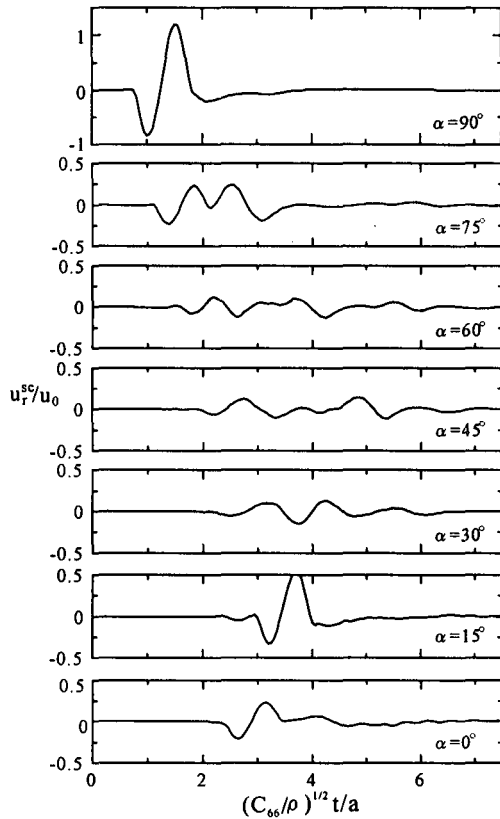


図-7 横等方弾性体中の $\gamma = 45^\circ$ 傾いた楕円形空洞による $r = 5a$ における後方散乱波の時間変化。

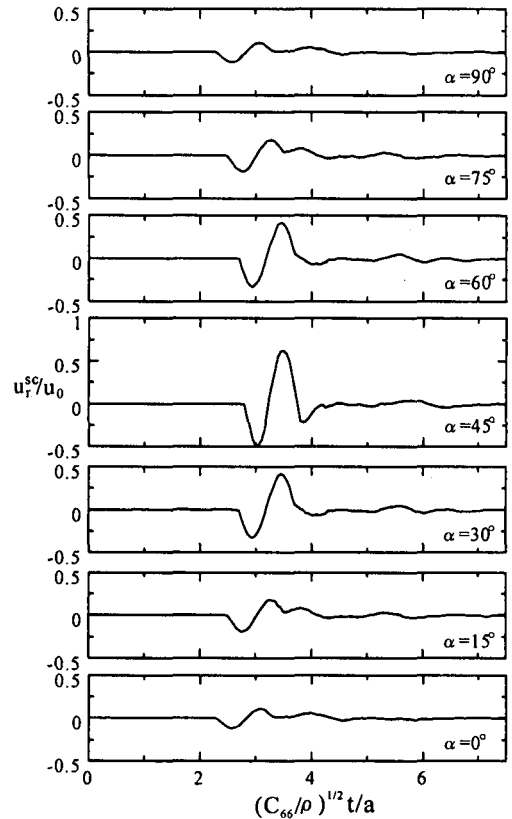


図-8 等方弾性体中の $\gamma = 45^\circ$ 傾いた楕円形空洞による $r = 5a$ における後方散乱波の時間変化。

- 4) Yamawaki, H. et al.: Development of three-dimensional ultrasonic simulation and its application, *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol.33, pp.3126-3129, 1994.
- 5) 古川 敬, 四谷 剛毅, 三原 毅, 伊達 和博: 圧延鋼板モデル材の超音波伝搬シミュレーション, NDI平成7年度秋季大会講演概要集, pp.67-74, 1995.
- 6) 藤原 充, 後藤 幹博, 羽田野甫: 異方性媒体における弾性波伝搬の差分法解析, 第6回超音波による非破壊評価シンポジウム講演論文集, pp.45-46, 1999.
- 7) Nishimura, N., S. Kobayashi and T. Kishima: A BIE analysis of wave propagation in anisotropic media, in: *Boundary Elements VIII*, M. Tanaka and C. A. Brebbia(eds.), Springer, Berlin, pp.425-434, 1986.
- 8) 西村直志, 小林昭一, 竹内孝文: 積分方程式法による2次元異方性動弾性クラック問題の解法について, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集 第5巻, 境界要素法研究会, pp.7-10, 1995.
- 9) Wang, C.-Y., J. D. Achenbach and S. Hirose: 2-D time domain BEM for scattering of elastic waves in solids of general anisotropy, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.33, pp.3843-3865, 1996.
- 10) Eringen, A. C. and E. S. Suhubi: *Elastodynamics Volume II Linear Theory*, Academic Press, 1975.
- 11) Wang, C.-Y. and J. D. Achenbach: Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophysical J. Int.*, Vol.118, pp.384-392, 1994.
- 12) Wang, C.-Y.: Two-dimensional elastostatic Green's functions for general anisotropic solids and generalization of Stroh's formalism, *Int. J. Solids Structures*, Vol.31, pp.2591-2597, 1994.
- 13) Hirose, S. and M. Kitahara: Time domain BIE applied to flaw type recognition, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation 10A*, Plenum Press, pp.75-82, 1991.

(1999年4月23日 受付)