残留応力とラーメ係数の同定

Determination of Residual Stress and Lamé Parameters from Measurements at the Boundary

田沼一実*・中村玄**
Kazumi TANUMA and Gen NAKAMURA

*非会員　理博　大阪教育大学 数理科学講座 助教授（〒582-8582 大阪府柏原市旭ヶ丘 4-698-1）
**非会員　理博　群馬大学 工学部 数学教室 教授（〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1）

Residual stress in an elastic body is a divergence free, second order symmetric tensor whose traction vanishes at the boundary. We consider the problem of determining the residual stress and the Lamé parameters of an elasitic body by measuring the displacements and the tractions at the boundary. Mathematically, these measurements made at the boundary are encoded in the so-called Dirichlet to Neumann map. We prove that it is possible to recover all the components of the residual stress together with the Lamé parameters at the boundary from the Dirichlet to Neumann map by making use of an explicit form of the surface impedance tensor.

Key Words *: residual stress, inverse problem at the boundary*

1. 緒言

残留応力を含んだ，つりあい状態にある弾性体を考える．残留応力は，弾性体の強度に大きく影響し，実用上，残留応力を測定することは，非破壊検査における重要なテーマである．本稿では以下の逆問題を，微分方程式論の立場から考察する．すなわち，この弾性体にさらに変形を加える．そのとき，弾性体表面での変位－表面力の対応を観測することで，弾性体表面での残留応力，さらには弾性体の Lamé パラメターが決定できることを証明する．

2. 準備

微小な残留応力を含む，3次元空間内の弾性体領域をΩとする．$\mathbf{T} = {}^t\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = (T_{ij})_{i,j=1,2,3}$を，Ωの各点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ における残留応力を表す Cauchy stress とする．この弾性体がつりあいの状態にあるとするならば，Ωで

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{1}$$

が満たされ，Ωの境界∂Ωでは，

$$\sum_{j=1}^{3} T_{ij} n_j = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{2}$$

が満たされる．ここで $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は，∂Ωの単位外法線ベクトル．

このつりあい状態を初期状態とし弾性体に変形を加える．そのとき点 $\mathbf{x} \in \Omega$での初期状態からの変位ベクトルを $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1, u_2, u_3)$ とする．変形は微小で純粋に弾性的であると仮定し，変形後，弾性体は再びつりあい状態にあるとすれば，$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{x}) = (S_{ij})_{i,j=1,2,3}$を第1 Piola-Kirchhoff stress としたときに，

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} S_{ij} = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{3}$$

が成り立つ．$\mathbf{S}$ は Murdoch[1], Man and Carlson[2] に従い，以下の構成方程式で表されるものとする．

$$S_{ij} = T_{ij} + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} T_{lj} + L_{ij}(\mathbf{u}). \tag{4}$$

ここで，$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = (L_{ij}(\mathbf{u}))_{i,j=1,2,3}$は，incremental elasticity tensor と呼ばれる．本稿では，Robertson[3]に従い，$\mathbf{L}(u)$ は，残留応力がないときの等方弾性体の応力場 $\mathbf{L}_{\lambda,\mu}(\mathbf{u})$ に等しいとおく．すなわち，

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}) = \mu(\mathbf{x})(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) + \lambda(\mathbf{x})(\mathrm{trace}\nabla\mathbf{u})\mathbf{I}.$$

ここで，$\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})$ は，Lamé パラメターで Ωで次を満たす：

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0. \tag{5}$$

$\nabla\mathbf{u} = \{\partial u_i/\partial x_j\}_{i,j=1,2,3}$は変位勾配，$\mathbf{I}$ は3次単位行列である．(注．第2 Piola-Kirchhoff stress を $\mathbf{\Sigma}$ で表すと，(4) は構成方程式 $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{T} + \mathbf{L}_{\lambda,\mu}(\mathbf{u})$ と関係式 $\mathbf{S} = (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})\mathbf{\Sigma}$ とから，$\nabla\mathbf{u}$ の2次の微少量を無視することで導かれる.)

(4) は

$$S_{ij} = T_{ij} + \sum_{k,l=1}^{3} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \tag{6}$$

$$C_{ijkl} = \delta_{ik} T_{jl} + \lambda \delta_{kl} \delta_{ij} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}) \tag{7}$$

と表すこともできる．(6) を (3) に代入し (1) を考慮すると，次の楕円型方程式系

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\Big) = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{8}$$

を得る．ここで方程式の楕円性

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} C_{ijkl}\eta_{ij}\eta_{kl} > 0 \tag{9}$$

(η_{ij}) : non-zero real symmetric matrix

を仮定する．ここで，もし残留応力が存在しない場合，(7) は，

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{kl}\delta_{ij} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj})$$

となり，このとき条件 (5) と (9) とは同値であることが簡単な計算よりわかる．そこで，(5) を満たす Lamé パラメター$\lambda(\mathbf{x}),\mu(\mathbf{x})$ と比べて残留応力 $\mathbf{T}$ が十分微小であれば，(7) の C_{ijkl}に対し (9) が従う．本稿で考察しようとするのは，残留応力 $\mathbf{T}$，および Lamé パラメター$\lambda(\mathbf{x}),\mu(\mathbf{x})$ を未知として，境界観測からそれらを決定する逆問題であるから，残留応力 $\mathbf{T}$ は，Lamé パラメター$\lambda(\mathbf{x}),\mu(\mathbf{x})$ と比べて微小であるという先験情報を仮定する．本節の始めに述べた，“微小な残留応力” も，上の意味である．

一方，境界$\partial\Omega$ での表面力は，(2) に注意すると，(6) より

$$\sum_{j=1}^{3} S_{ij}n_j = \sum_{j,k,l=1}^{3} C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}n_j, \quad i = 1,2,3 \tag{10}$$

で与えられる．以下，$\mathbf{T},\lambda,\mu$は $L^\infty(\Omega)$ (=本質的に有界な関数の空間) の元，(8) の解は $H^1(\Omega)$ (= 1 階微分が 2 乗可積分な関数の空間) の元で考える．従って (8) は，厳密には弱形式で表現すべきものである．

3. Dirichlet to Neumann map Λ と主結果

変位の境界値 (Dirichlet データ) $\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\partial\Omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ を任意に与えて固定し，境界値問題 (Dirichlet 問題)

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\Big) = 0 \ \text{ in } \Omega, \quad i = 1,2,3,$$
$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{11}$$

の解を $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1,u_2,u_3)(\in H^1(\Omega))$と書く．このとき $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ から$\partial\Omega$での表面力 (10) への写像 Λ

$$\Lambda : H^{1/2}(\partial\Omega) \ni \mathbf{f} \longrightarrow \Lambda(\mathbf{f}) = \Big(\sum_{j=1}^{3} S_{ij}n_j|_{\partial\Omega}\Big)$$
$$= \Big(\sum_{j,k,l=1}^{3} C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}n_j|_{\partial\Omega}\Big) \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \tag{12}$$

が考えられる．Λ を Dirichlet to Neumann map (D-N map) と呼ぶ．Λ は，境界$\partial\Omega$での変位と，その変位を生じさせるのに必要とした表面力との対応を表す．我々はこのΛを境界での変位と表面力との観測とみなす．従って，考察する逆問題 “境界での観測から残留応力，Lamé パラメターが決定できるか？” は，“D-N map Λ から $\mathbf{T}(\mathbf{x}),\lambda(\mathbf{x}),\mu(\mathbf{x})$ を決定できるか？” という問題に換言できる．

<u>主定理</u>. $\mathbf{x}_0$ を境界$\partial\Omega$上の点とし，$\mathbf{T}(\mathbf{x}),\lambda(\mathbf{x}),\mu(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}_0$において連続であるとする．このとき，D-N map Λから，$\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$ のすべての成分 T_{ij}，及び $\lambda(\mathbf{x}_0),\mu(\mathbf{x}_0)$ の値が再構成できる．

この結果は Robertson[3]を拡張し，精密化したものである．すなわち，Robertson[3]は上の定理と同じ仮定の下，Λから $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$ と$\mu(\mathbf{x}_0)$ とを再構成した．我々の結果は，Λから $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$ と$\mu(\mathbf{x}_0)$ とはもちろん，$\lambda(\mathbf{x}_0)$ の値も再構成できることを示している．我々の方法は，D-N map Λと 4 節で定義する surface impedance tensor $\mathbf{Z}$ との関連を明確にし，Λの構造をより精密に解析する．そして，より systematic に，Λから $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0),\mu(\mathbf{x}_0),\lambda(\mathbf{x}_0)$ を再構成する手順を与える．ここでの方法は，$\mathbf{T}(\mathbf{x}),\lambda(\mathbf{x}),\mu(\mathbf{x})$ に関数としてある程度なめらかさを仮定したときの，それらの $\mathbf{x}_0$での微分係数の決定，さらには境界での観測から内部に向かって $\mathbf{T}(\mathbf{x}),\lambda(\mathbf{x}),\mu(\mathbf{x})$ の近似値を次々と求めていく layer stripping 法に有効な手がかりを与えると予想される．

以下 4 節では，Stroh の formalism[4),5),6)] を基礎にして，$\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$での接平面における変位ベクトルと表面力ベクトルの比として，surface impedance tensor $\mathbf{Z}$ を定義し，その公式を与える．5 節では $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$の近傍に局在するある種の Dirichlet データ $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ に D-N map Λを作用させることで，4 節で与えた surface impedance tensor $\mathbf{Z}$ が，Λから復元できることを示す．6 節では，5 節で復元した $\mathbf{Z}$ の各成分から，$\mathbf{x}_0$での残留応力，Lamé パラメターを再構成し，主定理の証明を完成させる．

4. Surface impedance tensor $\mathbf{Z}$

Stroh の formalism[4),5),6)]は，非等方弾性体方程式のもつ代数的構造を明らかにし，解の特質を調べるのに有力な方法であった．この節では，残留応力のはいった弾性体の方程式にも Stroh の formalism が適用可能であることを示し，境界値問題に重要な役割を果たす

surface impedance tensor の表示式を与える．

境界$\partial\Omega$上の任意の点 $\mathbf{x}_0$で，$\mathbf{T}(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})$ を固定し，$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ を $\mathbf{x}_0$での$\partial\Omega$ の単位外法線ベクトルにとる．半空間$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} \le 0$ での (8) の解で，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} < 0$ 方向に有界な次の解を導入する：

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}\, e^{-\sqrt{-1}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}+p\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}. \qquad (13)$$

ここで，ベクトル$\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ は接平面$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = 0$ 上の単位ベクトルである（従って $\mathbf{m}\perp\mathbf{n}$）. (13) を (8) に代入すると p は次の 6 次の特性方程式の解となる：

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + {}^t\mathbf{R}) + p^2\mathbf{V}] = 0. \qquad (14)$$

ここで，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{V}$は 3 次の行列で，$(i,k)$ 成分で表示すると

$$\mathbf{Q} = \Big(\sum_{j,l=1}^{3} C_{ijkl} m_j m_l\Big), \quad \mathbf{R} = \Big(\sum_{j,l=1}^{3} C_{ijkl} m_j n_l\Big),$$
$$\mathbf{V} = \Big(\sum_{j,l=1}^{3} C_{ijkl} n_j n_l\Big). \qquad (15)$$

楕円性 (9) から，(14) の 6 つの解は虚数部を含み，また共役複素数として現れる．そこで以下，(13) の $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} < 0$ 方向での有界性をかんがみ，p_1, p_2, p_3を (14) の虚部の正なる解とする．対応する $\mathbf{a}_\alpha \in C^3$ $(\alpha = 1,2,3)$ は，

$$[\mathbf{Q} + p_\alpha(\mathbf{R} + {}^t\mathbf{R}) + p_\alpha^2\mathbf{V}]\, \mathbf{a}_\alpha = 0, \quad \alpha = 1,2,3 \quad (16)$$

をみたす．一方，変位が (13) で与えられているとき，平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = 0$ での表面力は，(10)(15) から

$$\mathbf{S}\,\mathbf{n} = \Big(\sum_{j=1}^{3} S_{ij} n_j\Big) = \Big(\sum_{j,k,l=1}^{3} C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j\Big)$$
$$= -\sqrt{-1}({}^t\mathbf{R} + p\mathbf{V})\mathbf{a}\, e^{-\sqrt{-1}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}+p\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}.$$

そこで

$$\mathbf{l}_\alpha = [{}^t\mathbf{R} + p_\alpha\mathbf{V}]\mathbf{a}_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3 \qquad (17)$$

とおき，$\mathbf{a}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ を変位ベクトル，$\mathbf{l}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ を表面力ベクトルと呼ぶ．なお，(16)(17) は以下の Stroh の固有値問題と呼ばれる 6 次元固有値問題と同値となる:

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_\alpha\\ \mathbf{l}_\alpha\end{bmatrix} = p_\alpha\begin{bmatrix}\mathbf{a}_\alpha\\ \mathbf{l}_\alpha\end{bmatrix}, \qquad \alpha = 1,2,3. \qquad (18)$$

ここで

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{V}^{-1t}\mathbf{R} & \mathbf{V}^{-1} \\ -\mathbf{Q} + \mathbf{R}\mathbf{V}^{-1t}\mathbf{R} & -\mathbf{R}\mathbf{V}^{-1}\end{bmatrix}.$$

定義. 境界$\partial\Omega$上の点$\mathbf{x}_0$での surface impedance tensor $\mathbf{Z}$ は，変位ベクトル$\mathbf{a}$と表面力ベクトル$\mathbf{l}$との“比”として与えられる：

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{m},\mathbf{n}) = -\sqrt{-1}\,[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3][\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]^{-1}. \qquad (19)$$

ここで，$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ は $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$を列成分に持つ 3 次行列．

これまで，一次独立な変位ベクトル $\mathbf{a}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ が存在することを仮定した．しかし，固有値問題 (18) が退化し，(16) をみたす一次独立なベクトル $\mathbf{a}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ が見つからない場合がある．このときは，${}^t[\mathbf{a}_\alpha\ \mathbf{l}_\alpha]$ $(\alpha = 1,2,3)$ を$\mathbf{N}$ の固有ベクトルまたは一般化固有ベクトルにとり，surface impedance tensor $\mathbf{Z}$ を (19) で定義する．最後に，$\mathbf{a}_\alpha$, $\mathbf{l}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ の選び方の自由度は，(19) において相殺することに注意する．従って (19) は，正規直交ベクトル$\mathbf{m}, \mathbf{n}$を与えれば一つに決まる量である．

補題 1. $\mathbf{Z}$ は Hermite 行列で，その成分 Z_{ij}は次で与えられる．

$$Z_{ii} = A + B(T_m\, n_i{}^2 - \mu\,\ell_i{}^2), \quad i = 1,2,3, \quad (20)$$
$$Z_{ij} = \sqrt{-1}\,C\,(-1)^k\,\ell_k + B(T_m\, n_i\, n_j - \mu\,\ell_i\,\ell_j)$$
$$1 \le i < j \le 3.$$

ここで

$$\{k\} = \{1,2,3\} - \{i,j\}, \qquad T_m = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\, m_i\, m_j,$$
$$(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \mathbf{m}\wedge\mathbf{n} \ \ (\wedge: \text{ベクトル積}),$$
$$A = \sqrt{\mu(\mu + T_m)} + \mu B,$$
$$B = \frac{1}{\lambda + 3\mu + T_m}\Big(\sqrt{(\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu+T_m)} - \sqrt{\mu(\mu+T_m)}\Big),$$
$$C = \mu - \sqrt{\mu(\mu+T_m)}\,B.$$

（証明）$\xi_i = m_i + p\,n_i, (i = 1,2,3)$ とおく．(7) から (16) は，

$$[\mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)p_\alpha + \mathbf{V}p_\alpha^2]\mathbf{a}_\alpha$$
$$= \Big(\sum_{j,l=1}^{3} C_{ijkl}\,\xi_j\,\xi_l|_{p=p_\alpha}\Big)_{i\downarrow k\to 1,2,3}\mathbf{a}_\alpha$$
$$= \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)\xi_1^2 + \mu(\xi_2^2+\xi_3^2) + T_m & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda+2\mu)\xi_2^2 + \mu(\xi_1^2+\xi_3^2) + T_m & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 & (\lambda+2\mu)\xi_3^2 + \mu(\xi_1^2+\xi_2^2) + T_m \end{bmatrix}_{p=p_\alpha}\mathbf{a}_\alpha = 0. \qquad (21)$$

ここで (2) より$\sum_{j,l=1}^{3} T_{jl}\xi_j\xi_l = \sum_{j,l=1}^{3} T_{jl} m_j m_l = T_m$

となることも使った．(14) に因数分解を施すと

$$\left(\mu(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)+T_m\right)^2\left((\lambda+2\mu)(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)+T_m\right)=0. \tag{22}$$

ベクトル $\mathbf{m},\mathbf{n}$ は正規直交であるので

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1+p^2. \tag{23}$$

従って，(14) の虚部の正なる解は (22) と (23) から

$$p_1=p_2=\sqrt{-1}\sqrt{\frac{T_m+\mu}{\mu}}\ \text{(重解)}, \tag{24}$$

$$p_3=\sqrt{-1}\sqrt{\frac{T_m+\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}}. \tag{25}$$

ここで $T_m=0$ のときは，$p_1=p_2=p_3=\sqrt{-1}$ が (14) の 3 重解となる．

まず $T_m\neq 0$ とする．(23)(24) から，$\alpha=1,2$ のときの (21) は

$$(\lambda+\mu)\begin{bmatrix}\xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3\\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3\\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2\end{bmatrix}_{p=p_1}\mathbf{a}_\alpha=0$$

となる．

$$\xi_1\ell_1+\xi_2\ell_2+\xi_3\ell_3=0 \tag{26}$$

に注意すると，$\mathbf{a}_\alpha$ ($\alpha=1,2$) として以下の一次独立なベクトルがとれる:

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{bmatrix}, \tag{27}$$

$$\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_1\wedge\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}_{p=p_1}=\begin{bmatrix}n_1-p_1m_1\\ n_2-p_1m_2\\ n_3-p_1m_3\end{bmatrix} \tag{28}$$

ここで$\wedge$はベクトル積を表す．$\alpha=3$ のときの (21) は，(23)(25) から

$$(\lambda+\mu)\begin{bmatrix}-(\xi_2^2+\xi_3^2) & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3\\ \xi_1\xi_2 & -(\xi_1^2+\xi_3^2) & \xi_2\xi_3\\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & -(\xi_1^2+\xi_2^2)\end{bmatrix}_{p=p_3}\times\mathbf{a}_3=0.$$

そこで

$$\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}_{p=p_3} \tag{29}$$

とできる．次に $\mathbf{m}\wedge\mathbf{n}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ の関係を使うと，

$$\det[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]=-1-p_1p_3, \tag{30}$$

と

$$\mathrm{Cof}[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] \tag{31}$$

$$=-\begin{bmatrix}\ell_1(1+p_1p_3) & n_1-p_3m_1 & m_1+p_1n_1\\ \ell_2(1+p_1p_3) & n_2-p_3m_2 & m_2+p_1n_2\\ \ell_3(1+p_1p_3) & n_2-p_3m_3 & m_3+p_1n_3\end{bmatrix}$$

とが従う．ここで $\mathrm{Cof}[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$ は行列 $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$ の余因子行列．

他方 (7), (2) および関係式

$$n_1\xi_1+n_2\xi_2+n_3\xi_3=p \tag{32}$$

から (17) は

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_\alpha&=[\mathbf{R}^T+p_\alpha\mathbf{V}]\mathbf{a}_\alpha\\ &=\Big(\sum_{j,l=1}^{3}C_{ijkl}\,n_j\,\xi_l\,|_{p=p_\alpha}\Big)_{i\downarrow k\to 1,2,3}\mathbf{a}_\alpha\\ &=\mu\,p_\alpha\mathbf{a}_\alpha+\Big(\lambda\,n_i\,\xi_k+\mu\,n_k\,\xi_i\,|_{p=p_\alpha}\Big)_{i\downarrow k\to 1,2,3}\mathbf{a}_\alpha.\end{aligned}$$

この式に (27)(28)(29) を代入し，関係式 (23)(26)(32) および

$$m_1\xi_1+m_2\xi_2+m_3\xi_3=1$$

を使うと

$$\mathbf{l}_1=\mu\,p_1\begin{bmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$\mathbf{l}_2=\mu\,p_1\begin{bmatrix}n_1-p_1m_1\\ n_2-p_1m_2\\ n_3-p_1m_3\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}_{p=p_1},$$

$$\mathbf{l}_3=2\mu\,p_3\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}_{p=p_3}+\lambda(1+p_3^2)\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{bmatrix}$$

を得る．

次に (33)(30)(31) から (19) に従い $\mathbf{Z}$ を計算する．このとき p_1^2, p_3^2 が現れたならば (24)(25) を使い，さらに $\mathbf{m}\wedge\mathbf{n}=(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ も考慮すると

$$\begin{aligned}Z_{ii}&=\sqrt{-1}\,\frac{p_3t_m+(T_m{n_i}^2-\mu{\ell_i}^2)(p_1-p_3)}{1+p_1p_3}\\ &\quad(i=1,2,3),\\ Z_{ij}&=\sqrt{-1}\,(-1)^k\frac{2\mu(1+p_1p_3)+T_m}{1+p_1p_3}\,\ell_k\\ &\quad+\sqrt{-1}\,\frac{(T_mn_in_j-\mu\ell_i\ell_j)(p_1-p_3)}{1+p_1p_3}\\ &\quad(1\le i<j\le 3)\end{aligned} \tag{34}$$

を得る．そこで分母を有理化するために，

$$\begin{aligned}(1+p_1p_3)(1-p_1p_3)&=1-p_1^2p_3^2\\ &=1-\left(\frac{T_m+\mu}{\mu}\right)\left(\frac{T_m+\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\right)\\ &=\frac{-T_m}{\mu(\lambda+2\mu)}(\lambda+3\mu+T_m)\end{aligned}$$

に注意して，(34) の分子，分母に $1-p_1p_3$を乗じ，再び (24)(25) を考慮すると (20) を得ることができる．

$T_m = 0$ のときは，(2) より境界$\partial\Omega$では (15) の行列 $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{V}$は $\mathbf{T} = (T_{ij})$ に無関係となる．従って $\mathbf{Z}$ は残留応力なしの等方弾性体の surface impedance tensor[7] になる．(この場合 (14) の 3 重解 $p = \sqrt{-1}$に対する $\mathbf{N}$ の一般化固有ベクトルは一つ存在する．) このとき $\mathbf{Z}$ は，(20) で $T_m = 0$ とおいたものに等しくなる．

5. Dirichlet to Neumann map Λ から surface impedance tensor $\mathbf{Z}$ の再構成

初めに (11)(12) と Gauss-Green の定理とを使い，

$$\int_{\partial\Omega} \Lambda(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{g}\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j\, g_i\, d\sigma \quad (35)$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{S}(\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v}\, dx$$

となることに注意する．ここで，$\mathbf{u}$ は (11) の解，$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ は $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ のΩへの H^1 拡張であり，行列 $\mathbf{A} = (A_{ij})$ に対し

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \Big(\sum_{k,l=1}^{3} C_{ijkl}\, A_{kl} \Big) \quad (36)$$

とおいた．また $\mathbf{A} = (A_{ij}), \mathbf{B} = (B_{ij})$ に対し $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\, B_{ij}$である．一般性を失わず，$\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$での単位外法線ベクトルは $\mathbf{n} = (0,0,1)$ としてよい．$\partial\Omega$ 上の点 $\mathbf{x}_0$の近傍に，直交曲線座標系 $\mathbf{y} = (y', y_3) = (y_1, y_2, y_3)$ を導入する．ただし，$\mathbf{x}_0$は $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ に対応し，$\Omega, \partial\Omega$は，それぞれ局所的に $y_3 < 0, y_3 = 0$ と書けるものとする．また，これまでの直交座標系 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ と曲線座標系 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ との間の変換写像 $\mathbf{y} = \Theta(\mathbf{x})$ は $\nabla\Theta(\mathbf{x}_0) = \mathbf{I}$ をみたすものとする．$\mathbf{m} = (m_1, m_2, 0)$ を $\mathbf{x}_0$での接平面上の単位ベクトルにとる．

$\phi(y_1, y_2) \in C^\infty(R^2)$ を

$$\begin{cases} 0 \le \phi \le 1 \\ \int_{R^2} \phi(y')\, dy' = 1 \\ \phi(y') = 0 \text{ for } |y'| \ge 1 \end{cases}$$

で定義し，

$$\phi_K(y') = \phi(\sqrt{K} y') \in C^\infty(\partial\Omega), \quad K = 1, 2, 3, \cdots$$

とおく．$\phi_K(y')$ は K が大きいほど $\mathbf{x}_0$ の近くに局在する関数である．

補題 2．任意の $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in C^3$ に対し Dirichlet データを

$$\mathbf{f}_K(y') = \phi_K(y')\, \mathbf{v}\, e^{-\sqrt{-1}(m_1 y_1 + m_2 y_2)K}$$
$$K = 1, 2, 3, \cdots \quad (37)$$

とおく．このとき，

$$\lim_{K \to +\infty} \int_{\partial\Omega} \Lambda(\mathbf{f}_K) \cdot \overline{\mathbf{f}_K}\, d\sigma = \big(\mathbf{Z}\, \mathbf{v}, \mathbf{v} \big)_{C^3} = \sum_{i,j=1}^{3} Z_{ij}\, v_j\, \overline{v_i}.$$

この補題により，Dirichlet データを $\mathbf{f}_K$ $(K = 1, 2, 3, \cdots)$ にとると D-N map Λ は右辺 $\sum_{i,j=1}^{3} Z_{ij}\, v_j\, \overline{v_i} \in C$ を決定する．従って，いくつか $\mathbf{v}$ をとり直すことで Λから $\mathbf{Z}$ の各成分 Z_{ij} が復元できる．

(証明) 4 節で $\mathbf{m} = (m_1, m_2, 0), \mathbf{n} = (0, 0, 1)$ としたときの (14) の虚部の正なる解を p_α $(\alpha = 1, 2, 3)$，(16) をみたす一次独立な変位ベクトルを $\mathbf{a}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ とする．$\mathbf{a}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ を使い $\mathbf{v}$を分解する：

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + c_3 \mathbf{a}_3.$$

次に$\psi(y_3) \in C^\infty(-\infty, 0])$ を

$$\begin{cases} 0 \le \psi \le 1 \\ \psi(y_3) = 0 \text{ for } y_3 \le -1 \\ \psi(y_3) = 1 \text{ for } -1/2 \le y_3 \le 0 \end{cases}$$

で定義し，

$$\psi_K(y_3) = \psi(\sqrt{K} y_3), \quad K = 1, 2, 3, \cdots$$

とおく．このとき

$$\mathbf{F}_K(\mathbf{y}) = \phi_K(y') \psi_K(y_3) \times \sum_{\alpha=1}^{3} c_\alpha \mathbf{a}_\alpha e^{-\sqrt{-1}(m_1 y_1 + m_2 y_2 + p_\alpha y_3)K} \quad (38)$$

は，Dirichlet データ $\mathbf{f}_K(y')$ のΩ への拡張となっている．従って (35) より

$$\int_{\partial\Omega} \Lambda(\mathbf{f}_K) \cdot \overline{\mathbf{f}_K}\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathcal{S}(\nabla \mathbf{u}_K) \cdot \nabla \overline{\mathbf{F}_K}\, d\mathbf{x}.$$

ここで $\mathbf{u}_K$ は $\mathbf{f} = \mathbf{f}_K$ としたときの (11) の解である．

$$\mathbf{u}_K = \mathbf{F}_K + \mathbf{r}_K$$

とおく．Robertson[3]により剰余項 $\mathbf{r}_K$ については

$$\lim_{K \to +\infty} \int_{\Omega} \mathcal{S}(\nabla \mathbf{r}_K) \cdot \nabla \overline{\mathbf{F}_K}\, d\mathbf{x} = 0$$

が成り立つ．ゆえに

$$\lim_{K \to +\infty} \int_{\partial\Omega} \Lambda(\mathbf{f}_K) \cdot \overline{\mathbf{f}_K}\, d\sigma = \lim_{K \to +\infty} \int_{\Omega} \mathcal{S}(\nabla \mathbf{F}_K) \cdot \nabla \overline{\mathbf{F}_K}\, d\mathbf{x}. \quad (39)$$

$\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$への変数変換を右辺の積分に施すと

$$\int_{\Omega} \mathcal{S}(\nabla \mathbf{F}_K) \cdot \nabla \overline{\mathbf{F}_K}\, d\mathbf{x} \quad (40)$$

$$= \int_{y_3 \le 0} \mathcal{S}(\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{F}_K \cdot \nabla\Theta) \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \overline{\mathbf{F}_K} \cdot \nabla\Theta) \times (\det \nabla\Theta)^{-1}\, d\mathbf{y}.$$

ここで $\mathbf{F}_K(\mathbf{y})$ が (38) で与えられていることを考慮し，上式右辺の $K \longrightarrow +\infty$ での Kの order に関す

る主要項について調べる．$\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{F}_K$について，まず微分$\nabla_{\mathbf{y}}$が (38) の$\phi_K(y')\psi_K(y_3)$ の部分に作用した場合，ϕ_K, ψ_Kの定義より$\sqrt{K}$が現れ，結局$\sqrt{K}\times$"有界関数" なる項が生じる．一方微分 $\nabla_{\mathbf{y}}$が (38) の指数関数部 $e^{-\sqrt{-1}(m_1y_1+m_2y_2+p_\alpha y_3)K}$の部分に作用した場合，$K$が降りてくるので，$K\times$"有界関数" なる項が生じる．従って $K \longrightarrow +\infty$ のときは，(40) の右辺の主要項として $\nabla_{\mathbf{y}}$が指数関数部に作用する場合のみ考えればよい．

$$\nabla_{\mathbf{y}}\, e^{-\sqrt{-1}(m_1y_1+m_2y_2+p_\alpha y_3)K}$$
$$= -\sqrt{-1}K(\mathbf{m}+p\mathbf{n})e^{-\sqrt{-1}(m_1y_1+m_2y_2+p_\alpha y_3)K}$$
$$(\mathbf{m}=(m_1,m_2,0), \mathbf{n}=(0,0,1))$$

であるから (40) の主要項は

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} K^2 \int_{y_3\le 0} \phi_K^2(y')\psi_K^2(y_3)$$
$$\times \mathcal{S}(c_\alpha \mathbf{a}_\alpha \otimes(\mathbf{m}+p_\alpha\mathbf{n})\cdot\nabla\Theta)$$
$$\cdot\overline{(c_\beta \mathbf{a}_\beta \otimes(\mathbf{m}+p_\beta\mathbf{n})\cdot\nabla\Theta)}$$
$$\times e^{-\sqrt{-1}(m_1y_1+m_2y_2+p_\alpha y_3)K}$$
$$\times \overline{e^{-\sqrt{-1}(m_1y_1+m_2y_2+p_\beta y_3)K}}$$
$$\times(\det\nabla\Theta)^{-1}\,d\mathbf{y}$$
$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} c_\alpha\overline{c_\beta}K^2 \int_{y_3\le 0} \phi_K^2(y')\psi_K^2(y_3)$$
$$\times \mathcal{S}(\mathbf{a}_\alpha \otimes(\mathbf{m}+p_\alpha\mathbf{n})\cdot\nabla\Theta)$$
$$\cdot\overline{(\mathbf{a}_\beta \otimes(\mathbf{m}+p_\beta\mathbf{n})\cdot\nabla\Theta)}$$
$$\times e^{-\sqrt{-1}(p_\alpha-\overline{p_\beta})y_3K}(\det\nabla\Theta)^{-1}\,d\mathbf{y}.$$

ここでベクトル $\mathbf{a}=(a_i), \mathbf{b}=(b_i)$ に対し $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ は行列で，$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=(a_i\,b_j)$ である．そこで，次の補題が必要となる．(証明略)

補題 3．$C \ni z$の実部は正とし，$\mathbf{f}(\mathbf{y})$ は有界関数とする．このとき，

$$\lim_{K\to+\infty} K^2 \int_{y_3\le 0} \phi_K^2(y')\psi_K^2(y_3)\mathbf{f}(\mathbf{y})\,e^{zy_3K}\,d\mathbf{y}$$
$$= \frac{\mathbf{f}(0)}{z} + o(1).$$

さて p_α $(\alpha=1,2,3)$ は虚部が正の (14) の解であるから，上式指数部の中$-\sqrt{-1}(p_\alpha-\overline{p_\beta})$ の実部は正である．また，$\nabla\Theta|_{\mathbf{y}=0}=\mathbf{I}$ であったから，(40) の $K\longrightarrow+\infty$ での極限は，補題 3 より

$$\lim_{K\to+\infty} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} c_\alpha\overline{c_\beta}K^2 \int_{y_3\le 0} \phi_K^2(y')\psi_K^2(y_3)$$
$$\times \mathcal{S}(\mathbf{a}_\alpha \otimes(\mathbf{m}+p_\alpha\mathbf{n})\cdot\nabla\Theta)$$
$$\cdot\overline{(\mathbf{a}_\beta \otimes(\mathbf{m}+p_\beta\mathbf{n})\cdot\nabla\Theta)}$$
$$\times e^{-\sqrt{-1}(p_\alpha-\overline{p_\beta})y_3K}(\det\nabla\Theta)^{-1}\,d\mathbf{y}$$
$$= \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{c_\alpha\overline{c_\beta}}{p_\alpha-\overline{p_\beta}}$$
$$\times\mathcal{S}(\mathbf{a}_\alpha\otimes(\mathbf{m}+p_\alpha\mathbf{n}))\cdot\overline{\mathbf{a}_\beta\otimes(\mathbf{m}+p_\beta\mathbf{n})}$$

(36) より，

$$= \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{c_\alpha\overline{c_\beta}}{p_\alpha-\overline{p_\beta}}$$
$$\times C_{ijkl}(\mathbf{a}_\alpha)_k(m_l+p_\alpha n_l)\overline{(\mathbf{a}_\beta)_i(m_j+p_\beta n_j)}$$

ここで $(\mathbf{a})_k$ はベクトル $\mathbf{a}$ の第 k成分を表す．展開すると，

$$= \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{c_\alpha\overline{c_\beta}}{p_\alpha-\overline{p_\beta}}$$
$$\times\Big(C_{ijkl}(m_l+p_\alpha n_l)m_j(\mathbf{a}_\alpha)_k(\overline{\mathbf{a}_\beta})_i$$
$$+C_{ijkl}(m_l+p_\alpha n_l)n_j(\mathbf{a}_\alpha)_k(\overline{\mathbf{a}_\beta})_i\overline{p_\beta}\Big)$$

(15) を使い，

$$= \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{c_\alpha\overline{c_\beta}}{p_\alpha-\overline{p_\beta}}$$
$$\times\Big[\Big((\mathbf{Q}+p_\alpha\mathbf{R})\mathbf{a}_\alpha,\mathbf{a}_\beta\Big)_{C^3}$$
$$+\Big(({}^t\mathbf{R}+p_\alpha\mathbf{V})\mathbf{a}_\alpha,\mathbf{a}_\beta\Big)_{C^3}\overline{p_\beta}\Big]$$

(16) より，

$$= \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{c_\alpha\overline{c_\beta}}{p_\alpha-\overline{p_\beta}}$$
$$\times\Big[\Big(({}^t\mathbf{R}+p_\alpha\mathbf{V})\mathbf{a}_\alpha,\mathbf{a}_\beta\Big)_{C^3}(-p_\alpha)$$
$$+\Big(({}^t\mathbf{R}+p_\alpha\mathbf{V})\mathbf{a}_\alpha,\mathbf{a}_\beta\Big)_{C^3}\overline{p_\beta}\Big]$$
$$= -\sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}c_\alpha\overline{c_\beta}\Big(({}^t\mathbf{R}+p_\alpha\mathbf{V})\mathbf{a}_\alpha,\mathbf{a}_\beta\Big)_{C^3}$$

(17) より，

$$= -\sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}c_\alpha\overline{c_\beta}(\mathbf{l}_\alpha,\mathbf{a}_\beta)_{C^3}$$

ここで $\mathbf{Z}$ の定義 (19) より，

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}c_\alpha\overline{c_\beta}(\mathbf{Z}\,\mathbf{a}_\alpha,\mathbf{a}_\beta)_{C^3} = (\mathbf{Z}\,\mathbf{v},\mathbf{v})_{C^3}.$$

6. 残留応力と Lamé パラメターの復元

前節の結果より，D-N map Λ から surface impedance tensor $\mathbf{Z}$ の各成分が決定できる．従って，問題は $\mathbf{Z}$ の各成分より，$\mathbf{T}(\mathbf{x}_0), \lambda(\mathbf{x}_0), \mu(\mathbf{x}_0)$ を復元することに帰着される．

一般性を失わず，$\mathbf{n}=(0,0,1)$ としたので，(2) より $T_{13}=T_{23}=T_{33}=0$ である．したがって復元すべ

きは，T_{11}, T_{12}, T_{22} および$\lambda(\mathbf{x}_0), \mu(\mathbf{x}_0)$ である．$\ell_3 = 0$ なので，補題1より

$$Z_{11} = A - \mu B\,{\ell_1}^2, \quad Z_{22} = A - \mu B\,{\ell_2}^2,$$
$$Z_{33} = A + B\,T_m, \quad Z_{12} = -\mu B\,\ell_1\,\ell_2.$$

以下のアルゴリズムで復元する．ただし $\mathbf{m} = (m_1, m_2, 0)$ は Dirichlet データ (37) の中で与えたので既知（従ってℓ_1, ℓ_2も既知）としてよい．

(*1st step*) $Z_{11} - Z_{22} = \mu B({\ell_2}^2 - {\ell_1}^2)$ であるから，$Z_{11} - Z_{22}$または Z_{12} よりμBが復元できる．

(*2nd step*) μBが復元できたので，Z_{11}または Z_{22} より A が復元できる．

(*3rd step*) A が復元できたので，Z_{33} より BT_mが復元できる．

(*4th step*) BT_mとμBから T_m/μが復元できる．

(*5th step*) $A, \mu B, T_m/\mu$は復元できているので，関係式 $A - \mu B = \sqrt{\mu(\mu + T_m)} = \mu\sqrt{1 + T_m/\mu}$より$\mu$が復元できる．

(*6th step*) μ と T_m/μとから T_mが復元できる．

(*7th step*) $T_m = \sum_{i,j=1}^{2} T_{ij}\, m_i\, m_j$が復元できたので，$m = (m_1, m_2, 0)$ をいくつか取り直すことで，T_{11}, T_{12}, T_{22}が復元できる．

(*8th step*)　補題1の Bは，

$$\lambda(1 - B^2) = B^2(3\mu + T_m) + 2B\sqrt{\mu(\mu + T_m)} - \mu$$

をみたすことが簡単な計算よりわかる．$\mathbf{T}$ は微小であったので，Bは$\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}$に十分近く，これは1とはならない．従って$1 - B^2 \neq 0$ より，上式からλが復元できる．

こうして，主定理が証明された．

7. 終わりに

本稿で用いた構成方程式 (4) は，詳細な数学的取り扱いが可能である反面，歪みと応力との非線形関係が考慮されていない．C-S. Man[8] は，残留応力の含まれた弾性体ではこの非線形関係が無視できないことを主張し，Hartig law に忠実な新しい構成方程式を提唱している．音弾性法則では，残留応力を初期応力とみなし，3次の弾性定数も考慮した構成方程式が使われている[9),10)]．これらの方程式に対する解析は，今後の課題である．

なお非等方弾性体方程式においては，弾性テンソルが十分なめらかな関数であるとき D-N map Λは$\partial\Omega$上のフーリエ積分作用素となる．その核は surface impedance tensor を使って表現できる．

非等方弾性体方程式に対しては，Λより弾性テンソルを決定する逆問題，および layer stripping 法に関連する一連の研究[11),12),13),14)]がある．これらの，残留応力を含んだ方程式への拡張も課題である．

参考文献

1) A. I. Murdoch: *Radial vibrations of a gravitating sphere with a material boundary*, Quart. Jl. Mech. Appl Math. **31** 531-542, 1978
2) C-S. Man and D. E. Carlson: *On the traction problem of dead loading in linear elasticity with initial stress*, Arch. Rational Mech. Anal. **128** 223-247, 1994
3) R. L. Robertson: *Boundary identifiability of residual stress via the Dirichlet to Neumann map*, Inverse Problems **13** 1107-1119, 1997
4) A. N. Stroh: *Dislocations and cracks in anisotropic elasticity*, Phil. Mag. **3** 625-646, 1958
5) A. N. Stroh: *Steady state problems in anisotropic elasticity*, J. Math. Phys. **41** 77-103, 1962
6) P. Chadwick and G. D. Smith: *Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials*, Advances in Applied Mechanics **17** 303-376, 1977
7) K. Tanuma: *Surface impedance tensors of transversely isotropic elastic materials*, Quart. Jl. Mech. Appl Math. **49** 29-48, 1996
8) C.-S. Man: *Hartig's law and linear elasticity with initial stress*, Inverse Problems **14** 313-319, 1998
9) Y. Iwashimizu and O. Kobori: *The Rayleigh wave in a finitely deformed isotropic elastic material*, J. Acoust. Soc. Am. **64** 910-916, 1978
10) 音弾性，日本非破壊検査協会編 1994
11) G. Nakamura and K. Tanuma: *A Nonuniqueness theorem for an inverse boundary value problem in elasticity*, SIAM J. Appl. Math. **56** 1-10, 1996
12) G. Nakamura and G. Uhlmann: *Inverse problems at the boundary for an elastic medium*, SIAM J. Math. Anal. **26** 263-279, 1995
13) G. Nakamura and G. Uhlmann: *A layer stripping algorithm in elastic impedance tomography*, Inverse problems in Wave propagation, G. Chavent, G. Papanicolaou (P. Sacks and W. Symes), IMA volumes in Mathemaatics and its applications **90** 375-384, 1997
14) G. Nakamura, K. Tanuma and G. Uhlmann: *Layer stripping for a transversely isotropic elastic medium*, SIAM J. Appl. Math. (In press)

(1999 年 4 月 23 日 受付)