

トラス構造物に対する弾性座屈強度の確率評価法

Stochastic Evaluation Method for Elastic Buckling Strength of Truss Structures

菅野友紀*・浅井光輝**・池田清宏***・寺田賢二郎****・小田憲史†

Tomonori SUGANO, Mitsuteru ASAI, Kiyohiro IKEDA, Kenjiro TERADA and Kenshi ODA

*非会員 竹中土木株式会社 (〒104-8234 東京都中央区銀座8丁目21-1)

**学生員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

***正会員 Ph.D 東北大学教授 工学部土木工学科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

****正会員 Ph.D 東北大学講師 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

†工博 太陽工業株式会社開発本部空間技術研究所 (〒532-0012 大阪市淀川区木川東 4-8-4)

A stochastic approach to estimate the elastic buckling strength of truss structures is developed by combining the bifurcation and probabilistic theories, and applied to the actual data of a truss dome structure. According to the data of the initial imperfection of truss members, which can be regarded as statistical variables, the analytical expression for the probability density function of the strength of the overall structure is obtained together with several parameters that can be determined by a few computations. The applicability of the approach is evaluated in the context of structural design and its feasibility is compared with the result by Monte-Carlo simulation.

Key Words : Elastic Buckling Strength, Truss Structures, Bifurcation, Initial Imperfection, Probability Density Function

1. はじめに

トラス構造物は、作業性、施工性に優れている、あるいは景観が美しいなどの理由から大規模な公共構造物の構造形態として採用されることが多く、実際に写真-1¹⁾に示すような数多くのトラス構造物が設計、施工を経て供用されている。このようなトラス構造物を設計する場合、構造解析による強度評価が行われるが、一般的な構造解析では、構造物の幾何形状や材料の寸法は全て設計通りで狂いがないものと仮定して強度が評価される。これに対して実際のトラス構造物の強度は、部材長、初期節点位置、断面積、ヤング率及び部材連結角度などに含まれる設計値とのずれの影響により変動する。これら誤差の含む物理量のある確率分布に従う確率変量と仮定し、強度の確率変動を評価する方法として一次近似二次モーメント法²⁾や確率有限要素法³⁾などが提案されている。

しかし、トラス構造物の強度は分岐座屈により支配されることが多く、分岐点において強度は確率変数に関して微分不可能である。したがって、確率変数に関する微分可能性を前提としたこれら従来の方法は、強度が分岐により支配されるトラス構造物に対しては、厳密な意味では適用できない。このような場合に利用可能な方法として、確率論的な定式化を必要としないモンテカルロ法⁴⁾が挙げられるが、計算コストの面で問題となることが多い。

そこで本論文では、強度が確率変数に関して微分不可能な場合にも適用可能な、初期不整感度則を用いた分岐理論に基づく強度の確率評価法^{5),6)}に着目する。こ



写真-1 八戸ショッピングセンター LAPIA (株) 太陽工業のパンフレットより引用)

の手法は、初期不整が小さい場合に成立する、いわゆる漸近的手法^{7),8)}に基づくものである。そして、トラス構造物の部材長に含まれる誤差を多変数正規分布に従う確率変量と仮定したときに、強度の確率変動をこの確率評価法により記述する際の枠組みを提案する。また、得られた確率密度関数とモンテカルロシミュレーションの結果とを比較することにより、本手法が効率的に強度の分布を近似できることを示す。この際、部材の降伏や実際の断面形状を考慮した上で強度を評価する必要があるが、弾塑性座屈に対する初期不整感度則の適用にはまだ未解決な点が多いため、弾性座屈の範囲に留めて議論することとする。

2. 分岐理論

この章では、文献^{5),6)}における分岐理論に基づく確率評価法の理論をまとめる。

2.1 初期不整

一般の構造物は、幾何形状の狂いや材料の寸法誤差など、設計の際に理想とする状態からの狂い量を含んでいる。分岐理論では、このような狂い量を初期不整と呼び、構造物に含まれる初期不整を次のように表す。

$$\varepsilon \mathbf{d} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^0 \quad (1)$$

ここに、 ε は初期不整の大きさを表すスカラー、 $\mathbf{d}$ は初期不整のパターンを表すベクトル、 $\mathbf{v}$ は初期不整を含む物理量を表す初期不整変数ベクトルであり、 $(\cdot)^0$ で表されている変数は初期不整のない完全系のものであることを意味する。

2.2 つり合い式と分岐方程式

分岐理論では、ある構造物のつり合い状態が、十分に滑らかな次の非線形つり合い式で表されるとする。

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{F}$ は十分に滑らかな非線形関数、 $\mathbf{u}$ は一般化変位ベクトル、 $\mathbf{f}$ は荷重パラメータ、 $\mathbf{v}$ は初期不整変数ベクトルである。また、ヤコビアン $\mathbf{J}$ (接線剛性行列)、初期不整感度行列 $\mathbf{B}$ をそれぞれ

$$\mathbf{J} \equiv \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}, \quad \mathbf{B} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} \quad (3)$$

と定義する。

式 (2) で表されるつり合い経路上の点のうち、ヤコビアンがゼロ固有値を持つ、すなわち ($\det \mathbf{J} = 0$) となる点を特異点と呼ぶ。以降、特異点での値であることを下付き添え字 $(\cdot)_c$ で表す。また本研究では、ゼロ固有値の数が 1 つである単純特異点だけを考える。

ここで、つり合い式 (2) に対して Elimination of Passive Coordinate⁸⁾ と呼ばれる手法を用いることにより、特異点近傍の現象に支配的な変数だけをパラメータとした分岐方程式が次のように求められる。

$$\bar{G}(w, \tilde{f}, \varepsilon) = 0 \quad (4)$$

ここに、 w は $\mathbf{J}_c^0$ のゼロ固有値に対応した固有ベクトル ξ_1 方向への完全系の特異点からの変位増分量、 $\tilde{f}$ は完全系での特異点からの荷重増分を示す。

2.3 初期不整感度則

構造物に式 (1) に示した初期不整が含まれた場合の強度変動量 $\tilde{f}_c$ は、初期不整の大きさ ε が微小である場合には、分岐方程式 (4) と特異性条件式

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial w} = 0 \quad (5)$$

を連立して解くことにより、次のように求められる⁹⁾。

$$\tilde{f}_c = f_c - f_c^0 = \begin{cases} -C_0 a(\mathbf{d}) \varepsilon & \dots \text{極大点} \\ -C_0 \{a(\mathbf{d}) \varepsilon\}^{2/3} & \dots \text{不安定対称分岐点} \end{cases} \quad (6)$$

ここに、 C_0 は初期不整に依存しない正定数であり、

$$a(\mathbf{d}) = \xi_1^T \mathbf{B}_c^0 \mathbf{d} = \mathbf{c}^T \mathbf{d} \quad (7)$$

は初期不整パターンベクトル $\mathbf{d}$ に依存して決まるスカラー変数である。式 (6) で表される強度変動量と初期不整の関係を初期不整感度則と呼ぶ。

2.4 強度の確率密度関数

ある大きさ ε でスケールリングされた初期不整パターンベクトル $\mathbf{d}$ が期待値ベクトル $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$ 、分散・共分散行列 $\mathbf{W}$ を持つ多変数正規分布に従うと仮定する。このとき、式 (7) で表されるスカラー変数 a は、期待値 0 の正規分布に従う確率変数の線形和となり、正規分布に従う確率変数となることが知られている¹⁰⁾。したがって、 $\tilde{f}_c$ がスカラー確率変数の関数として表される。ここで、 a の期待値 $E[a]$ と分散 $\text{Var}[a]$ が、 $\mathbf{d}$ の期待値ベクトル $\bar{\mathbf{d}}$ と分散・共分散行列 $\mathbf{W}$ から

$$E[a] = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{d}} = 0$$

$$\text{Var}[a] = \xi_1^T \mathbf{B}_c^0 \mathbf{W} (\mathbf{B}_c^0)^T \xi_1 = \bar{\sigma}^2$$

と求められるので、これらをパラメータとした a の確率密度関数は

$$\phi_a(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) \quad (-\infty < a < \infty) \quad (8)$$

となる。よって、初期不整感度則の式 (6) 及び a の確率密度関数の式 (8) より、強度 f_c の確率密度関数が次のように求められる。

$$\phi_{f_c}(f_c) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_0\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{f_c - f_c^0}{C_0\sigma}\right)^2\right] & (-\infty < f_c < \infty) \dots \text{極大点} \\ \frac{3|f_c - f_c^0|^{1/2}}{\sqrt{2\pi}(C_0\sigma^{2/3})^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{|f_c - f_c^0|}{C_0\sigma^{2/3}}\right)^3\right] & (-\infty < f_c < f_c^0) \dots \text{不安定対称分岐点} \end{cases} \quad (9)$$

ここに、

$$\sigma = \bar{\sigma} \varepsilon \quad (10)$$

$$\bar{\sigma} = (\xi_1^T \mathbf{B}_c^0 \mathbf{W} (\mathbf{B}_c^0)^T \xi_1)^{1/2} \quad (11)$$

である。式 (9) より、強度 f_c の確率密度関数は、極大点の場合は f_c^0 と $C_0\sigma$ 、不安定対称分岐点の場合は f_c^0 と $C_0\sigma^{2/3}$ をパラメータに持つことがわかる。これらのパラメータを構造解析により算定することとなる。

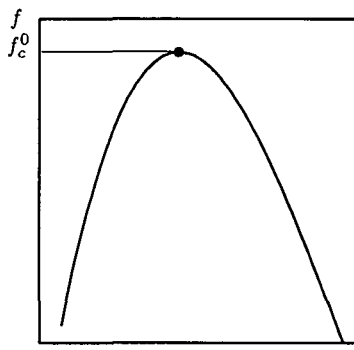


図-1 パラメータ算定法説明図 1 (極大点)

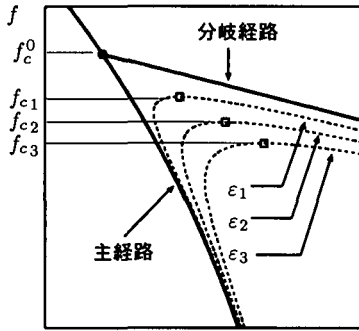


図-2 パラメータ算定法説明図 2 (不安定対称分岐点)

3. パラメータの算定法

式 (9) に示した確率密度関数のパラメータを決定するには、 f_c^0, C_0, σ の 3 つの値を求める必要がある。ここでは、これら 3 つの値を数回の構造解析から求め、確率密度関数のパラメータを決定する方法を提案する。

3.1 分散・共分散行列の作成

σ を求めるための前段階として、大きさ ε でスケールされた初期不整パターンベクトル $\mathbf{d}$ についての分散・共分散行列 $\mathbf{W}$ をあらかじめ作成しておく。

初期不整として考える確率変数 d_i が多変数正規分布に従うと仮定する。このとき $\mathbf{W}$ は、物理量の標本データをもとに次のように与えられる。

$$W_{ij} = \text{Cov}(d_i, d_j) \quad (12)$$

また、個々の確率変数の間に相関が見られないときは

$$\mathbf{W} = \text{diag}[\text{Var}(d_i)] \quad (13)$$

として与えられる。

3.2 f_c^0 及び σ の算定

初期不整のないモデルに対して構造解析を行い、主経路上にある最初の極大点または分岐点を求める (解析の様子は 図-1, 図-2 を参照)。この極大点または分岐点における荷重の大きさから、パラメータの 1 つで

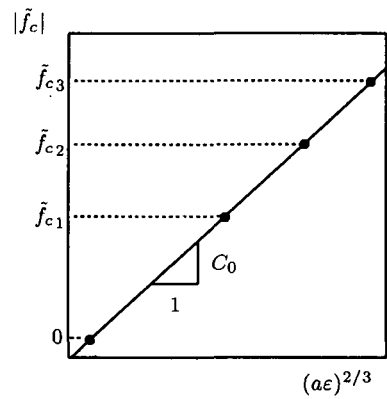


図-3 パラメータ算定法説明図 3 (初期不整感度則)

ある完全系の強度 f_c^0 が確定する。また、この点の情報からは、完全系の極大点または分岐点で評価した初期不整感度行列 $\mathbf{B}_c^0$ 及び完全系の極大点または分岐点における接線合成行列のゼロ固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}_1$ を求めることができる。この $\mathbf{B}_c^0, \boldsymbol{\xi}_1$ 及びあらかじめ作成しておいた $\mathbf{W}$ を式 (11) に代入することにより $\bar{\sigma}$ が求められ、 $\mathbf{W}$ を作成するときスケールリングに使用した ε とともに式 (10) に代入することにより、強度のばらつきを表すパラメータである $C_0\sigma$ または $C_0\sigma^{2/3}$ に必要な σ を決定する。

3.3 C_0 の算定

(1) 極大点の場合

強度が極大点に支配される場合、初期不整に依存しない正定数である C_0 は次のように与えられる⁹⁾。

$$C_0 = \frac{1}{\left| \boldsymbol{\xi}_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{f}} \right)_c^0 \right|} \quad (14)$$

このとき、 $\boldsymbol{\xi}_1$ は完全系の極大点または分岐点の情報から既に得られており、また、 $(\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{f})_c^0$ は、一般には荷重パターンベクトル $\mathbf{f}$ となる。すなわち、強度が極大点に支配される場合の C_0 は、完全系の解析が終わった時点で、固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}_1$ と荷重パターンベクトル $\mathbf{f}$ を用いて式 (14) から直接求めることができる。

(2) 不安定対称分岐点の場合

強度が不安定対称分岐点に支配される場合の C_0 は、分岐方程式 (4) の高次項の係数を含む⁹⁾ため、極大点の場合のように直接求めることは困難である。そこで、不安定対称分岐点の場合には、 C_0 が初期不整 $\varepsilon \mathbf{d}$ に依存しない正定数であるという性質を利用して初期不整感度則から近似的に求める方法をとる。

まず、初期不整感度則を用いる前段階として、初期不整を含む不完全系についての解析を行う。このとき初期不整は、ある固定された初期不整パターン $\mathbf{d}^*$ に対して、大きさ ε_i ($i = 1, 2, 3$) を変化させる。そのとき各 i に対しての極大荷重 f_{ci} を求めておく (解析の様子は 図-2 を参照)。次に、ここで求めた極大荷重 f_{ci} と先に完全系の解析で求めた分岐荷重 f_c^0 とを用いて、初

期不整の大きさ ε_i に対応する強度変動量を次のように求める。

$$\tilde{f}_{ci} = f_{ci} - f_c^0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{15}$$

また、完全系の解析から得られた B_c^0, ξ_1 及び不完全系の解析で利用した初期不整パターンベクトル d^* を式 (7) に代入し、 d^* に対応するスカラー変数 $a = \xi_1^T B_c^0 d^*$ を求める。

図-3 は、このようにして求めた $\tilde{f}_c, a$ 及び初期不整の大きさ ε を初期不整感度則に照らしてプロットした様子を示す。初期不整感度則の式 (6) から明らかなように、 C_0 は 図-3 中の直線の傾きとして与えられることが分かる。

4. 解析例

強度が極大点に支配される 6 角形 2 層トラス屋根及び強度が不安定対称分岐点に支配される半球形単層トラスドームを対象に、3 章に示した方法でパラメータを算定し、強度の確率密度関数を求める。

4.1 解析条件

トラス構造物に含まれる初期不整には部材長の誤差、初期節点位置のずれ、断面積の誤差、ヤング率の誤差、及び部材連結角度の狂いなどが考えられるが、今回の解析では、工場での抜き取り検査等により標本データの収集及び確率分布の仮定が可能な、部材長の誤差を初期不整として考えた。これにより、設計部材長からなるベクトルを完全系の初期不整変数ベクトル L^0 、誤差を含む実際の部材長からなるベクトルを不完全系の初期不整変数ベクトル L とし、構造物に含まれる初期不整を

$$\varepsilon d = L - L^0 \tag{16}$$

と表した。ここで、実際の部材長誤差の測定結果をもとに、トラス構造物を構成する全部材の誤差が、それぞれ独立に期待値 0、分散 1.5×10^{-8} の正規分布に従うものと仮定した。すなわち、 $\varepsilon = 1$ としたときの初期不整パターンベクトル d が期待値ベクトル 0 、分散・共分散行列

$$W = 1.5 \times 10^{-8} I \tag{17}$$

を持つ多変数正規分布に従うものとする。ここに、 I は部材数を次元に持つ単位行列である。

表-1 使用部材の諸元

管種	STK 400
外径 ϕ [mm]	89.1
厚さ t [mm]	3.2
断面積 A [mm ²]	863.6
ヤング率 E [Mpa]	2.1×10^5
単位質量 [kg/m]	6.78

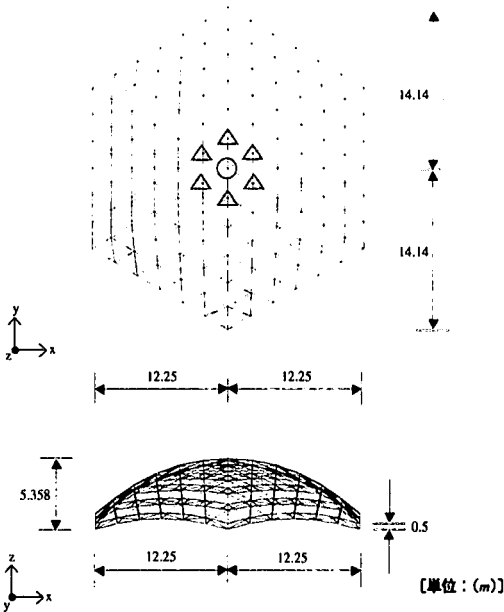


図-4 解析モデル 1

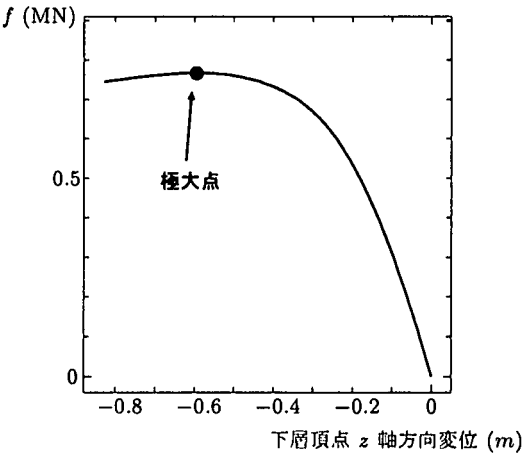


図-5 荷重-変位曲線 (解析モデル 1)

パラメータ算定のための構造解析では、トラス部材を一次元線形弾性体とし、構造物全体としての形態変化に伴う幾何学的非線形性を考慮した。このとき、トラス部材には全て 表-1 に示す物性を持つ一般構造用炭素鋼鋼管を使用することを想定し、部材の断面剛性 EA を全て 1.814×10^2 [MN] とした。また、初期不整として選んだ部材長誤差は、初期応力を介して構造全体に影響を及ぼすものとして解析を行なうこととした。

4.2 解析例 1 (強度が極大点に支配される 6 角形 2 層トラス屋根)

図-4 に示す、部材数 1165 本、平均部材長 2.636 m の 6 角形 2 層トラス屋根について解析を行った。荷重は、下層頂点 (O) - f に対して 下層 2 段目 (Δ) - $2f$ を z 軸方向に比例载荷した。部材長に誤差を含まない完全系の解析結果を図-5 に示す。この解析から、図-5 中の実線で示されるようなつり合い経路及び ● で示さ

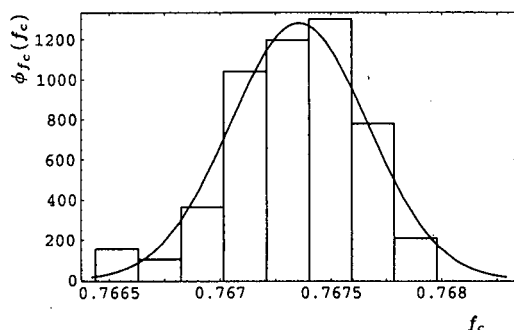


図-6 強度の確率密度関数とヒストグラム (解析モデル 1)

れる極大点が求められた。

この極大点での荷重の大きさから、パラメータの一つである完全系の強度が $f_c^0 = 7.674 \times 10^{-1}$ と確定する。このとき、分岐点の情報からは、初期不整感度行列 B_c^0 及びヤコビアン of ゼロ固有値に対応した固有ベクトル ξ_1 も得られ、式 (17) のように作成した分散・共分散行列 W とともに式 (11) に代入することにより $\sigma = 1.051 \times 10^{-3}$ となる。ここで、 W を作成するときに $\varepsilon = 1$ としたので、式 (10) より $\sigma = 1.051 \times 10^{-3}$ と決定した。

また、固有ベクトル ξ_1 と載荷方法に対応した荷重パターンベクトルとを式 (14) に代入することにより $C_0 = 2.967 \times 10^{-1}$ が決定し、既に得られた σ を使用することで、もう一つのパラメータ $C_0\sigma = 3.118 \times 10^{-4}$ が確定する。

このようにして算定したパラメータ $f_c^0, C_0\sigma$ を式 (9) に代入することにより、図-6 に示すような強度の確率密度関数が求められた。なお、図中に確率密度関数と重ねて描かれているヒストグラムは、100 ケースのランダムな初期不整を用いたモンテカルロシミュレーションの結果から作成したものである。この結果から、強度が極大点に支配されるトラス屋根に対して、初期不整のない完全系の解析を 1 回行うだけで強度の分布をうまく再現できている様子が分かる。

4.3 解析例 2 (強度が不安定対称分岐点に支配される半球形単層トラスドーム)

図-7 に示す、部材数 756 本、平均部材長 2.636 m の半球形単層トラスドームに対して、頂点 (O) - f , 2 段目 (Δ) - $2f$ の z 軸方向荷重を比例載荷した。そのときの完全系及び不完全系の解析結果を図-8 に示す。

部材長に誤差を含まない完全系の解析から、図-8 中の実線で示されるようなつり合い経路及び ● で示される不安定対称分岐点が求められた。この分岐点での荷重の大きさから、パラメータの一つである完全系の強度が $f_c^0 = 6.931 \times 10^{-2}$ と確定する。このとき、極大点の場合と同様にして、式 (10) 及び式 (11) から $\sigma = 9.777 \times 10^{-4}$ と決定した。

また、臨界初期不整パターンベクトル¹²⁾を用いて初

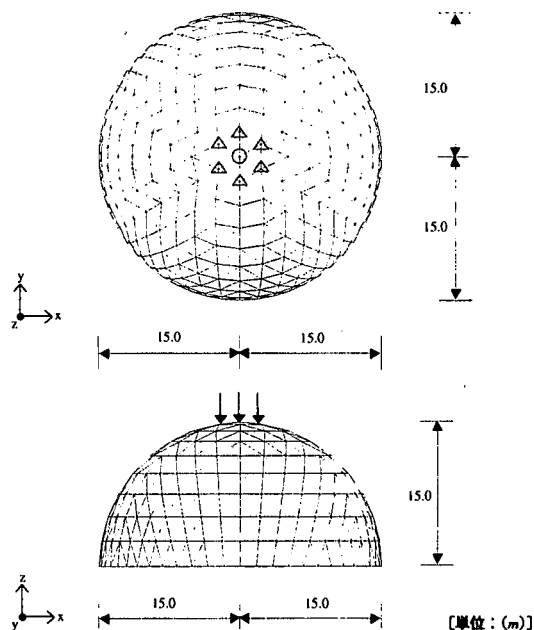


図-7 解析モデル 2

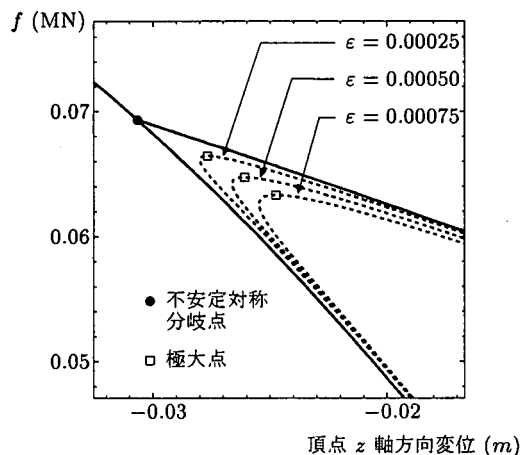


図-8 荷重 - 変位曲線 (解析モデル 2)

期不整の大きさ ε を 0.00025, 0.00050, 0.00075 と変化させた不完全系の解析から、図-8 中の点線で示されるようなつり合い経路及び □ で示される極大点が求められた。この極大点の荷重の大きさから不完全系の強度 f_c が得られ、完全系の強度 f_c^0 とともに式 (15) に代入することにより、初期不整の大きさ ε に対応した強度低下量 $\tilde{f}_c$ が表-2 のように求められた。このとき式 (7) より、臨界初期不整パターンベクトルに対して

表-2 不完全系の解析結果 (解析モデル 2)

ε	$ \tilde{f}_c [\times 10^{-3} \text{ MN}]$
0.00025	2.8727804
0.00050	4.5733616
0.00075	6.0061172

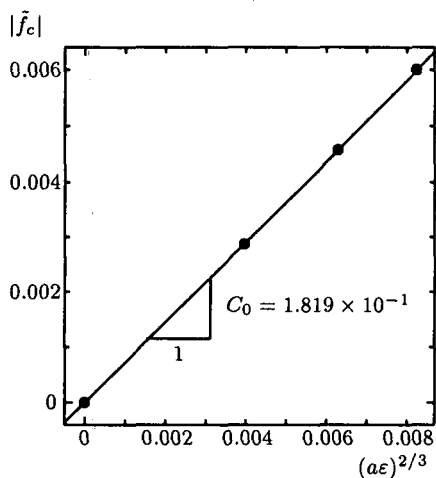


図-9 初期不整感度則適用図 (解析モデル 2)

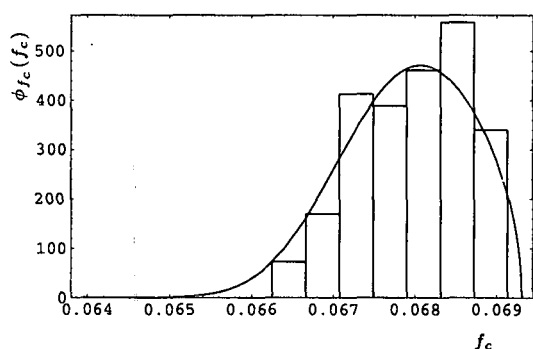


図-10 強度の確率密度関数とヒストグラム (解析モデル 2)

は $a = 7.983$ となる。

このようにして求めた $\tilde{f}_c$, a 及び初期不整の大きさ ε を初期不整感度則に照らしてプロットしたものが図-9 である。図-9 に示される直線の傾きから $C_0 = 1.819 \times 10^{-1}$ となり、ここで得られた C_0 と先に得られた σ から、もう一つのパラメータ $C_0 \sigma^{2/3} = 1.792 \times 10^{-3}$ が確定する。

図-10 は、このようにして算定したパラメータ $\tilde{f}_c$, $C_0 \sigma^{2/3}$ を式 (9) に代入して求めた強度の確率密度関数をプロットしたものである。同図には、100 ケースのランダムな初期不整パターンを用いたモンテカルロシミュレーションから作成したヒストグラムもあわせてプロットしてある。従来の方法では厳密には強度の確率評価が不可能な、不安定対称分岐点を持つトラスドームに対しても、構造解析を 4 回行うだけで強度の確率変動を把握できることが分かり、本手法の有効性が確認できる。

5. まとめ

強度が極大点及び不安定対称分岐点に支配されるトラス構造物を対象に、初期不整感度則を用いた分岐理

論に基づく強度の確率評価法を利用し、部材長誤差が確率変動するときの強度の変動を評価した。また、得られた確率密度関数とモンテカルロシミュレーションの結果とを比較することにより、今回用いた評価法が少ない計算回数で強度の分布を近似できること、さらに従来の方法では厳密な評価が不可能であった不安定対称分岐点を持つトラス構造物の強度についても、確率評価が可能であることを示した。

実際のトラス構造物は多種の初期不整を含むが、今回はこの部材長誤差のみをトラス構造物に含まれる初期不整として考慮した。また、確率密度関数のパラメータ算定の際には、トラス部材を一次元線形弾性体にモデル化し、構造物全体としての形態変化に伴う幾何学的非線形性を考慮した有限変位解析を行った。解析中にトラス部材の応力を確認したところ、解析モデルによっては、構造物全体として分岐する以前に部材の応力が降伏応力を上回るものもあった。今後、弾性座屈の範囲に留まらず弾塑性座屈に関する初期不整感度則の適用性の検討、及び強度の確率的評価法が望まれる。

参考文献

- 1) (株) 太陽工業のパフレット (MakMax), 1996.
- 2) H. Karadeniz, S. Van Manen and A. Vrouwenvelder: Probabilistic Reliability Analysis for the Fatigue Limit State of Gravity and Jacket Type Structures, *Proc. Third Int. Conf. -BOSS*. McGraw-Hill, pp. 147-165, 1982.
- 3) 中桐滋, 久田俊明: 確率有限要素法入門, 培風館, 1985.
- 4) J. Astill, C. J. Nosseir and M. Shinozuka: Impact Loading on Structures with Random Properties, *J. Struct. Mech.* Vol. 1, No. 1, pp. 63-67, 1972.
- 5) K. Ikeda and K. Murota: Statistics of Normally Distributed Initial Imperfections, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30, No. 18, pp. 2445-2467, 1993.
- 6) K. Ikeda, K. Murota and I. Elishakoff: Reliability of Structures Subject to Normally Distributed Initial Imperfections, *Comp. Struct.*, Vol. 59, No. 3, pp. 463-469, 1996.
- 7) Koiter, W.T.: On the stability of elastic equilibrium, Dissertation. Delft, Holland (English translation: NASA Tech. Trans. F10: 833, 1967), 1945.
- 8) J.M.T. Thompson and G.W. Hunt: *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley and Sons, 1973.
- 9) K. Ikeda and K. Murota: Critical Initial Imperfections of Structures, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 26, No. 8, pp. 865-886, 1990.
- 10) 鈴木義也: 統計学概説, 培風館, 1992.
- 11) 日本工業規格 一般構造用炭素鋼鋼管, 日本規格協会, 1994.
- 12) K. Ikeda and K. Murota: Computation of Critical Initial Imperfection of Truss Structures, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No. 10, pp. 2101-2117, 1990.

(1999 年 4 月 23 日受付)