

Reddy 平板の変位関数について

Displacement Functions for Reddy Plate Based on
Higher-order Shear Deformable Plate Theory小林治俊¹, 松村一也²

Harutoshi KOBAYASHI and Kazuya MATSUMURA

¹ 正会員 工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138)² 学生員 大阪市立大学大学院土木工学専攻前期博士課程 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138)

Present paper describes how to solve the governing differential equations based on Reddy's third-order shear deformable plate theory. First the differential operator method is developed to uncouple the governing equations of an orthotropic plate, and then the uncoupling of the governing equations results in an eighth-order partial differential equation. Secondary, a potential function method is applied to the governing equations to recast the governing equations of transversely isotropic and isotropic plates into two independent equations, i.e. one is a second-order partial differential equation and the other is sixth-order one. Finally, Levy type single series solutions for an isotropic plate are derived, and then numerical results are presented for the square plates with different boundary conditions and subjected to a uniform load.

Key Words: displacement functions, Reddy plate, higher-order plate theory, shear deformation

1. はじめに

Reissner [1]と Mindlin [2]によって展開された平板の一次せん断変形理論は、それ以降多数の研究者により高次せん断変形理論へと発展的に受け継がれてきた[3]。また近年の複合材料力学の発展に伴い、面内・面外弾性係数比が大きく面外せん断に敏感な積層板に対しても、高次せん断変形理論の開発が盛んである[4]。これには板厚方向座標 z の高次べきによって変位を仮定するものおよびせん断応力分布をあらかじめ仮定するもの、などがある。しかしながら、より精緻な仮定に基づいても、導かれた支配式が複雑になっては“解析的”に解くことが難しくなる。これまでの種々な高次せん断変形理論においても二重フーリエ級数による四辺単純支持板の解析がほとんどを占めていることは周知のところである。したがって、他の境界条件をもつ場合の解析には、連立の偏微分方程式である支配式を独立な偏微分方程式に変換するいわゆる変位関数を導入することが重要である。本文では、高次せん断変形理論の一つとしてReddy[5,6]の三次せん断変形理論を取り上げ、その変位関数を誘導するものである。

この理論は次節の式(1)に示しているように、板の中央面でのたわみ w および横断面の x, y 軸まわりの回転角 ψ_y, ψ_x を未知量とする変位仮定に基づい

て、仮想仕事の原理によりつり合い式を誘導している。この理論ではせん断修正係数の導入が不要であり、また板表面においてせん断応力 τ_{xz}, τ_{zy} が消失する特徴がある。本文では、最初に直交異方性板を取り扱い、微分演算子法[7]により、つり合い式を変位関数が満足すべき8階の非連成偏微分方程式に変換する。続いて板厚方向を異方軸とする横等方性板そして等方性板を対象として、2階と6階の独立な微分方程式の解である二つの変位関数を微分演算子法および二種のポテンシャル関数法の都合三方法により求め、互いに同じ変位関数であることを示す。

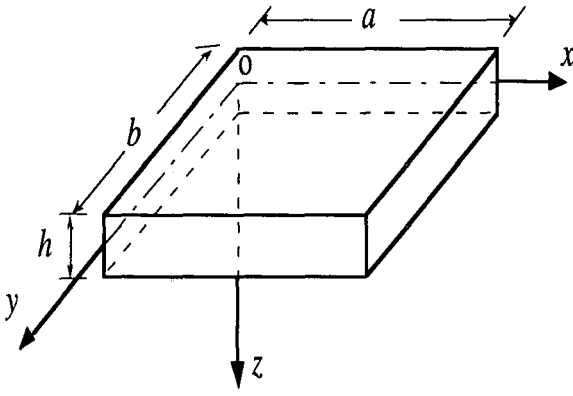
最後に、相対2辺が単純支持された等方性板を対象に Levy 解を誘導し、等分布荷重を受ける正方形板の数値解析例を示した。

2. 直交異方性板の変位関数

2.1 つり合い式

Reddy[5,6]による曲げ問題での変位仮定は、図-1を参照して、板の中央面でのたわみ w および横断面の x, y 軸まわりの回転角 ψ_y, ψ_x により、座標 (x, y, z) 方向に対して次のように与えるものである。

$$u(x, y, z) = z \left[\psi_x - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right],$$



図—1 座標系

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= z \left[\psi_y - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで h は板厚である。この変位仮定に基づく、面外せん断ひずみ γ_{yz}, γ_{xz} は板の上下面において零となる2次放物分布であることが容易に確かめられ、したがって一次せん断変形理論で導入されているせん断修正係数は不要である。また板の上下面において面外せん断応力 τ_{yz}, τ_{xz} は消失する。

変位で表したつり合い式が仮想仕事の原理により次のように導かれている。

$$\begin{aligned} L_{11}(w) + L_{12}(\psi_x) + L_{13}(\psi_y) &= -q, \\ L_{21}(w) + L_{22}(\psi_x) + L_{23}(\psi_y) &= 0, \\ L_{31}(w) + L_{32}(\psi_x) + L_{33}(\psi_y) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに q は面外荷重であり、微分演算子 L_{ij} は

$$\begin{aligned} L_{11} &= a_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + a_4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_5 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{12} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a_6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_7 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_4 \right), \\ L_{13} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(a_7 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_8 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_5 \right), \\ L_{21} &= -L_{12}, \quad L_{22} = a_9 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - a_4, \\ L_{23} &= a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad L_{31} = -L_{13}, \quad L_{32} = L_{23}, \\ L_{33} &= a_{10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - a_5 \end{aligned} \quad (3)$$

であり、また係数 a_i の内容は以下で与えられる。

$$a_1 = -\frac{1}{21} D_{11}, \quad a_2 = -\frac{2}{21} (D_{12} + 2D_{66}), \quad a_3 = -\frac{1}{21} D_{22},$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{32}{5h^2} D_{55}, \quad a_5 = \frac{32}{5h^2} D_{44}, \quad a_6 = \frac{16}{105} D_{11}, \\ a_7 &= \frac{16}{105} (D_{12} + 2D_{66}), \quad a_8 = \frac{16}{105} D_{22}, \quad a_9 = \frac{68}{105} D_{11}, \\ a_{10} &= \frac{68}{105} D_{66}, \quad a_{11} = \frac{68}{105} (D_{12} + D_{66}), \quad a_{12} = \frac{68}{105} D_{22} \end{aligned} \quad (4)$$

上式で D_{ij} は剛性を表し、これは周知のように次の式(5)で与えられる。

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \quad D_{22} = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \\ D_{12} &= \frac{\nu_{xy} E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \quad D_{66} = \frac{G_{xy} h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \\ D_{44} &= \frac{G_{yz} h^3}{12}, \quad D_{55} = \frac{G_{xz} h^3}{12} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 E_x, E_y はそれぞれ x, y 軸方向の縦弾性係数； G_{yz}, G_{xz}, G_{xy} はそれぞれ x, y, z 面における横弾性係数； ν_{ij} ($i, j = x, y$) は i 軸方向に引張りを受けるときの j 軸方向の収縮を表すポアソン比である。

2.2 つり合い式の解

式(2)のつり合い式は定数係数の連立偏微分方程式であるので、微分演算子法[7]により以下のようにその解を求めることが出来る。

(1) 同次解

式(2)で $q=0$ と置いた同次方程式の解 $w^{(h)}, \psi_x^{(h)}, \psi_y^{(h)}$ は、

$$\det(L_{ij})\phi = 0 \quad (6)$$

を満たす関数 ϕ により、次のように与えられる。

$$w^{(h)} = \varepsilon_k M_{k1} \phi, \quad \psi_x^{(h)} = \varepsilon_k M_{k2} \phi, \quad \psi_y^{(h)} = \varepsilon_k M_{k3} \phi \quad (7)$$

ここで ε_k は任意定数、 M_{kj} は行列 (L_{ij}) の余因子であり、 k は $i=1, 2, 3$ のいずれかに取る。

式(6)の $\det(L_{ij})$ を展開すれば、

$$\begin{aligned} \det(L_{ij}) &= \\ & b_1 \frac{\partial^8}{\partial x^8} + b_2 \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + b_3 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + b_4 \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + b_5 \frac{\partial^8}{\partial y^8} \\ & + b_6 \frac{\partial^6}{\partial x^6} + b_7 \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + b_8 \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + b_9 \frac{\partial^6}{\partial y^6} \\ & + b_{10} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + b_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + b_{12} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{aligned} \quad (8)$$

となり、係数 b_i は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -\frac{68 \cdot 84 D_{11}^2 D_{66}}{105^3}, \\
 b_2 &= -\frac{68 \cdot 84 D_{11} (D_{11} D_{22} - D_{12}^2 + 4D_{66}^2)}{105^3}, \\
 b_3 &= \frac{136 \cdot 84}{105^3} [D_{12} (D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{11} D_{22} (D_{12} + 3D_{66})], \\
 b_4 &= -\frac{68 \cdot 84 D_{22} (D_{11} D_{22} - D_{12}^2 + 4D_{66}^2)}{105^3}, \\
 b_5 &= -\frac{68 \cdot 84 D_{22}^2 D_{66}}{105^3}, \quad b_6 = \frac{128 D_{11} (D_{11} D_{44} + 85 D_{55} D_{66})}{25 \cdot 105 h^2}, \\
 b_7 &= \frac{128}{25 \cdot 105 h^2} (2D_{11} D_{12} D_{44} + 85 D_{11} D_{22} D_{55} + 89 D_{11} D_{44} D_{66} \\
 &\quad - 84 D_{12}^2 D_{55} - 166 D_{12} D_{55} D_{66} + 4 D_{55}^2 D_{66}^2), \\
 b_8 &= \frac{128}{25 \cdot 105 h^2} (2D_{22} D_{12} D_{55} + 85 D_{22} D_{11} D_{44} + 89 D_{22} D_{55} D_{66} \\
 &\quad - 84 D_{12}^2 D_{44} - 166 D_{12} D_{44} D_{66} + 4 D_{44}^2 D_{66}^2), \\
 b_9 &= \frac{128 D_{22} (D_{22} D_{55} + 85 D_{44} D_{66})}{25 \cdot 105 h^2}, \\
 b_{10} &= -\left(\frac{32}{5h^2}\right)^2 D_{11} D_{44} D_{55}, \\
 b_{11} &= -2 \left(\frac{32}{5h^2}\right)^2 D_{44} D_{55} (D_{12} + 2D_{66}), \\
 b_{12} &= -\left(\frac{32}{5h^2}\right)^2 D_{22} D_{44} D_{55}
 \end{aligned} \tag{9}$$

次に式(7)の余因子 M_{kj} は、 $k=1$ に取ると、

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= L_{22} L_{33} - L_{23} L_{32}, \\
 M_{12} &= L_{23} L_{31} - L_{21} L_{33}, \\
 M_{13} &= L_{21} L_{32} - L_{22} L_{31}
 \end{aligned} \tag{10}$$

であるから、この右辺の演算を行えば、

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \left(\frac{68}{105}\right)^2 D_{11} D_{66} \times \\
 &\quad \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{D_{11} D_{12} - D_{12} (D_{12} + 2D_{66})}{D_{11} D_{66}} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{168}{17h^2} \left(\frac{D_{11} D_{44} + D_{55} D_{66}}{D_{11} D_{66}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{22} D_{55} + D_{44} D_{66}}{D_{11} D_{66}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{168}{17h^2}\right)^2 \frac{D_{44} D_{55}}{D_{11} D_{66}} \right], \\
 M_{12} &= \left(\frac{68}{105}\right)^2 D_{11} D_{66} \times \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{4}{17} \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{D_{11} D_{22} - D_{12} (D_{12} + 2D_{66})}{D_{11} D_{66}} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad \left. + \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] + \frac{168}{17h^2} \left[\frac{17 D_{55} D_{66} - 4 D_{11} D_{44}}{D_{11} D_{66}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{17 D_{22} D_{55} - D_{44} (21 D_{12} + 25 D_{66})}{D_{11} D_{66}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \\
 &\quad \left. - \left(\frac{168}{17h^2}\right)^2 \frac{D_{44} D_{55}}{D_{11} D_{66}} \right\}, \\
 M_{13} &= \left(\frac{68}{105}\right)^2 D_{11} D_{66} \times \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{4}{17} \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{D_{11} D_{22} - D_{12} (D_{12} + 2D_{66})}{D_{11} D_{66}} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. + \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] + \frac{168}{17h^2} \left[\frac{17 D_{44} D_{66} - 4 D_{22} D_{55}}{D_{11} D_{66}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{17 D_{11} D_{44} - D_{55} (21 D_{12} + 25 D_{66})}{D_{11} D_{66}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \\
 &\quad \left. - \left(\frac{168}{17h^2}\right)^2 \frac{D_{44} D_{55}}{D_{11} D_{66}} \right\}
 \end{aligned} \tag{11}$$

と求められる。 ε_1 については、いずれにとってもよいが、ここでは $\varepsilon_1=1$ として上式とともに式(7)に代入すれば同次解の具体式が決定する。

(2) 特解

特解 $w^{(p)}$, $\psi_x^{(p)}$, $\psi_y^{(p)}$ は、式(2)の荷重項が q のみであることから、

$$\det(L_{ij}) \Phi = -q \tag{12}$$

を満足する関数 Φ を用いると、

$$w^{(p)} = M_{11} \Phi, \quad \psi_x^{(p)} = M_{12} \Phi, \quad \psi_y^{(p)} = M_{13} \Phi \tag{13}$$

で与えられる。余因子 M_{11} , M_{12} , M_{13} の内容は、先の同次解と同じである。

以上により、直交異方性板のつり合いの式(2)の解は8階の基本偏微分方程式 $\det(L_{ij}) \vartheta = -q$ の同次解 ϕ と特解 Φ を求めることに帰着した。この偏微分方程式は式(9)からも分かるように係数 b_i が複雑であり、次節の横等方性板の場合のように因子分解ができて階数の引き下げが可能かどうかを種々検討したが今のところ不明である。

3. 横等方性板の変位関数

異方性主軸を z 軸とし xy 面が等方面である横等方性の場合は、微分演算法以外の方法によってもつり合い式の解を求めることが出来る。以下に三つの方法によって、これが独立な2階と6階の基本偏微分方程式に帰着されることを示す。

3.1 つり合い式

横等方性板の剛性 D_{ij} は、面内縦弾性係数、ポアソン比、面外横弾性係数をそれぞれ $E (=E_x=E_y)$, $\nu (= \nu_{xy} = \nu_{yx})$, $G_z (=G_{yz}=G_{xz})$ とすれば、式(5)より次のようになる。

$$\begin{aligned} D_{11}=D_{22}=D, \quad D_{12}=\nu D, \quad D_{66}=(1-\nu)D/2, \\ D_{44}=D_{55}=D_z \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 $G_{xy}=E/2(1+\nu)$ を用いており、 D, D_z は

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_z=\frac{G_z h^3}{12} \quad (15)$$

で与えられる。これらにより、式(4)の係数 a_i および式(5)の係数 b_i は、以下のように簡単化される。

$$\begin{aligned} a_1=a_3=-\frac{D}{21}, \quad a_2=2a_1, \quad a_4=a_5=\frac{32D_z}{5h^2}, \\ a_6=a_7=a_8=\frac{16D}{105}, \quad a_9=a_{12}=\frac{68D}{105}, \quad a_{10}=\frac{1-\nu}{2}a_9, \\ a_{11}=a_9-a_{10}=\frac{1+\nu}{2}a_9 \end{aligned} \quad (16)$$

および

$$\begin{aligned} b_1=b_5=-\frac{68 \cdot 42 (1-\nu)D^3}{105^3}, \quad b_2=b_4=4b_1, \quad b_3=6b_1, \\ b_6=b_9=\frac{64 (87-85\nu)D^2D_z}{25 \cdot 105h^2}, \quad b_7=b_8=3b_6, \\ b_{10}=b_{12}=-\left(\frac{32}{5h^2}\right)^2 DD_z^2, \quad b_{11}=2b_{10} \end{aligned} \quad (17)$$

式(16)と式(17)を用いると、つり合いの式(2)は、以下のように書くことが出来る。

$$\begin{aligned} (a_1 \nabla^2 \nabla^2 + a_4 \nabla^2 + a_4) \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = -q, \\ -a_6 \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial x} - a_4 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + a_9 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + a_{10} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \\ + (a_9 - a_{10}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} = 0, \\ -a_6 \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial y} - a_4 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) + a_{10} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + a_9 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\ + (a_9 - a_{10}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$\nabla^2 (= \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$ はラプラスの演算子である。

3.2 方法 1

最初に前節で展開した微分演算子法による結果を利用すれば以下のように解が求められる。

(1) 同次解

式(17)の b_i を用いると式(8)の $\det(L_{ij})\phi=0$ は

$$\nabla^2 \nabla^2 \left[\nabla^2 - \frac{840D_z}{h^2 D} \right] \left[\nabla^2 - \frac{336D_z}{17(1-\nu)h^2 D} \right] \phi = 0 \quad (19)$$

となり、また $\varepsilon_1 = 170(105/68)^2/D^2$ と置けば変位式が式(7)と式(11)により以下のように得られる。

$$\begin{aligned} w &= 85 \left[\nabla^2 - \frac{168D_z}{17h^2 D} \right] \left[\nabla^2 - \frac{336D_z}{17(1-\nu)h^2 D} \right] \phi, \\ \psi_x &= 20 \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla^2 + \frac{42D_z}{h^2 D} \right] \left[\nabla^2 - \frac{336D_z}{17(1-\nu)h^2 D} \right] \phi, \\ \psi_y &= 20 \frac{\partial}{\partial y} \left[\nabla^2 + \frac{42D_z}{h^2 D} \right] \left[\nabla^2 - \frac{336D_z}{17(1-\nu)h^2 D} \right] \phi \end{aligned} \quad (20)$$

ところで式(19)と式(20)には共通因子が含まれており、したがって式(19)の一つの解として

$$\left[\nabla^2 - \frac{336D_z}{17(1-\nu)h^2 D} \right] \phi = 0 \quad (21)$$

より得られる ϕ は、式(20)の変位式を零にするので意味を持たない。そこでこの共通因子を排除して、同次解の一つを次式で与える。

$$\begin{aligned} w^{(h)} &= 85 \left(\nabla^2 - \frac{168D_z}{17h^2 D} \right) \phi, \quad \psi_x^{(h)} = 20 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 + \frac{42D_z}{h^2 D} \right) \phi, \\ \psi_y^{(h)} &= 20 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 + \frac{42D_z}{h^2 D} \right) \phi \end{aligned} \quad (22)$$

変位関数 ϕ は次の基本式を満たすものである。

$$\nabla^2 \nabla^2 \left(\nabla^2 - \frac{840D_z}{h^2 D} \right) \phi = 0 \quad (23)$$

つり合い式は、式(8)あるいは式(19)から分かるように元来 8 階の偏微分方程式である。したがって、6 階の偏微分方程式である式(23)より得られる変位関数 ϕ の他に 2 階の偏微分方程式を満足する変位関数が必要である。そこで、新しい変位関数 ψ により

$$\psi_x^{(h)} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y^{(h)} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w^{(h)} = 0 \quad (24)$$

で表される同次解を仮定する。これをつり合いの式

(18)に代入すれば、 $q=0$ とした第1式は恒等的に満足し、第2式と第3式より

$$\left[\nabla^2 - \frac{336D_z}{17(1-\nu)h^2D} \right] \psi = 0 \quad (25)$$

を得る。これは先に排除した式(21)に対応していることが分かる。したがって、式(22)および式(24)の和が同次解の一般形である。すなわち、

$$\begin{aligned} w^{(h)} &= 85 \left(\nabla^2 - \frac{168D_z}{17h^2D} \right) \phi, \\ \psi_x^{(h)} &= 20 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 + \frac{42D_z}{h^2D} \right) \phi + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \psi_y^{(h)} &= 20 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 + \frac{42D_z}{h^2D} \right) \phi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (26)$$

(2) 特解

式(12)と式(13)よりから得られる特解の基本式にも同次解の場合と同じ共通因子が含まれるので、これを排除して特解を以下で与える。

$$\begin{aligned} w^{(p)} &= 85 \left(\nabla^2 - \frac{168D_z}{17Dh^2} \right) \Phi, \quad \psi_x^{(p)} = 20 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 + \frac{42D_z}{Dh^2} \right) \Phi, \\ \psi_y^{(p)} &= 20 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 + \frac{42D_z}{Dh^2} \right) \Phi \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、 Φ は次式を満足する関数である。

$$\nabla^2 \nabla^2 \left(\nabla^2 - \frac{840D_z}{h^2D} \right) \Phi = \frac{q}{D} \quad (28)$$

3.3 方法 2

ここでは、ポテンシャル関数を用いる方法により解を求める。まず回転角 ψ_x , ψ_y と次の関係にある二つのポテンシャル関数 $F(x,y)$, $G(x,y)$ を考える。

$$\psi_x = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \psi_y = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (29)$$

これをつり合いの式(18)の第2式と第3式に代入すると、

$$\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

を得る。関数 A , B の内容は

$$A = (a_6 \nabla^2 + a_4)w - (a_9 \nabla^2 - a_4)G, \quad B = (a_{10} \nabla^2 - a_4)F \quad (31)$$

であり、関数 A , B は式(30)の解として一般性を失

うことなく、

$$A = B = 0 \quad (32)$$

と置ける。したがって次式を得る。

$$(a_6 \nabla^2 + a_4)w - (a_9 \nabla^2 - a_4)G = 0, \quad (33)$$

$$(a_{10} \nabla^2 - a_4)F = 0 \quad (34)$$

次に、式(29)をつり合いの式(18)の第1式に代入すれば、

$$(a_1 \nabla^2 \nabla^2 + a_4 \nabla^2)w + (a_6 \nabla^2 \nabla^2 + a_4 \nabla^2)G = -q \quad (35)$$

が得られる。式(33)と式(35)は w と G に関する連立微分方程式であり、この解を決定するために w , G と次の関係にある関数 $\lambda(x,y)$ を導入する。

$$w = (a_9 \nabla^2 - a_4)\lambda, \quad G = (a_6 \nabla^2 + a_4)\lambda \quad (36)$$

これにより式(33)は恒等的に満足し、式(35)から λ に関する微分方程式

$$\nabla^2 \nabla^2 [(a_1 a_9 + a_6^2) \nabla^2 + a_4 (2a_6 + a_9 - a_1)] \lambda = -q \quad (37)$$

を得る。そして

$$\psi = F, \quad \phi = -\frac{a_1 a_9 + a_6^2}{D} \lambda \quad (38)$$

と置き、式(16)の係数 a_i を代入して式(34)と式(37)を整理すれば、 ψ , ϕ に関して次の基本式を得る。

$$\left[\nabla^2 - \frac{336D_z}{17(1-\nu)h^2D} \right] \psi = 0, \quad (39)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \left[\nabla^2 - \frac{840D_z}{h^2D} \right] \phi = \frac{q}{D} \quad (40)$$

このとき、たわみと回転角が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} w &= 85 \left(\nabla^2 - \frac{168D_z}{17h^2D} \right) \phi, \\ \psi_x &= 20 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 + \frac{42D_z}{h^2D} \right) \phi + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \psi_y &= 20 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 + \frac{42D_z}{h^2D} \right) \phi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (41)$$

以上により ψ に関する式(39)は微分演算子法による式(25)と同一の同次方程式であり、また式(40)の非同次方程式より求められる特解 $\phi^{(p)}$ と同次

解 $\phi^{(b)}$ はそれぞれ微分演算子法による式(28)と式(23)より求められるものと同じであることは明らかである。したがって、ここで求めた変位関数は微分演算子法による変位関数と一致する。

3.3 方法 3

方法 3 として、方法 2 とは逆に回転角 ψ_x, ψ_y をポテンシャル関数とする二つの関数 $H(x, y)$, $K(x, y)$ 導入する。すなわち、

$$H = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad K = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (42)$$

まず、つり合い式(18)の第 2 式を x で微分したものと第 3 式を y で微分したものを加えると、

$$(a_6 \nabla^2 \nabla^2 + a_4 \nabla^2)w - (a_9 \nabla^2 - a_4)H = 0 \quad (43)$$

を得る。次に第 2 式を y で微分したもののから第 3 式を x で微分したものを差し引けば、

$$(a_{10} \nabla^2 - a_4)K = 0 \quad (44)$$

となり、これは先の式(34)に対応する同次方程式である。さらに、式(42)をつり合いの第 1 式に代入すると、次式を得る。

$$(a_1 \nabla^2 \nabla^2 + a_4 \nabla^2)w + (a_6 \nabla^2 \nabla^2 + a_4 \nabla^2)H = -q \quad (45)$$

これも式(35)に対応した内容形式である。 w と H の連立微分方程式、式(43)と式(45)を解くために、方法 2 と同様に

$$w = (a_9 \nabla^2 - a_4)\phi, \quad H = (a_6 \nabla^2 \nabla^2 + a_4 \nabla^2)\phi \quad (46)$$

で関係づけられる関数 $\phi(x, y)$ を導入する。これは式(43)を恒等的に満足し、式(45)に代入すると ϕ に関する次式を得る。

$$\nabla^2 \nabla^2 [(a_1 a_9 + a_6^2) \nabla^2 + a_4 (2a_6 + a_9 - a_1)] \phi = -q \quad (47)$$

これは式(37)と同形式である。そして

$$\psi = -\frac{a_{10}}{a_4} K, \quad \phi = -\frac{a_1 a_9 + a_6^2}{D} \phi \quad (48)$$

と置いて、式(44)と式(47)を整理すれば ψ, ϕ に関する基本式が次のように得られる。

$$\left[\nabla^2 - \frac{336 D_z}{17(1-\nu) h^2 D} \right] \psi = 0, \quad (49)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \left[\nabla^2 - \frac{840 D_z}{h^2 D} \right] \phi = \frac{q}{D} \quad (50)$$

同時に w, H は式(46)より次のようになる。

$$w = 85 \left[\nabla^2 - \frac{168 D_z}{17 h^2 D} \right] \phi, \quad (51)$$

$$H = 20 \nabla^2 \left[\nabla^2 + \frac{42 D_z}{h^2 D} \right] \phi \quad (52)$$

最後に回転角 ψ_x, ψ_y と変位関数 ψ, ϕ との関係を求める。つり合い式(18)の第 2, 第 3 式より

$$\begin{aligned} a_4 \psi_x &= -(a_6 \nabla^2 + a_4) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(a_9 \frac{\partial H}{\partial x} - a_{10} \frac{\partial K}{\partial y} \right), \\ a_4 \psi_y &= -(a_6 \nabla^2 + a_4) \frac{\partial w}{\partial y} + \left(a_9 \frac{\partial H}{\partial y} + a_{10} \frac{\partial K}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

したがって、これは式(48), (51), (52)を利用して次のように整理できる。

$$\begin{aligned} \psi_x &= 20 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 + \frac{42 D_z}{h^2 D} \right) \phi + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \psi_y &= 20 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 + \frac{42 D_z}{h^2 D} \right) \phi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (54)$$

以上を検討すると、式(49)は式(25)と同一の内容であり、また非同次方程式(50)より求められる特解 $\phi^{(p)}$ と同次解 $\phi^{(b)}$ はそれぞれ式(28)と式(23)より求められるものと同じである。したがって、方法 3 による変位関数も方法 2 による変位関数と同じく微分演算子法による変位関数と一致する。

4. 等方性板の変位関数

等方性板では、式(15)において

$$G_z = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad D_z = \frac{(1-\nu)}{2} D \quad (55)$$

であるので、前節の内容を総合すると、変位は

$$\begin{aligned} w &= 85 \left[\nabla^2 - \frac{84(1-\nu)}{17 h^2} \right] \phi, \\ \psi_x &= 20 \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla^2 + \frac{21(1-\nu)}{h^2} \right] \phi + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \psi_y &= 20 \frac{\partial}{\partial y} \left[\nabla^2 + \frac{21(1-\nu)}{h^2} \right] \phi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (56)$$

で与えられる。そして ψ, ϕ は次の基本式を満たすものである。

$$\left[\nabla^2 - \frac{168}{17h^2} \right] \psi = 0, \quad (57)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \left[\nabla^2 - \frac{420(1-\nu)}{h^2} \right] \phi = \frac{q}{D} \quad (58)$$

$$Q_2 = \frac{4(1-\nu)D}{h^2} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$R_2 = \frac{(1-\nu)D}{5} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (63)$$

5. 相対2辺単純支持等方性矩形板の解析

5.1 解析対象と境界条件

ここでは図—2に示しているように、 $x=0, a$ の相対2辺で単純支持され、残りの2辺 $y=\pm b/2$ が(1)単純支持、(2)固定、(3)自由である等方性矩形板を解析対象とし、外荷重には全面等分布荷重 q_0 を用いる。Reddy 平板の境界条件は次のとおりである。

$$(1) \text{単純支持 } (x=0, a): \quad w = \psi_y = M_1 = P_1 = 0 \quad (59)$$

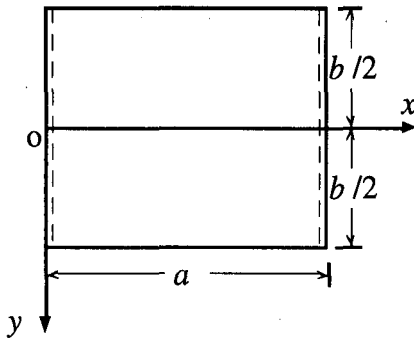
$$(2) \text{単純支持 } (y=\pm b/2): \quad w = \psi_x = M_2 = P_2 = 0 \quad (60)$$

$$(3) \text{固定 } (y=\pm b/2): \quad w = \partial w / \partial y = \psi_x = \psi_y = 0 \quad (61)$$

$$(4) \text{自由 } (y=\pm b/2):$$

$$M_2 = P_2 = 0, \quad Q_2 - \frac{4}{h^2} R_2 + \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_6}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) = 0,$$

$$M_6 - \frac{4}{3h^2} P_6 = 0 \quad (62)$$



図—2 相対2辺単純支持板の座標系

以上に現れる M_i, P_i などは、次式で与えられる。

$$M_1 = \frac{D}{5} \left[4 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right],$$

$$M_2 = \frac{D}{5} \left[4 \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right],$$

$$M_6 = \frac{(1-\nu)D}{5} \left[2 \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right],$$

$$P_1 = \frac{4}{35} D h^2 \left[\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) - \frac{5}{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right],$$

$$P_2 = \frac{4}{35} D h^2 \left[\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) - \frac{5}{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right],$$

$$P_6 = \frac{2(1-\nu)}{35} D h^2 \left[\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) - \frac{5}{8} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right],$$

5.2 Levy 解

$x=0, a$ の相対2辺で単純支持された矩形板ではLevyの単級数解が有用である。そこで解析に当たりまず等分布荷重 q_0 をフーリエ級数に展開すると、以下になる。

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \alpha_m x \quad (64)$$

$$q_m = \frac{4q_0}{m\pi}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad (m=1, 3, 5, \dots) \quad (65)$$

$x=0, a$ での単純支持条件を満たす式(58)の特解を

$$\phi^{(p)} = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m \sin \alpha_m x \quad (66)$$

と置き、式(64)とともに式(58)に代入すれば、

$$\phi_m = - \frac{q_m h^6}{D(\alpha_m h)^4 [(\alpha_m h)^2 + 420(1-\nu)]} \quad (67)$$

を得る。次に、式(58)の同次解を、

$$\phi^{(h)} = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(y) \sin \alpha_m x \quad (68)$$

と置き、 $q=0$ とした式(58)に代入すれば $\Phi_m(y)$ が

$$\Phi_m = A_1 \cosh \alpha_m y + A_2 \sinh \alpha_m y + A_3 \alpha_m y \cosh \alpha_m y + A_4 \alpha_m y \sinh \alpha_m y + B_1 \cosh \beta_m y + B_2 \sinh \beta_m y \quad (69)$$

と決まる。ただし、 A_i, B_i は積分定数であり、また

$$\beta_m = \sqrt{\alpha_m^2 + \frac{420(1-\nu)}{h^2}} \quad (70)$$

である。さらに、別の同次解 ψ については、

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(y) \cos \alpha_m x \quad (71)$$

と置き、式(57)に代入すれば次式を得る。

$$\Psi_m = C_1 \sinh \gamma_m y + C_2 \cosh \gamma_m y \quad (72)$$

ただし、 C_i は積分定数であり、また

$$\gamma_m = \sqrt{\alpha_m^2 + \frac{168}{17h^2}} \tag{73}$$

である。

以上により求められた ϕ, ψ を式(56)に代入してたわみと回転角 w, ψ_x, ψ_y を求めた後に式(63)により断面力式を得る。これらを式(60)～式(62)の各境界条件式に代入して求められる積分定数に関する4元連立方程式を解くことにより積分定数が決定し、したがって問題の解が確定する。ただし、ここでは x 軸に関する対称問題を扱っているのので、積分定数の内 A_2, A_3, B_2, C_2 は不要である。

5.3 数値計算例

奥村・渡辺[8]は3次元弾性論に基づく厚板理論を展開し、部分荷重および等分布荷重を受ける相対2辺正方形板の数値解を薄板のそれと比較し、薄板理論の適用性を示している。ここでは等分布荷重を受ける正方形板のたわみと曲げ応力について、ポアソン比を $\nu=0.3$ とした数値計算を行い、奥村らの結果と比較する。なお着目点は板の中心軸上とする。表一1から表一3はその結果であり、薄板理論によ

表一1 w/w_c の比較 ($x=a/2, y=z=0$)

h/a	固定		単純支持		自由	
	奥村ら	本法	奥村ら	本法	奥村ら	本法
1/8	1.274	1.287	1.072	1.081	1.035	1.043
1/12	1.126	1.130	1.032	1.036	1.014	1.019
1/16	1.072	1.074	1.018	1.020	1.006	1.011
1/20	1.046	1.047	1.011	1.013	1.003	1.007

表一2 σ_x/σ_{xc} の比較 ($x=a/2, y=z=-h/2$)

h/a	固定		単純支持		自由	
	奥村ら	本法	奥村ら	本法	奥村ら	本法
1/8	1.150	1.144	1.007	1.010	1.000	1.011
1/12	1.070	1.066	1.003	1.004	0.997	1.007
1/16	1.040	1.038	1.002	1.003	0.997	1.006
1/20	1.026	1.024	1.001	1.002	0.997	1.005

表一3 σ_y/σ_{yc} の比較 ($x=a/2, y=z=-h/2$)

h/a	固定		単純支持		自由	
	奥村ら	本法	奥村ら	本法	奥村ら	本法
1/8	1.028	1.041	1.007	1.010	0.950	1.029
1/12	1.014	1.019	1.003	1.004	0.968	1.042
1/16	1.008	1.011	1.002	1.003	0.977	1.049
1/20	1.005	1.007	1.001	1.002	0.982	1.054

る値との比で表している。用いた板厚比は $h/a=1/8\sim 1/20$ と変化させているが、本計算値は、いずれの場合もたわみ、応力ともに弾性解と比較的

良く一致していることが分かる。ただし、自由辺を持つ場合の応力 σ_y には両者の差が見られる。

6. おわりに

Reddy による3次せん断変形理論に基づく直交異方性板のつり合い式を微分演算子法により解く方法を示し、8階の偏微分方程式を満足する変位関数を見出す問題に帰着させた。続いて、横等方性板の場合には、微分演算子法の他に2種のポテンシャル関数法の適用が可能であり、いずれの方法によっても同一の結果が得られることを示した。すなわち、つり合い式は独立な2階と6階の二つの偏微分方程式に変換される。

最後に、相対2辺単純支持等方性板を対象にしてLevy型の単級数解を誘導し、等分布荷重を受ける各種境界を持つ正方形板の数値解析例を示した。その結果、奥村・渡辺の弾性論による解と比較的よい一致を示した。

参考文献

[1] Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, **12**(1945) A69-A77.
[2] Mindlin, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. Appl. Mech.*, **18**(1951)31-38.
[3] Reissner, E.: Reflections on the theory of elastic plates, *Appl. Mech. Rev.*, **38**(1985)1453-1464.
[4] Mallikarjuna and Kant, T.: A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches, *Composite Struct.*, **23**(1993)293-312.
[5] Reddy, J. N.: *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, Wiley, New York, 1984.
[6] Reddy, J. N.: A simple higher-order theory for laminated composite plates, *J. Appl. Mech.*, **51**(1984)745-752.
[7] Heki, K. and Habara, T.: Introduction of parametric functions into analysis of elastic thin plates, *Proc. 15th Japan Natl. Congr. Appl. Mech.*, 1966, pp. 1-4.
[8] 奥村勇, 渡辺午一: 種々の境界条件を持つ長方形厚板の解析と薄板理論の適用性について, 構造工学論文集, 土木学会, **38A**(1992)43-54.

付録 M_i, P_i, Q_i, R_i の定義式

$$\begin{aligned} (M_i, P_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(z, z^3) dz \quad (i=1, 2, 6) \\ (Q_2, R_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4(1, z^2) dz \\ (Q_1, R_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_5(1, z^2) dz \end{aligned}$$

ただし、 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6) = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ である。

(1999年4月23日受付)