

津波波源域推定への非線形最適化手法の適用

Application of Nonlinear Optimization Method to Identification Problem of Source Area of Tsunami

辻原 治*・沢田 勉**

Osamu TSUJIHARA and Tsutomu SAWADA

*正会員 博士 (工学) 和歌山工業高等専門学校助教授 環境都市工学科 (〒644-0023 和歌山県御坊市名田町野島 77)
 **正会員 工博 徳島大学工学部教授 建設工学科 (〒770-8506 徳島市南常三島町 2-1)

This paper describes a new method to identify the source area of tsunami as soon as possible after an earthquake. The identification problem is formulated as an optimization problem in which modified successive linear programming(MSLP) is applied. Some numerical experiments have been carried out to discuss the validity of the proposed method. Subsequently, the source area of tsunami in 1946 Nankai Earthquake has been identified.

Key Words : tsunami, source area, identification, modified successive linear programming

1. はじめに

地震発生後、津波の波源域を早期に把握することは、津波による被害の軽減や被害規模の推定に役立つ。また、津波の波源域は余震の震央の範囲と多くの場合よく対応することが知られており¹⁾、地震断層の広がりとその後の余震について重要な情報を提供すると考えられる。

従来津波波源域の決定には、津波の逆伝播図を利用した方法が用いられている^{1), 2), 3)}。この方法は、津波の到達点を波源として、そこから津波伝播に要した時間だけ波面をさかのぼって津波発生点の軌跡を描き、それらの包絡線によって波源を決定する方法である。

この方法では、事前に検潮所等を出発点とする津波の逆伝播図を必要とする。また、任意形状の波源域推定が可能である反面、利用可能な津波発生点の軌跡の数が少ない場合や、津波発生点の軌跡に誤差を含む場合等、波源域の決定に種々の判断を要し、問題が複雑になる。

本研究では、地震発生後の早期津波波源域推定を念頭に置き、波源域の同定問題を、任意点への津波初動到達時間および周辺の海底地形を既知とする最適化問題に置き換え、これに非線形最適化手法を適用した簡便な津波波源推定法を提案する。

2. 津波波源域同定問題の定式化

2.1 津波伝播時間の計算法

(1)点波源の場合

津波が伝播する速度は水深によって変化する。長波理論によれば、津波の伝播速度は次式で計算することができる。

$$v = \sqrt{gH} \quad (1)$$

水深が一定であれば、2点間の距離と速度から津波の伝播時間を計算することができる。しかし実際には、海底地形は複雑であり、水深は場所によって異なる。そこで、図-1に示すように、津波が直線的に伝わるものと仮定し、線上の複数点(1,2,...,N)での水深を求め、次式により伝播時間を計算することとした。

$$t = \frac{D'}{\sqrt{g}} \eta \quad (2)$$

ここに、 g は重力加速度であり、 D' および η はそれぞれ次式で表される。

$$D' = D / N \quad (3)$$

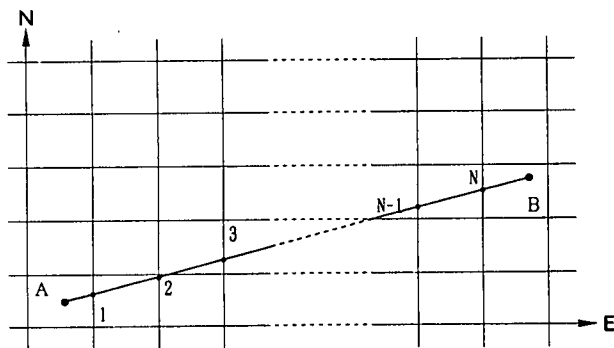


図-1 点波源(A),津波到達点(B)および等間隔の経緯線

$$\eta = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{H_i}} \quad (4)$$

上式において、 D は AB 間の距離を表し、式(5)で近似する。 N はそのような交点の総数である。

$$\left. \begin{aligned} D &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ X &= \pi R \cos\left(\frac{N_B + N_A}{2}\right)(E_B - E_A)/180 \\ Y &= \pi R(N_B - N_A)/180 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 R は地球の半径であり、 (E_A, N_A) 、 (E_B, N_B) はそれぞれ点 A, B の経緯度である。

また、 H_i は線分 AB と一定間隔の経線または緯線との交点 i での水深を表す。図-2において、格子線の交点 α 、 β の水深 H_α 、 H_β が既知であるとき、この間の水深が図-3に示すように直線的に変化すると仮定し、次式のように内挿する。

$$H_i = H_\alpha + \frac{N_i - N_\alpha}{N_\beta - N_\alpha}(H_\beta - H_\alpha) \quad (6)$$

ここに、 N_α 、 N_β は格子線の交点 α 、 β の緯度であり、 N_i は交点の緯度を表す。

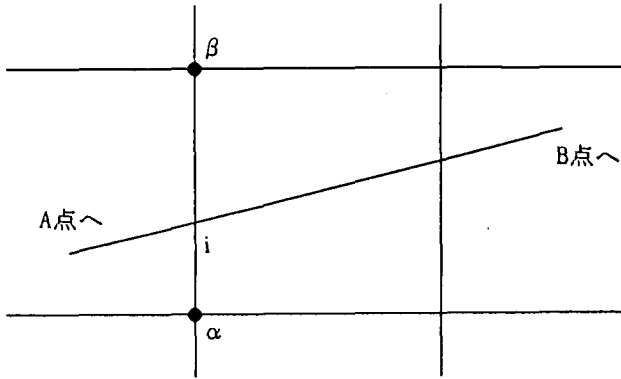


図-2 津波の波線と経緯線との交点

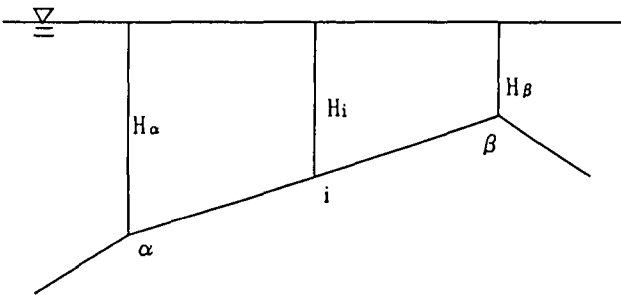


図-3 津波の波線方向の断面

(2)線波源の場合

波源となる線分上の任意点からの津波伝播時間を計算し、最短のものを採用する。具体的には、図-4に示すように波源の線分を m 分割し、それぞれの分割点について点波源の計算法を適用して、津波伝播時間の最小値をとる。

分割点 s の経緯度 E'_s 、 N'_s は次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} E'_s &= E_{01} + \frac{s}{m}(E_{02} - E_{01}) \\ N'_s &= N_{01} + \frac{s}{m}(N_{02} - N_{01}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 (E_{01}, N_{01}) 、 (E_{02}, N_{02}) はそれぞれ、線分の端点の経緯度である。

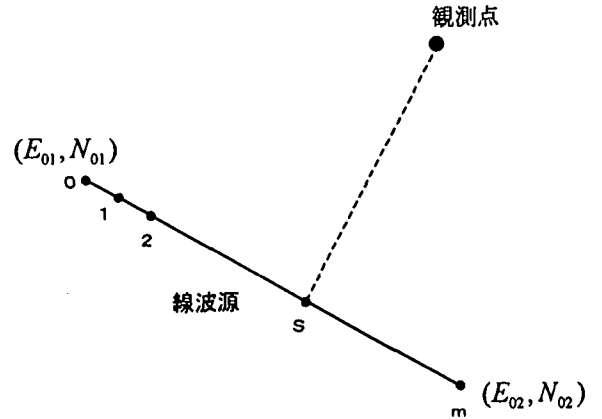


図-4 線波源のパラメータと分割点

(3)楕円波源の場合

楕円波源の場合は、図-5のように楕円軸上の等間隔の分割線と楕円周との交点 s について点波源の計算法を適用し、津波伝播時間の最小値をとる。

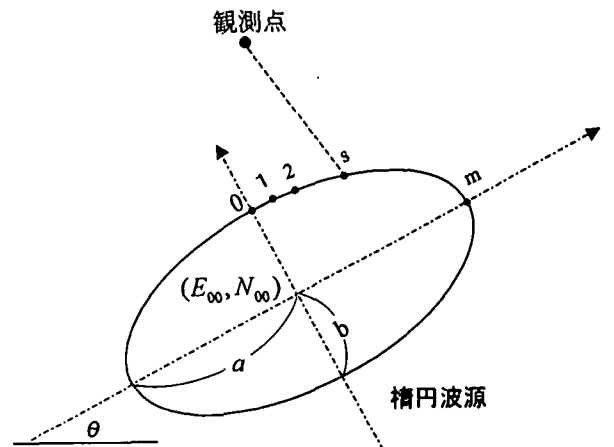


図-5 楕円波源のパラメータと分割点
 θ ; 楕円軸の傾き
 (E_{00}, N_{00}) ; 楕円中心経緯度

分割点 s の経緯度 E'_s 、 N'_s は次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} E'_s &= a \frac{s}{m} \cos \theta \mp b \sqrt{1 - \left(\frac{s}{m}\right)^2} \sin \theta + E_{00} \\ N'_s &= a \frac{s}{m} \sin \theta \pm b \sqrt{1 - \left(\frac{s}{m}\right)^2} \cos \theta + N_{00} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$s = -m, m-1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m-1, m$$

ここに,

a ; 楕円長軸の径

b ; 楕円短軸の径

2.2 津波波源の同定

(1) 点波源の場合

図-6 に示すような n 個の点で津波の初動到達時間 $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_j, \dots, \bar{t}_n)$ が利用可能とすると, 点波源の同定問題は次式を最小化する最適化問題に置き換えることができる。

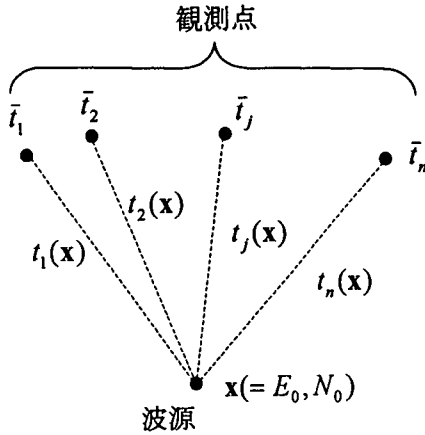


図-6 点波源から観測点までの津波初動到達時間

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w_j \{t_j(\mathbf{x}) - \bar{t}_j\}^2 \rightarrow \min \quad (9)$$

ここに, $\mathbf{x}$ は未知変数ベクトルであり, 点波源の場合は, その点の経緯度 E_0, N_0 の2変数である。式中の w_j は重み係数を表す。

上式の最小化問題を解くために, 本研究では改良 SLP 法⁴⁾ を適用した。

(2) 線および楕円波源の場合

線および楕円波源の場合も同様であり, 2.1 で述べたように, 最短の伝播時間を求め, これを式(9)の $t_j(\mathbf{x})$ とする。ただし, 未知変数 $\mathbf{x}$ は, 線波源の場合は $E_{01}, N_{01}, E_{02}, N_{02}$ の4変数であり, 楕円波源の場合は $a, b, \theta, E_{00}, N_{00}$ の5変数となる。

2.3 改良 SLP 法の概要

改良 SLP 法は, 非線形最適化手法の SLP 法⁵⁾ が持つ簡便性, 安定性といった長所を生かしつつ, 短所である最適解近傍における収束性を, 目的関数の2次微係数を導入することにより改善した方法である。以下にその概要を述べる。

式(9)を反復過程の第 r 段階において, 未知変数の値 $\mathbf{x}^{(r)}$ のまわりでテーラー展開し, 2次の項までで近似す

ると次式が得られる。

$$S(\mathbf{x}) \cong S(\mathbf{x})^{(r)} + \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right)^{(r)} \Delta x_k^{(r)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \left(\frac{\partial^2 S(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l} \right)^{(r)} \Delta x_k^{(r)} \Delta x_l^{(r)} \quad (10)$$

ここに, p は未知変数の数を表す。上式は $\Delta \mathbf{x}^{(r)}$ に関して非線形であるので, これを変数とみなして SLP 法を適用する。すなわち, $\Delta \mathbf{x}^{(r)}$ を新たな変数ベクトル $\mathbf{y}$ として書き直すと次のように表すことができる。

$$F = \sum_{k=1}^p q_k y_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p Q_{kl} y_k y_l \quad (11)$$

$$-y_{ku} \leq y_k \leq y_{ku} \quad (12)$$

ただし, $S(\mathbf{x})^{(r)}$ は定数であるから式(11)から省いている。

式(12)は y_k のムーブリミットを表し, y_{ku} は次式で与えられる。

$$y_{ku} = \xi \cdot x_k^{(r)} \quad (13)$$

ξ はムーブリミットを決定する微小な係数 (正値) であり, $\xi = 0.01 \sim 0.2$ 程度の値が用いられる。この ξ は, SLP 法による解の収束性に影響し, 小さすぎると反復計算回数が多くなり, 収束性が悪くなる。

式(11)をさらに $\mathbf{y}$ の初期値まわりでテーラー展開して線形化すると, 次式が得られる。

$$F \cong F^{(0)} + \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \right)^{(0)} \Delta y_k^{(0)} \rightarrow \min \quad (14)$$

上式の $\partial F / \partial y_k$ は次式で表される。

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} = q_k + \sum_{l=1}^p Q_{kl} y_l \quad (15)$$

また q_k, Q_{kl} はそれぞれ $\partial S(\mathbf{x}) / \partial x_k, \partial^2 S(\mathbf{x}) / \partial x_k \partial x_l$ の $\mathbf{x}^{(r)}$ における値であり, 次式で表される。

$$q_k = 2 \sum_{j=1}^n w_j \{t_j(\mathbf{x}) - \bar{t}_j\} \frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} \quad (16)$$

$$Q_{kl} = 2 \sum_{j=1}^n w_j \left[\frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} \frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \{t_j(\mathbf{x}) - \bar{t}_j\} \frac{\partial^2 t_j(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l} \right] \quad (17)$$

最適解の近傍において, $\{t_j(\mathbf{x}) - \bar{t}_j\}$ が無視できるほど小さいと仮定すれば, Q_{kl} も $t_j(\mathbf{x})$ の一次微係数から次式で近似できる。

$$Q_{kl} \equiv 2 \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} \frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_l} \quad (18)$$

なお、 $t_j(\mathbf{x})$ の一次微係数の誘導は付録で述べる。

ところで、式(14)の最小化は、 $\Delta \mathbf{y}$ に次のようなムープリミットを設定することによって、LP 問題に置き換えることができる。

$$-s \cdot y_{ku} \leq \Delta y_k \leq s \cdot y_{ku} \quad (19)$$

ここで、 s はムープリミットを決定する係数（正値）であり、反復計算の過程で解が振動しはじめたら、その値を低減する。

上述の LP 問題を解く際に、制約条件が式(19)のムープリミットのみであることを考慮すると、増分量 Δy_k は以下のように簡単に求められる。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{if} & \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \right) \geq 0 \quad \text{then} \quad \Delta y_k = -s \cdot y_{ku} \\ \text{if} & \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \right) < 0 \quad \text{then} \quad \Delta y_k = s \cdot y_{ku} \end{array} \right\} \quad (20)$$

以上のような改良SLP法を用いて計算する手順を述べると、次のようになる。

- 1) 反復過程の第 r 段階における未知変数の値 $\mathbf{x}^{(r)}$ について q_k および Q_{kl} を計算する。
- 2) y_k の初期値 $y_k^{(0)} = 0, k=1, 2, \dots, p$ における $(\partial F / \partial y_k)^{(0)}$ の値を式(15)により計算する。
- 3) 式(20)より、 y_k の増分量 $\Delta y_k^{(0)}$ を求め、 $y_k^{(1)} = y_k^{(0)} + \Delta y_k^{(0)}$ により計算する。
- 4) 2), 3) を所定の回数繰り返して、得られた y_k を $\Delta \mathbf{x}^{(r)}$ とおく。
- 5) 未知変数を $\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^{(r)} + \Delta \mathbf{x}^{(r)}$ のように更新し、収束判定基準が満足されない場合は 1) に戻る。

3. 数値計算結果および考察

3.1 波源同定の数値計算

まず、点波源同定のシミュレーションについて述べる。解析は紀伊半島および四国沖の海域を対象とした。使用した紀伊半島・四国沖の海底地形⁶⁾の鳥瞰図を図-7に示す。水深のデータは、一分間隔の経緯線の交点で与えている。

波源の真値は東経 136.62 度、北緯 33.03 度とし、和歌山県の潮岬、徳島県の蒲生田岬、高知県の室戸岬および足摺岬の4地点を観測点と仮定した。波源の真値から観測点までの津波到達時間はあらかじめ計算しておき、これを観測値として用いる。図-8には、観測点を黒丸で表し、津波初動到達時間（単位：分）を括弧内に示す。

そして、同図に示すような波源の初期値を与えて同定計算を行った。図-9は反復過程における波源の収束状況であり、ほぼ真値に収束していることがわかる。

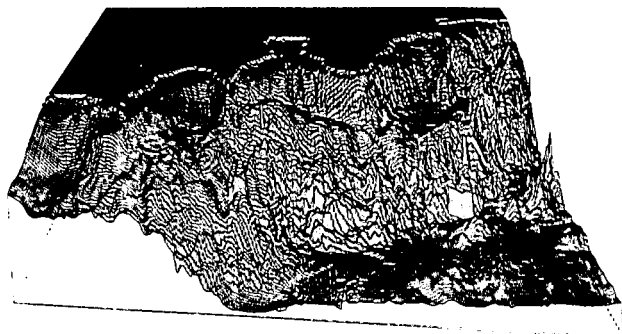


図-7 紀伊半島・四国沖の海底地形の鳥瞰図

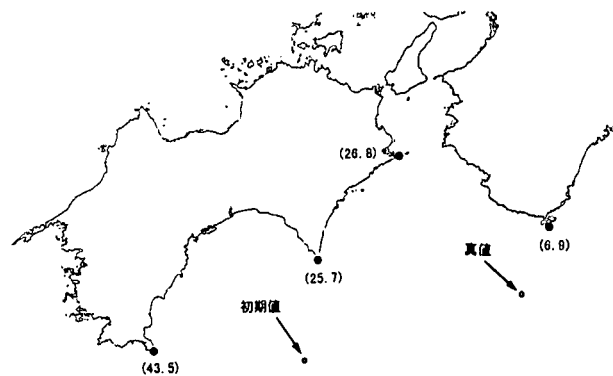


図-8 点波源同定における真値と初期値および観測点



図-9 反復過程における点波源の収束状況

表-1に波源の真値、初期値および収束値を示す。また、図-10は反復過程における津波到達時間の誤差（絶対値）の総和を表したものである。

解析にはパーソナルコンピュータ（CPU;Pentium

200MHz) を使用しており、50 回の反復計算に要した時間は約 8 秒であった。図-11 は同定された波源からの津波伝播時間を 5 分刻みのコンターで表示している。

表-1 点波源の真値, 初期値および収束値

	E_0 (度)	N_0 (度)
真 値	135.620	33.030
初 期 値	134.084	32.659
収 束 値	135.619	33.029

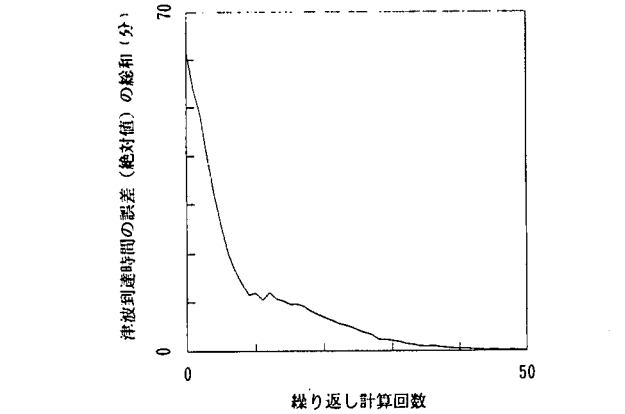


図-10 点波源同定における津波到達時間の誤差

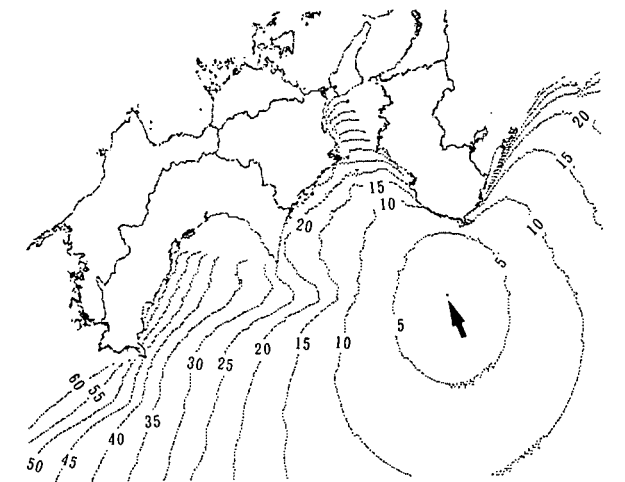


図-11 同定された点波源から津波伝播時間 (単位 ; 分)

つぎに、線波源同定のシミュレーションの結果を示す。解析条件は点波源の場合と同様である。図-12、13 にそれぞれ、線波源の初期値と真値および波源の収束状況を示す。表-2 に線波源のパラメータの値を示しており、波源はほぼ真値に収束していることがわかる。また、図-14 には反復過程における津波到達時間の誤差 (絶対値) の総和を示す。

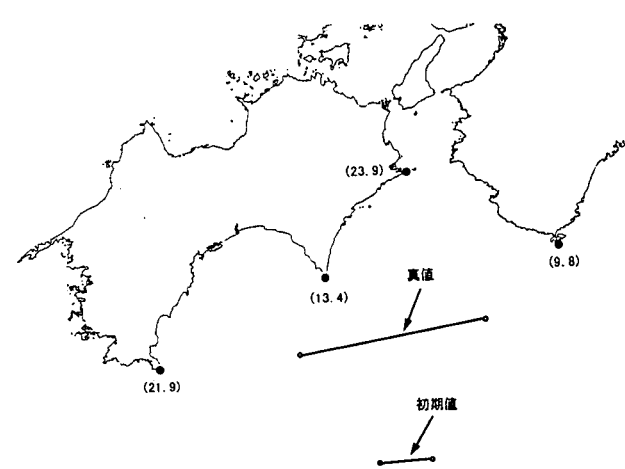


図-12 線波源同定における真値と初期値および観測点



図-13 反復過程における線波源の収束状況

表-2 線波源の真値, 初期値および収束値

	E_{01} (度)	N_{01} (度)	E_{02} (度)	N_{02} (度)
真 値	135.300	33.000	134.000	32.800
初期値	134.558	32.178	134.926	32.200
収束値	135.294	33.008	133.996	32.798

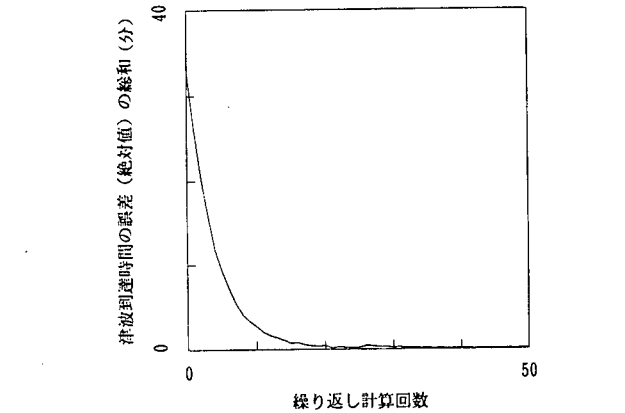


図-14 線波源同定における津波到達時間の誤差

3.2 1946 年南海地震津波の波源同定への適用

本手法を 1946 年南海地震津波の波源同定に適用した。同津波において、和歌山県の勝浦、すさみ、徳島県の日和佐、高知県の手結、下田への津波伝播時間の実記録⁷⁾を用いる。この津波に関しては逆伝播図法によって波源が推定されており、文献 7)を参考に、観測点から波源への津波逆伝播時間と実記録との誤差が比較的小さい地点を選んで、その記録を用いることとした。

同定に際しては、楕円波源として表-3 に示す初期値を与えた。図-15 に波源の初期値および収束値を示す。

図-16, 17 にはそれぞれ波源の収束状況および反復過程における津波到達時間の誤差(絶対値)の総和を表す。同定された波源のパラメータを表-3 に示す。

表-3 楕円波源として同定された 1946 年南海地震津波波源のパラメータ

	初 期 値	収 束 値
E_{00} 中心の東経(度)	134.900	134.748
N_{00} 中心の東経(度)	32.800	33.077
$2a$ 長軸の長さ(度)	1.000	2.794
$2b$ 短軸の長さ(度)	0.600	0.886
θ 軸の傾き(度)	5.000	2.234

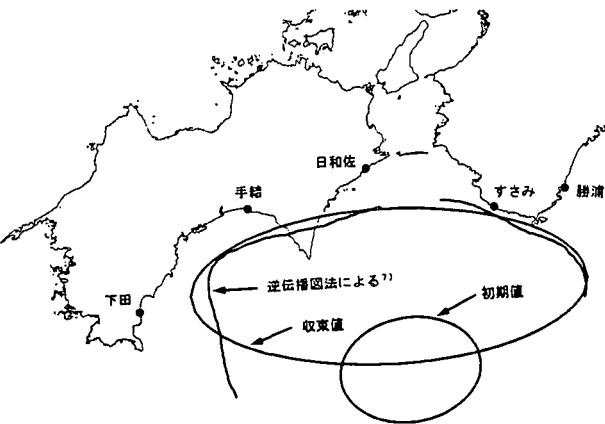


図-15 1946 年南海地震津波波源同定における初期値、収束値、逆伝播図法による推定値および観測点

比較のために逆伝播図法によって推定された波源⁷⁾も図-15 に示しており、本手法による同定結果とよく対応するものである。また、同定された波源から各地点までの津波伝播時間を表-4 に示すが、実際の記録とよく対

応していることがわかる。この解析にも前述の仕様のパーソナルコンピュータを用いたが、計算に要した時間は 110 秒であった。

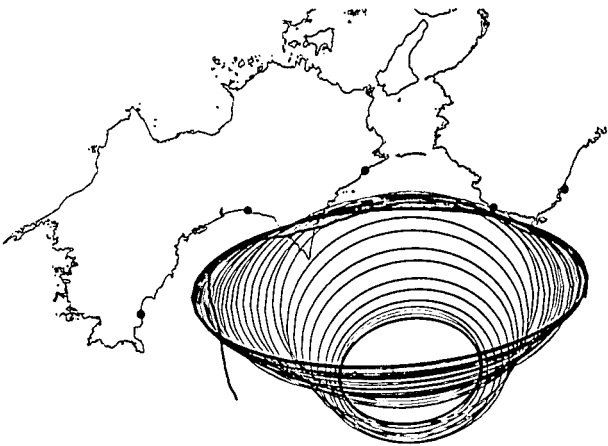


図-16 反復過程における 1946 年南海地震津波波源の収束状況

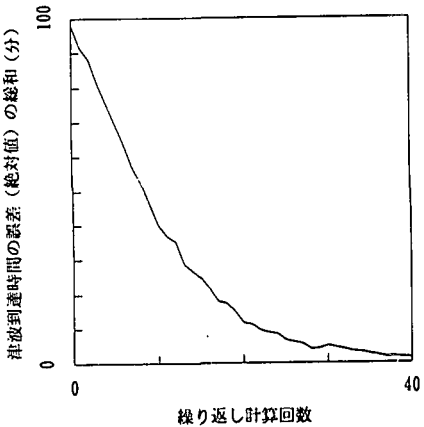


図-17 1946 年南海地震津波波源同定における津波到達時間の誤差

表-4 1946 年南海地震における津波の伝播時間

	記録値 (分)	推定値 (分)	推定誤差 (分)
勝 浦	10	10.05	0.05
すさみ	4	3.82	-0.18
日和佐	15	14.58	-0.42
手 結	15	14.87	-0.13
下 田	20	20.74	0.74

このように、1946 年南海地震津波の波源域をかなり精度よく同定することができたと考えられ、実際の問題に対する本手法の適用性についても良好であることを明らかにすることができた。

4. まとめ

地震発生後、速やかに津波波源域を推定する新たな方法を提示し、その妥当性を検討した。

本研究で得られた結果を要約するとつぎのようになる。

- (1) 任意点への津波伝播時間と海底地形の数値データを用いて、点、線および楕円波源を同定する問題を定式化し、これに非線形最適化手法を適用して解く方法を提示した。
- (2) 数値解析により、波源同定のシミュレーションを行った結果、妥当な結果が得られた。解析にはパーソナルコンピュータを用いたが、点波源の同定に要した計算時間は数秒程度であり、効率が良い手法であることを示した。
- (3) 実際の問題への適用性を検討するため、1946年南海地震津波の波源同定へ本手法を適用した結果、逆伝播図法による推定値と対応する良好な結果が得られた。

一方、本手法には以下に示すようないくつかの課題が残されている。

- (1) 波源と観測点の間に陸地がある場合など不都合が生じる。これは、波の屈折や回折を考慮していないためである。それらを考慮すれば問題は回避でき、また解析精度も向上する反面、問題を非常に複雑にするとともに、多大な計算時間を必要とする。したがって、地震発生後、津波波源の第一近似を速やかに得ることを目的とした場合、別の近似的な解法を導入することでこの問題に対応する方が現実的であると考えられる。
- (2) 逆伝播図による波源の推定法と同様に、波源域を包含するように津波伝播時間の記録が必要になることで、観測点が偏っている場合は誤った推定を行ってしまう。
- (3) 海底地形のデータとして、本研究では、対象の海域を経緯度一分の等間隔に分割し、分割線の交点における水深を与えた。そのため、沿岸付近の水深が比較的浅く変化のある部分で津波伝播時間の計算誤差が生じやすい。今後、海底地形が急激に変化する場所や沿岸部については水深データを密にする等の合理的な分割を行う必要がある。

ここで示した津波波源同定のシミュレーションは、陸地への第一波到達時間を用いた。しかし、陸に津波が到達する前に海上等における津波の到達がなんらかの方法で検知できれば、それより波源域を同定し、周辺各地への津波到達時間を求めることで、より高精度の津波到達時間の予測が可能になるであろう。地震発生直後に地震

断層のパラメータが推定できれば、それを参考にした津波伝播解析も考えられるが、本論文で述べたアプローチもいくつかの課題はあるものの、有効な方法と考えられる。

参考文献

- 1) 宇津徳治総編集：地震の辞典（第8刷），朝倉書店，pp. 280-281，1995。
- 2) 渡辺偉夫：日本被害津波総覧（第2刷），東京大学出版会，pp. 9-11，1995。
- 3) 首藤伸夫：津波と防災，土木学会論文集，第369号，II-5，pp. 1-11，1986。
- 4) 沢田勉，辻原治他：地盤のS波速度およびQ値の同定問題におけるSLP法の改良とその適用，土木学会論文集，No. 446/I-19，pp. 205-213，1992。
- 5) Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C. (川井・戸川訳) 最適構造設計—基礎と応用—，培風館，pp. 121-124，1977。
- 6) 海上保安庁刊行，大陸棚の海の基本図（例えばNo. 6602号 東海・紀伊沖），1993。
- 7) 羽鳥徳太郎：東海・南海道沖における大津波の波源，地震2，第27巻，pp. 10-24，1974。

付録 津波伝播時間の一次偏導関数の誘導

本文の式(12)および(14)の偏微分係数に含まれる津波伝播時間の偏導関数を誘導する。

(1) 点波源の場合

式(1)より， $t_j(\mathbf{x})$ の導関数は次式で表される。

$$\frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial D'_j}{\partial x_k} \eta_j + D'_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A-1})$$

ここに， D'_j, η_j はそれぞれ式(3)，(4)で求められる。

以下では D'_j および η_j の偏導関数について述べる。

D'_j の偏導関数は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial D'_j}{\partial x_k} &= \frac{1}{N} \frac{\partial D_j}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{X_j^2 + Y_j^2} \\ &= \frac{1}{N} (X_j^2 + Y_j^2)^{-\frac{1}{2}} \left(X_j \frac{\partial X_j}{\partial x_k} + Y_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

ここに， D'_j は観測点jへの津波の最短伝播時間を与える経路の距離であり，式(5)で計算される。また，上式の $\partial X / \partial x_k$ ， $\partial Y / \partial x_k$ は点波源の場合次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_j}{\partial E_0} &= -\pi R \cos(N_j) / 180 \\ \frac{\partial X_j}{\partial N_0} &= -0.5\pi R \sin\left(\frac{N_j + N_0}{2}\right) (E_j - E_0) / 180 \\ \frac{\partial Y_j}{\partial E_0} &= 0 \\ \frac{\partial Y_j}{\partial N_0} &= -\pi R / 180 \end{aligned} \right\} \quad (A-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N'_{sj}}{\partial E_{01}} &= 0 \\ \frac{\partial N'_{sj}}{\partial N_{01}} &= 1 - \frac{s_j}{m} \\ \frac{\partial N'_{sj}}{\partial E_{02}} &= 0 \\ \frac{\partial N'_{sj}}{\partial N_{02}} &= \frac{s_j}{m} \end{aligned} \right\} \quad (A-7)$$

つぎに、 η_j の偏導関数は次式に示す数値微分により求めることとする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} &= \frac{\Delta \eta_j}{\Delta x_k} \\ &= \frac{\eta_j(x_k + \Delta x_k) - \eta_j(x_k)}{\Delta x_k} \\ &= \frac{1}{\Delta x_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{H_j(x_k + \Delta x_k)}} - \frac{1}{\sqrt{H_j(x_k)}} \right) \end{aligned} \quad (A-4)$$

(2) 線波源の場合

波源から観測点 j への最短伝播時間を与える線波源上の分割点を s_j とする。この分割点の経緯度を E'_{sj}, N'_{sj} とすると、 $t_j(\mathbf{x})$ はそれらの関数として表される。一方、 E'_{sj}, N'_{sj} は未知変数 $E_{01}, N_{01}, E_{02}, N_{02}$ の関数として式(7)で表される。したがって、 $t_j(\mathbf{x})$ の未知変数に関する導関数は次式で得られる。

$$\frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial E'_{sj}} \frac{\partial E'_{sj}}{\partial x_k} + \frac{\partial t_j(\mathbf{x})}{\partial N'_{sj}} \frac{\partial N'_{sj}}{\partial x_k} \quad (A-5)$$

ここに、 $\partial t_j(\mathbf{x}) / \partial E'_{sj}$ 、 $\partial t_j(\mathbf{x}) / \partial N'_{sj}$ は点波源の場合と同様に求めることができる。 $\partial E'_{sj} / \partial x_k$ 、 $\partial N'_{sj} / \partial x_k$ は次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E'_{sj}}{\partial E_{01}} &= 1 - \frac{s_j}{m} \\ \frac{\partial E'_{sj}}{\partial N_{01}} &= 0 \\ \frac{\partial E'_{sj}}{\partial E_{02}} &= \frac{s_j}{m} \\ \frac{\partial E'_{sj}}{\partial N_{02}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A-6)$$

(3) 楕円波源の場合

線波源の場合と同様に、式(A-5)を用いるが、 $\partial t_j(\mathbf{x}) / \partial E'_{sj}$ 、 $\partial t_j(\mathbf{x}) / \partial N'_{sj}$ は次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E'_{sj}}{\partial a} &= \frac{s_j}{m} \cos \theta \\ \frac{\partial E'_{sj}}{\partial b} &= \mp \sqrt{1 - \left(\frac{s_j}{m}\right)^2} \\ \frac{\partial E'_{sj}}{\partial E_{00}} &= 1 \\ \frac{\partial E'_{sj}}{\partial N_{00}} &= 0 \\ \frac{\partial E'_{sj}}{\partial \theta} &= -a \left(\frac{s_j}{m}\right) \sin \theta \mp b \sqrt{1 - \left(\frac{s_j}{m}\right)^2} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (A-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N'_{sj}}{\partial a} &= \frac{s_j}{m} \sin \theta \\ \frac{\partial N'_{sj}}{\partial b} &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{s_j}{m}\right)^2} \\ \frac{\partial N'_{sj}}{\partial E_{00}} &= 0 \\ \frac{\partial N'_{sj}}{\partial N_{00}} &= 1 \\ \frac{\partial N'_{sj}}{\partial \theta} &= a \left(\frac{s_j}{m}\right) \cos \theta \mp b \sqrt{1 - \left(\frac{s_j}{m}\right)^2} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (A-9)$$

(1998 年 4 月 24 日受付)