

マイクロメカニクスによる粒状体の流動則の考察

A Micromechanical Study on the Flow Rule for Granular Materials

武 建勲*・岸野佑次**・浅沼秀雄***

Jianxun WU, Yuji KISHINO and Hideo ASANUMA

*学生会員 工修 東北大学学生 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

***正会員 工修 (株)西松建設 月山ダム出張所 (〒997-0531 山形県東田郡朝日村大字大綱字上倉123)

The authors have performed a set of numerical loading tests in terms of the Granular Element Method. The tests exhibit mechanical behaviors which are common among real behaviors of geological materials. These test results are very suggestive to know the internal mechanism hidden behind the macroscopic behaviors. This paper mainly concerns the plastic behavior whose mechanism has its main origin on the slipping between grains. A theoretical yielding condition, which explains the result obtained by the simulation, is derived from non-slipping condition for stable assemblies of rigid particles. Performing eigen-value analyses of the instantaneous stiffness matrix which is utilized in the Granular Element Method, the authors demonstrate the similarity of displacement fields accompanied by plastic deformations for different loading directions. This similarity explains why the common direction of plastic strain is assumed in the flow rule.

Key words : granular element method, probe test, elastoplasticity, eigen-value analysis

1. まえがき

土や砂のような地盤材料の構成則を合理的に定めるためにはマイクロメカニクスのようなアプローチが必要であると考えられるが、実際の材料においては材料内部の詳細な情報を抽出することが不可能なため、このようなアプローチを実施することは困難なことである。そこで、まず単純化された粒状体モデルによって構成則の定式化を行う方法が考えられる。Newland & Alley¹⁾やRowe²⁾らのモデルは限定された条件下においては有用なモデルとなっているが、より一般的な力学特性を抽出するためには、数値シミュレーションによるモデル実験を行うことが有効であると考えられる。

Bardet³⁾は、Cundall⁴⁾によって提案された個別要素法(DEM)を利用して、各種構成則理論の粒状体への適応性について検討を行った。しかし、このシミュレーションにおいては応力制御が必ずしも十分な精度をもって行われていないため、結果にばらつきが見られた。一方、著者らは粒状要素法を応用して、Bardetと同様の検討を行い、精度良く粒状体の弾塑性挙動が見られることを確認した⁵⁾。シミュレーション解析モデルにおける基本仮定は極く単純なものであるが、単純なモデルから実際の地盤材料の特性に見られるような複雑な力学特性をシミュレートすることが可能となっている。この理由は、離散的シミュレーションにおいては、粒状体の変形のマイクロメカニズムであるすべりや離合が自然な形で考慮され

るために、連続体の場合には容易に導入することのできない特性を備えさせることができるためと考えられる。

本文においては、粒状供試体モデルの弾塑性挙動の中、とくに流動則に着目してマイクロメカニクスの立場から様々な検討を行った。まず、数値試験で得られている塑性変形特性⁶⁾の概要を示し、粒状体の降伏条件に関して、剛性粒子集合体を仮定した場合における理論的条件式について考察した。また、巨視的に観測される流動則のマイクロメカニズムを調べるために、固有値解析⁷⁾を行った。これに基づき、塑性ひずみの発生に伴ない、応力増分方向に依存しない粒子移動固有のパターンが形成されるかどうかを調べた。このような検討は本文のようなアプローチにより初めて可能になることである。

2. 粒状要素法⁸⁾の概要

粒状要素法シミュレーション解析に用いた粒状供試体モデルの概念図を図-1に示す。モデルは円粒子の集合より成り、その周辺粒子を境界粒子、境界粒子以外の粒子を内部粒子と呼ぶ。

境界粒子は集合体の面積の計算や、応力またはひずみを制御するために用いられるものであり、境界粒子同士との力学的な相互作用は無視する。

粒状供試体モデルには対称な変位勾配すなわちひずみを与えることとし、各境界粒子 B を次式のような線形関係に従って移動させる。

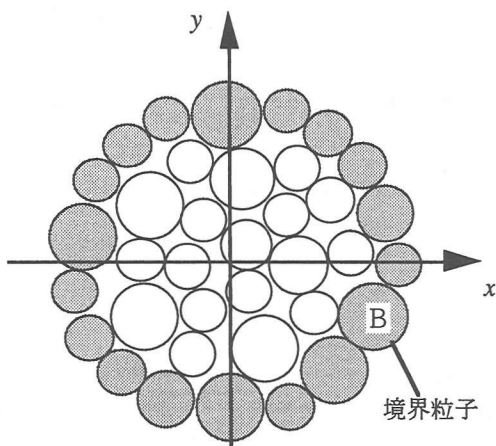


図-1 要素試験概念図

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (1)$$

ここに、

X_0, Y_0 : 境界粒子の中心の変形前の座標

X, Y : 境界粒子の中心の変形後の座標

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$: モデルに与えるひずみ

粒状供試体モデルに作用する応力は各境界粒子に内部粒子から作用する接触力に着目して、次式のように算定することができる^{4,5,8)}。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{A_0} \sum_B \begin{bmatrix} p_x X_0 & p_x Y_0 \\ p_y X_0 & p_y Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (2)$$

ここに、

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$: 粒子集合に作用する応力

p_x, p_y : 境界粒子と内部粒子の間の接触力

A_0 : 境界粒子重心を結んだ多角形に囲まれた面積

$\sum_B$: 全ての境界粒子についての和

粒子は円粒子とし、粒子間の重なりを許すことにより粒子の弾性変形を評価することとする。図-2において、粒子Gとこれに接する別の粒子G'との接触点をCとし、両粒子間相対変位の法線および接線方向成分をそれぞれ u_n, u_t 、G粒子に作用する接触力の法線および接線方向成分をそれぞれ p_n, p_t とおく。これらの量の正の方向は図-2の n, t と逆向きとし、圧縮を正とする。相対変位増分 $\Delta u_n, \Delta u_t$ および接触力増分 $\Delta p_n, \Delta p_t$ の間には次式が成立すると仮定する。

$$\Delta p_n = c_n \Delta u_n \quad (3)$$

$$\Delta p_t = c_t \Delta u_t \quad (4)$$

ここに、 c_n および c_t は接触点における法線および接線方向の線形バネ定数である。また、2粒子間には常に次式が成り立つと仮定する。

$$p_n \geq 0 \quad (5)$$

$$|p_t| \leq p_n \tan \phi \quad (6)$$

ここに、 ϕ は摩擦角である。式(5)、(6)が満たされない場合には接触力をその限界値に強制的に修正し逐次計算を続行する。 p_n の修正には粒子間の乖離、 p_t の修正に

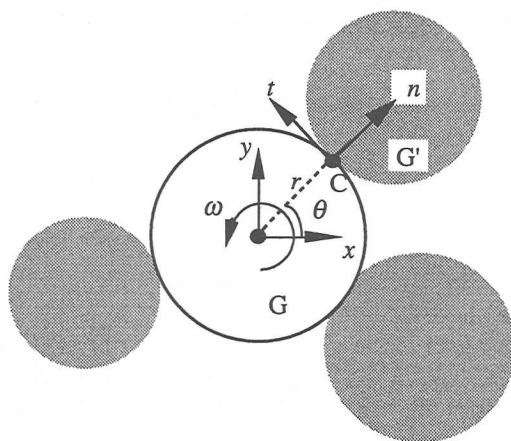


図-2 粒子接触点における局所座標系

は粒子間の滑りが伴うことになる。

いま、図-2のG粒子のみに並行移動増分 $\Delta u_x, \Delta u_y$ と重心まわり回転増分 $\Delta \omega$ からなるベクトル ΔU_G を与え、隣接粒子は全て固定しておくこととする。このとき、G粒子に加えるべき力とモーメントからなるベクトル ΔF_G は次式の要素剛性関係として表わされる。

$$\Delta F_G = S_G \Delta U_G \quad (7)$$

ここに、 S_G は式(3)、(4)の関係に基づいて定めることができ、主要素剛性行列と呼ばれる⁵⁾。

粒状供試体モデル内の全ての粒子の全ての接触点に関する要素剛性関係及び式(1)、(2)を用いて全体剛性方程式が次式のように与えられる。

$$\Delta F = S \Delta U \quad (8)$$

ここに、 ΔF は応力増分ベクトルと内部粒子付加力ベクトル、 ΔU はひずみ増分ベクトルと内部粒子変位増分ベクトルより成り、次式で定義される⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= (\Delta \sigma^t, \Delta F_1^t)^t \\ \Delta U &= (\Delta \varepsilon^t, \Delta U_1^t)^t \\ \Delta \sigma &= (\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy})^t \\ \Delta \varepsilon &= (\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma_{xy})^t \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、添字Iは内部粒子を意味する。

3. 載荷試験とプローブ試験とその考察

著者らは既に粒状供試体モデルの要素試験シミュレーションを行い、プローブ試験シミュレーションなどに基づき粒状体の弾塑性挙動の把握を行った^{5,6)}。ここでは従来の研究結果の中の流動則に関連した部分の概要を示す。

3.1 粒状供試体モデルと載荷経路

粒状供試体モデルを図-3に示す。領域の形状はほぼ円形で、395個の円形粒子がパッキングされている。境界粒子は72個で、粒子の半径は0.5cmから1cmまでの一様分布とした。また、接触点におけるバネ定数はそれぞれ $c_n=1000$ kN/m、 $c_t=700$ kN/m、摩擦角は $\phi=25^\circ$ である。

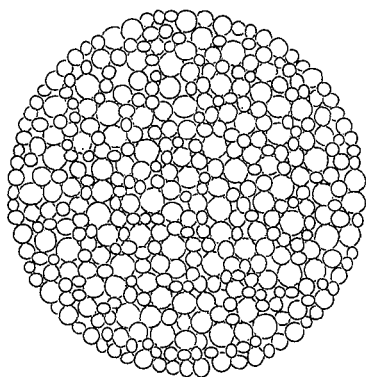


図-3 解析に用いた粒状供試体モデル

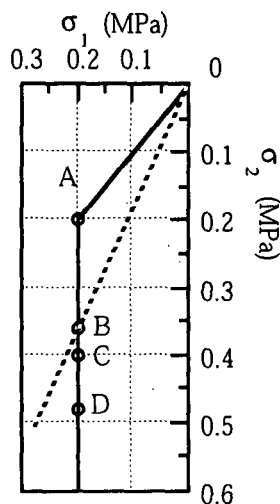


図-4 主応力空間荷経路とプローブ試験点

荷試験は応力制御により行った。図-4に主応力空間上の荷経路と次節に述べるプローブ試験を行った点を示す。原点を右上に置き、同図のA点は原点から0.2 MPaまで等方圧縮して得られた状態で、これをせん断荷試験の初期状態とし、以後 σ_1 を一定とし σ_2 のみを増加させるせん断荷試験を行った。なお、図中の破線は後に述べるBを通る理論的降伏線である。

図-5に応力ひずみ関係と次節に述べるプローブ試験を行った点を示す。縦軸と横軸は、それぞれ、応力比

$$q/p = (\sigma_2 - \sigma_1) / (\sigma_2 + \sigma_1) \quad (10)$$

および最大せん断ひずみ

$$\gamma_{\max} = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} / 4 = 2\sqrt{J_2'} \quad (11)$$

を表す。同図の○印は応力増分 0.004 MPa に対応した点である。B点の後でせん断ひずみが急速に進んでいることがわかる。この段階において粒状体モデル内部の構造が大きく変化したと考えられる。したがって、本文においてはB点の前を主な考察の対象とする。

3.2 プローブ試験

図-4に示すように荷経路上にいくつかの点を選んでプローブ試験^{5,6)}を行う。ここに示すようなプローブ試

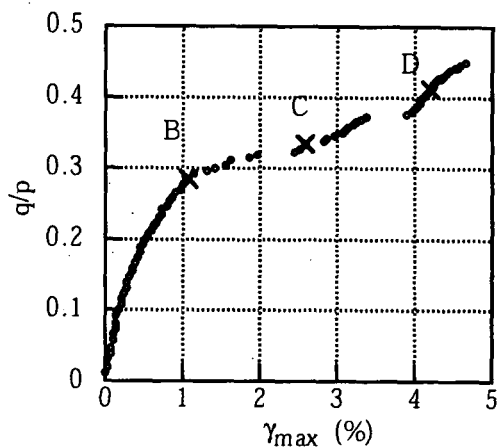


図-5 応力ひずみ関係とプローブ試験点

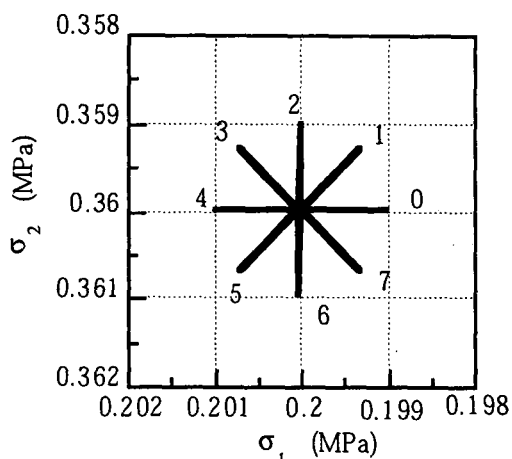
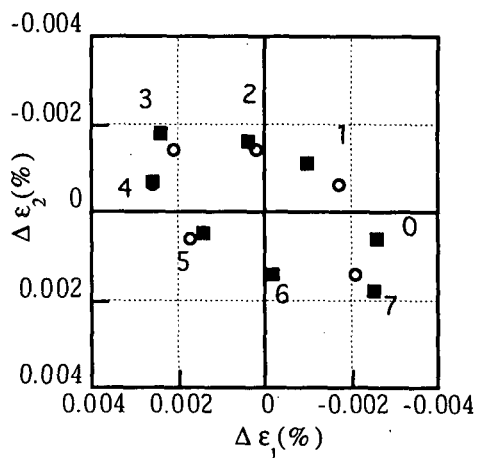


図-6 プローブ試験応力増分 (B点)

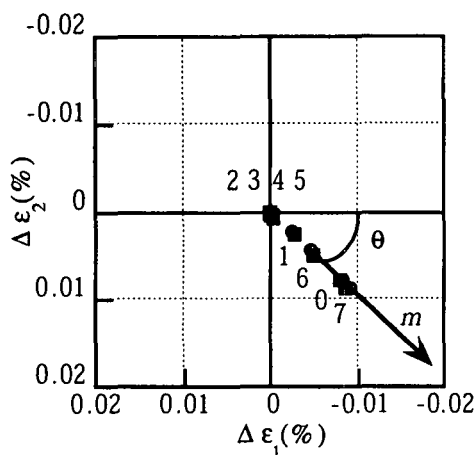


凡例：■---数値試験値，○---理論計算値

図-7 弾性ひずみ増分 (B点)

験は再現性の問題から実際の試験では実施が困難であり、過去の諸データを保存することが可能な数値シミュレーションにおいて初めて実施することができるものである。

プローブ試験は、各試験点から出発して、図-6に示すように45°間隔8方向に絶対値の等しい微小応力増分を与えて荷・除荷試験を行うものである。このような試験により各プローブ方向の全ひずみ増分 $\Delta\epsilon$ を弾性部分



凡例：■---数値試験値，○---理論計算値

図-8 塑性ひずみ増分（B点）

$\Delta\epsilon^e$ と塑性部分 $\Delta\epsilon^p$ に分離することができる。すなわち、
 载荷により $\Delta\epsilon$ が得られ、除荷により $\Delta\epsilon^e$ が残留部分として求まる。したがって、 $\Delta\epsilon^e$ は次式で与えられる。

$$\Delta\epsilon^e = \Delta\epsilon - \Delta\epsilon^p \quad (12)$$

B点における数値試験から得られた弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分の主ひずみ空間上における分布を、それぞれ、図-7, 8に記号■で示す。弾性ひずみ増分はほぼ原点を中心とする楕円上に分布し、塑性ひずみ増分は载荷方向である1, 6, 0, 7については原点を通る直線上に分布し、除荷方向である2, 3, 4, 5は殆ど零である。

3.3 弾塑性コンプライアンス

図-7, 8のようなひずみ増分応答図は応力増分 $\Delta\sigma$ に弾性および塑性コンプライアンスを乗ずることにより求めることができる⁹⁾。まず、弾性ひずみ増分は次式のように表すことができる。

$$\Delta\epsilon^e = C^e : \Delta\sigma \quad (13)$$

ここに、 C^e は弾性コンプライアンスで、载荷方向0, 2, 4, 6に対して得られた弾性ひずみ増分を基に決定される。B点の C^e より求めた理論計算値を記号○で図-7に示した。数値試験値と良く合っていることがわかる。

同様に、塑性ひずみ増分は次式のように表す。

$$\Delta\epsilon^p = C^p : \Delta\sigma \quad (14)$$

ここに、 C^p は塑性コンプライアンスであり、次式で与えられる。

$$C^p = \begin{cases} mn/h & (n : \Delta\sigma > 0) \\ 0 & (n : \Delta\sigma < 0) \end{cases} \quad (15)$$

上式中、 m は塑性ひずみ増分の方をを表す単位のテンソル、 n は降伏曲面の法線方向を表す単位のテンソル、 h は硬化係数である。 n と m が等しければ関連流動則、異なれば非関連流動則となる。ここに

$$n = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta \end{bmatrix} \quad (16)$$

は主応力空間における主応力 σ_1 軸からの右まわりの角度

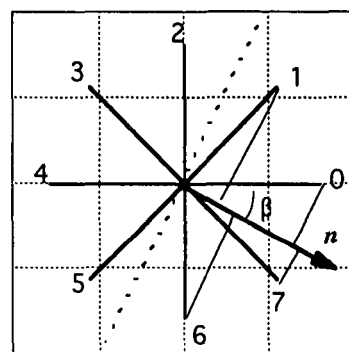


図-9 降伏曲線の法線方向 n の決定

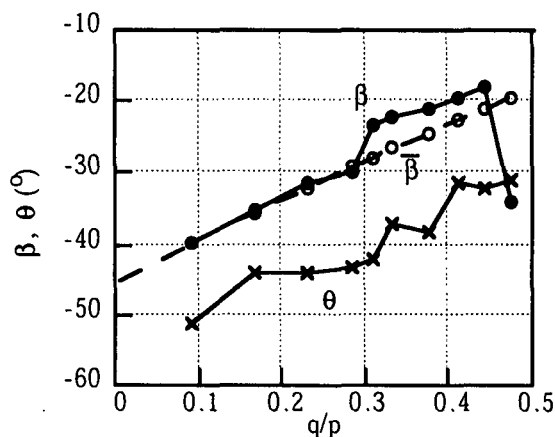


図-10 n の方向角 β および m の方向角 θ の変化

β (図-9 参照) を用いて表すものである。 β は、最小二乗法を用いて流動則に最も適合するように定めれば、次式で与えられる。

$$\tan \beta = -(\sqrt{2}L_6 - L_1 + L_7) / (\sqrt{2}L_0 + L_1 + L_7) \quad (17)$$

ここに L_0, L_1, L_6, L_7 は载荷4方向0, 1, 6, 7における塑性ひずみ増分の大きさである。

同様に m を主ひずみ空間における主ひずみ ϵ_1 軸からの右まわりの角度 θ (図-8 参照) を用いて、

$$m' = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (18)$$

と表すことができる。

B点についてプローブ試験シミュレーションより実際に n および m を求め、 h を最適に定めて塑性コンプライアンスを定め、式(14)より塑性ひずみ増分を計算した結果を理論計算値として図-8に記号○で示した。このようにして求めた計算値は試験値とほぼ一致している。

図-10に各試験点で求めた β と θ の値を示す。この図より β と θ は常に異なり、関連流動則が成立していないことは明らかである。なお、 $\bar{\beta}$ は後に示すように β の理論値を示す。

4. 粒状体降伏面について理論的な考察

砂などの地盤材料を理想化した粒状体においては、粒子の大きさ、粒子の形状、パッキング、接触点の力学特

性が全体的な力学特性を支配する。接触点の力学特性は式(3)～(6)に示される極く単純なものである。このような単純なモデルから、3.に示されているように、実際の地盤材料の特性とも共通する複雑な力学特性をシミュレートすることを可能としている。この理由は、粒状体は離散体であり、この離散性をモデルに取り入れることにより、連続体には容易に導入することのできない特性を備えているためであると考えられる。ここでは、滑りを伴う離散体の降伏について理論的に考察を行う。

まず、よくパッキングされた安定的な3次元任意形状剛体粒子集合体を考える。初期主応力状態 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ より $(\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2, \alpha\sigma_3)$ に比例载荷しても、以下の理由により、粒子間に滑りは生じないと思われる。いま、主応力が $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ である状態を安定状態とすれば、全ての接触点について接触条件(5)と滑りを生じない条件(6)が成立し、かつ各粒子について平衡条件

$$\sum_G f_G = 0 \quad (19)$$

$$\sum_G f_G \times r_G = 0 \quad (20)$$

が成立する。ここに、 $\sum_G$ は各粒子の全接触点についての和、 f_G は接触点Gの接触力ベクトル、 r_G は接触点の位置ベクトルを意味する。

もし全ての接触力 f_G を αf_G 、境界粒子に作用する外力 F_B を αF_B に置き換えたとしても、式(19)、(20)よりこの新しい力の組み合わせについて平衡条件

$$\sum_G \alpha f_G = 0 \quad (21)$$

$$\sum_G \alpha f_G \times r_G = 0 \quad (22)$$

が満たされる。同様に式(5)、(6)に対応する接触条件と滑りを生じない条件

$$\alpha p_n \geq 0 \quad (23)$$

$$|\alpha p_t| \leq \alpha p_n \tan \phi \quad (24)$$

も満たされる。さらに、粒状体に作用する応力は式(2)より

$$\begin{bmatrix} \alpha \sigma_x & \alpha \tau_{yx} \\ \alpha \tau_{xy} & \alpha \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{A_0} \sum_B \begin{bmatrix} \alpha p_x X_0 & \alpha p_x Y_0 \\ \alpha p_y X_0 & \alpha p_y Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (25)$$

と与えることができる。したがって、いま粒状供試体モデルに応力を α をパラメータとして $(\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2, \alpha\sigma_3)$ のように与えた場合比例载荷となり、全ての力学量を α 倍するのみで静的平衡状態を得ることができ、この比例载荷過程においては粒子間に滑りは生じず、粒子の接触関係も変わらない。このようなことは、考えている粒状体モデルが安定的にパッキングされた剛体粒子集合体である限り、粒子形状、大きさ、パッキングに依らず成立すると言うことができる。

粒子間の滑りと接触関係の変化が起こらなければ、散逸エネルギーが生じず、上の比例载荷過程において塑性ひずみは発生しない。降伏曲面を凸曲面であるとするれば、もしある応力状態に対して $\alpha > 0$ と $\alpha < 0$ に対応する反対方向の2種の载荷により塑性ひずみが発生しなければ、応力空間上でその2つの方向を結ぶ直線は降伏曲面における接線方向に一致する。粒子間に(粘着力が零)

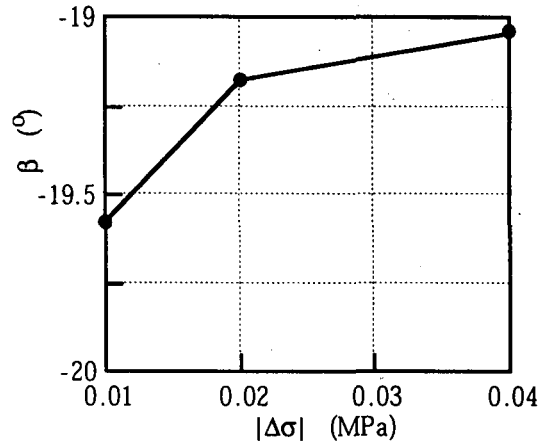


図-11 n の方向角 β の応力増分依存性 (D 点)

Coulomb の摩擦則を仮定した剛体粒子の安定的な集合体において降伏曲面が存在するとすれば、その曲面は主応力空間原点を通る直線群よりなる錐面になる。Drucker-Prager の条件

$$\tau_0/p = k \quad (26)$$

はこのような条件を満たす最も簡単な例である。

ここに、

$$\tau_0 = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / 3 \quad (27)$$

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 \quad (28)$$

k : 定数

対応する2次元の降伏条件は

$$q/p = k \quad (29)$$

ここに

$$p = (\sigma_2 + \sigma_1) / 2 \quad (30)$$

$$q = (\sigma_2 - \sigma_1) / 2 \quad (31)$$

である。

以上の考察は剛体粒子の集合に適用されるものであるが、剛体粒子でなくても粒子の変形が極く微小な場合にも近似的に通用すると考えられる。粒状供試体モデルの変形に寄与する弾性を無視することができれば、種々の力学特性は q/p によって整理することが可能であろう。実際既発表の論文⁵⁾で述べた力学諸量のパラメータ q/p への依存性はここで述べたような理由によるものと考えられる。

5. シミュレーション解析による流動則の考察

シミュレーション解析による流動則についての従来の検討結果の概要を3.に述べたが、まず流動則が適用できる範囲について調べる。プローブ試験は応力の微小増分に対してひずみ増分が線形的に生じるとみなして実施されるが、もし、プローブ载荷の間に粒状供試体モデルの内部で構造変化が生じると、線形性は保たれなくなる。このことを調べる目的でD点について $|\Delta\sigma|$ の大きさを変化させてプローブ試験を行い、式(17)によって n の方

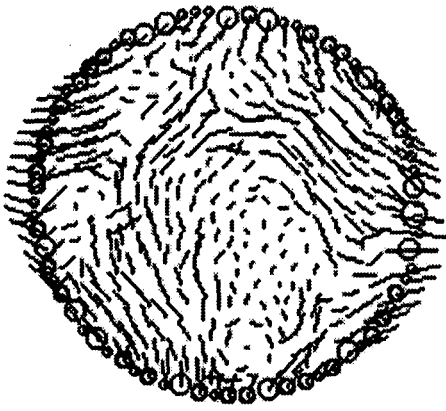


図-12 塑性変位ベクトル (C点0方向, 100倍)

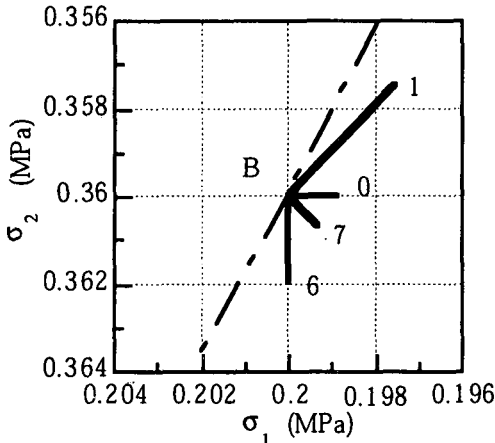


図-13 等投影長プローブ試験応力増分 (B点)

向角 β を算定した結果, 図-11 のような変化を示した. この変化は $|\Delta\sigma|$ に連動して変化するので, 上述の線形性の仮定は満たされないことになる. また, 図-10 に示されているように, 流動方向や降伏面の法線方向が $q/p = 0.3$ 以降, すなわち B 点の後で急激な変化を示している. 同図には降伏条件を原点を通る直線と仮定して描いた方向角を $\bar{\beta}$ として示したが, 初期の β はこの方向に一致しているのに対して, B 点の後で急にこの方向からのズレが生じている. 4. の議論との関連を考察すれば, B 点以前においては, 安定的にパッキングされた剛体粒子の集合体に対する降伏線の仮定に良く適合している. これに対して B 点以降におけるズレは, 変形に伴って安定性が失われ内部構造の変化が生じたことに起因していると考えられる.

C 点 0 方向について $|\Delta\sigma|$ を 0.004 MPa として载荷除荷を行って得られた塑性変形に伴う粒子移動を図-12 に示す. 同図の移動量ベクトルは実際の大きさを 100 倍して描いたものである. この図より粒子移動には大きな不均一性が伴っていることがわかる. とくに, 中央付近において大きく渦を巻くような粒子移動が生じており, この非対称な粒子移動に伴って内部構造が大きく変化すると考えられる.

プローブ载荷試験結果が流動則に適應するかどうかを

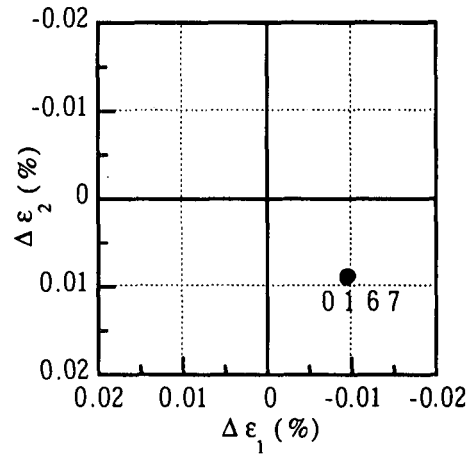


図-14 等投影長プローブ試験塑性ひずみ増分 (B点)

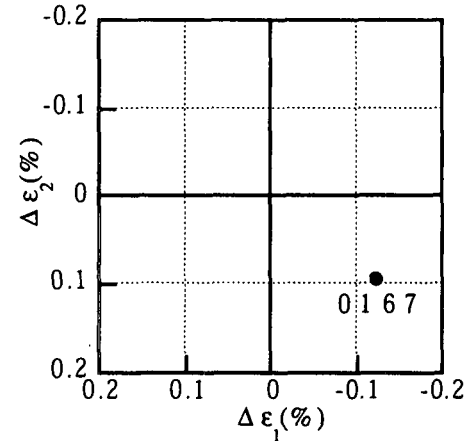


図-15 等投影長プローブ試験塑性ひずみ増分 (C点)

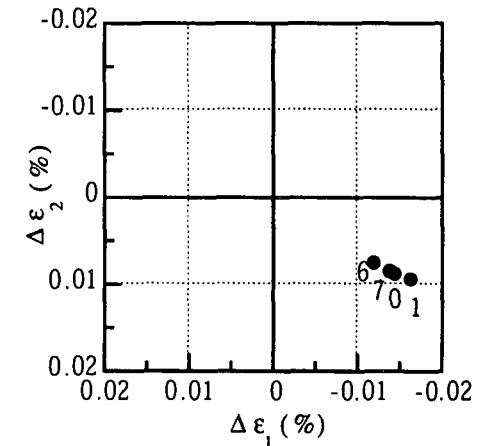


図-16 等投影長プローブ試験塑性ひずみ増分 (D点)

実際に調べる目的で, 図-13 に示すように応力増分の大きさを降伏面の法線方向への投影長さが等しくなるように調整した等投影長プローブ試験を追加的に行った. もし流動則が成立するとすれば, 等投影長プローブ試験により得られる塑性ひずみはプローブ方向に依らずに一定となる筈である. 図-14, 15, 16 に, それぞれ, B, C, D 点についての等投影長プローブ試験により得られた塑性ひずみ増分を示す. これらの図より D 点では流動則が満たされていないことがわかる. C 点については, この図が

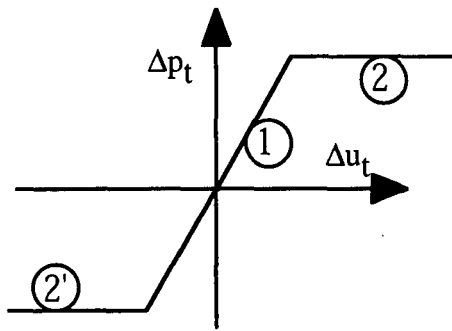


図-17 接触点における接線方向の力学特性

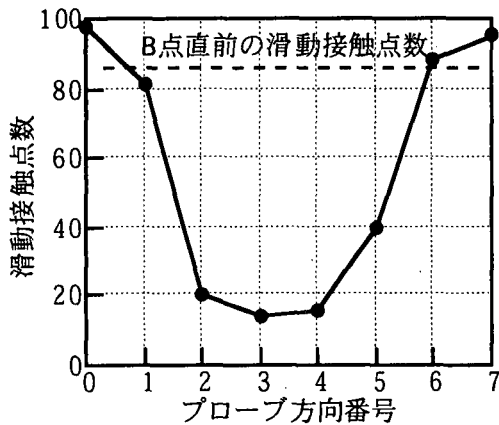


図-18 各プローブ方向の滑動接触点数 (B点)

ら見る限りにおいては流動則が成立しないという理由はない。しかし、上述のようにC点においては内部構造変化が生じていると考えられ、以下の流動則の検討は主としてB点について行うこととする。

次に、除荷方向における塑性ひずみ増分がほとんど零である理由について粒子間に生じる滑りを基に考察する。接触力増分の接線方向成分および粒子間相対変位増分接線方向成分間の関係を模式的に図-17に示す。ある接触点において、ある载荷に伴って滑りが生じないとすると、この接触点における接線方向の力学的状態は図の弾性状態 ① に留まる。もし滑りが生じ始めるか継続して滑り続けた場合には、载荷ステップの後に ② または ②' の状態となる。逆に滑りの状態から除荷状態になった場合には、① のような弾性状態に戻るか、接触力法線方向成分が小さい場合には ②→②' または ②'→② のように飛び移ることもあり得る。

図-18に各プローブ方向の滑動接触点数を示す。载荷方向0, 1, 6, 7の滑動接触点数は80以上で、除荷方向2, 3, 4, 5の滑動接触点数は40以下である。このように、载荷方向と除荷方向では滑動接触点数に極端な差があることがわかる。ただし、除荷方向においても滑りを生じる接触点があるが、このような点は粒状供試体モデル内で局所的に分布し、巨視的なひずみに大きく寄与することはないものと考えられる。図-18にはプローブ試験開始直

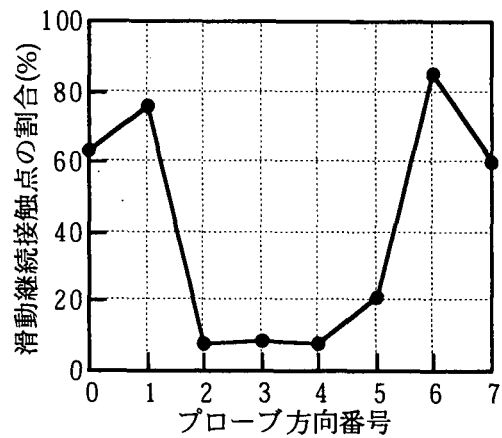


図-19 各プローブ方向の滑動継続接触点の割合 (B点)

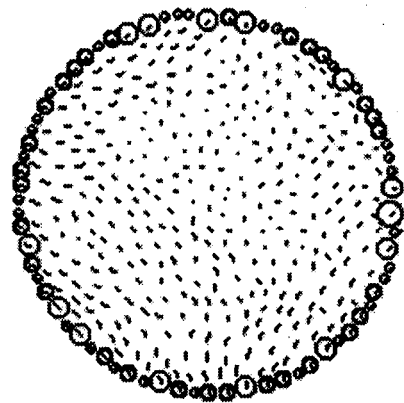


図-20 塑性変位ベクトル (B点0方向, 300倍)

前の主载荷経路(载荷方向はプローブ方向6に一致)における滑動接触点数を破線で示したが、その値はプローブ方向6の滑動接触点数等とほぼ等しい値である。しかし、全ての滑動接触点が継続して滑り続けるとは限らない。図-19には滑動が継続的に生じる接触点の割合を示した。载荷方向の滑動継続接触点の割合は60~80%、除荷方向の滑動継続接触点の割合は20%以下である。除荷方向で継続して滑る接触点においては滑り方向が逆転した場合も観察された。

6. 粒子変位場の固有値解析

以上見てきたように、B点に代表される安定的変形段階においては、図-14の等投影長プローブ試験結果等からもわかるように、塑性論における流動則がほぼ成立すると考えてよいと思われる。流動則によれば応力増分の方に依らず塑性ひずみ増分の方は一定であり、このことは塑性変形に伴う粒子の変位パターンが各载荷段階において一定であることを予想させる。ここで、図-13によって行ったB点における等投影長プローブ試験において残留した塑性変形に対応する各粒子の変位ベクトルを図-20~23に示す。各粒子の塑性変位ベクトルはそれぞれの移動量を300倍して表示した。これらの図を比較す

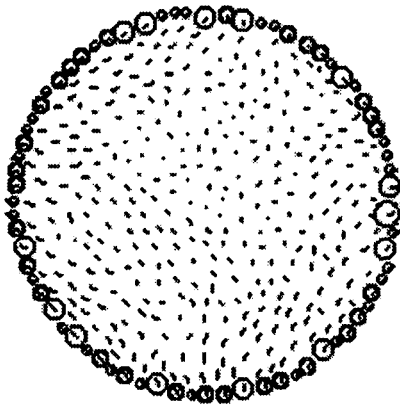


図-21 塑性変位ベクトル (B点1方向, 300倍)

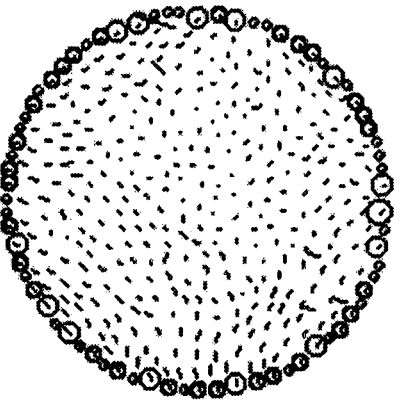


図-22 塑性変位ベクトル (B点6方向, 300倍)

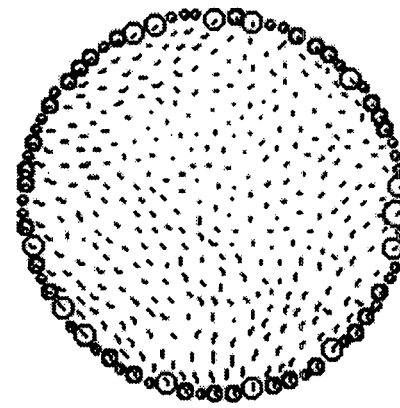


図-23 塑性変位ベクトル (B点7方向, 300倍)

ると、応力増分を与える方向に依らず塑性変位ベクトルは非常に類似したパターンであることがわかる。

ここでは、B点におけるこれらのパターンの類似性をより定量的に把握するために、B点の粒子配列に基づいて求めた接線剛性行列の固有値解析⁷⁾を行い、固有ベクトルに基づく各塑性変位ベクトル場の固有モード展開について比較検討を行った。固有値解析を行うためには粒状供試体モデルの接線剛性行列を必要とするが、2.に示した粒状要素法解析アルゴリズムは固有値解析に馴染み易いと言うことができよう。ただし、本文において要素試験に用いた全体剛性方程式 (8) における接線剛性行列

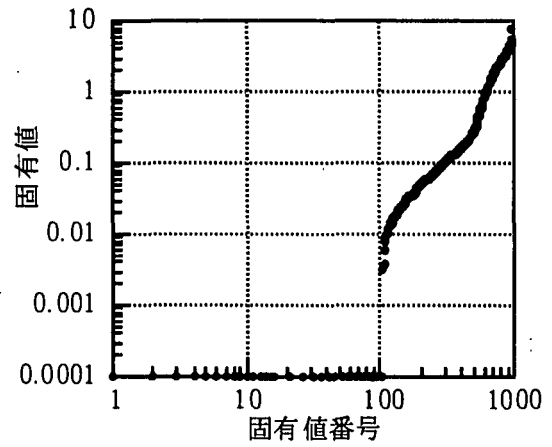


図-24 固有値の分布 (B点)

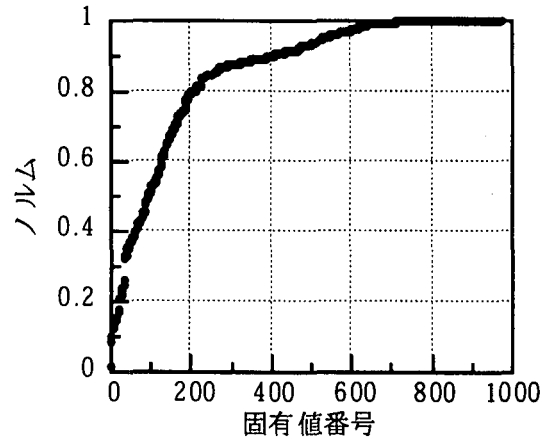


図-25 固有モード展開のノルム (B点0方向)

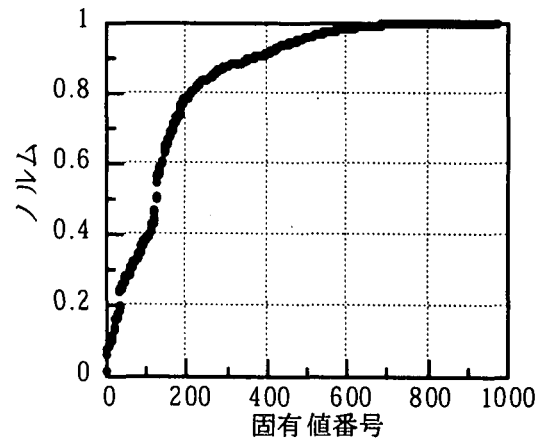


図-26 固有モード展開のノルム (B点1方向)

は簡易的に式 (7) の 3×3 の小剛性行列のみを対角線に沿って配置したものであり、固有値解析のための接線剛性行列を得るためにはさらに非対角部分にも小行列を配置する必要がある⁹⁾。なお、固有値解析の対象とする接線剛性行列はあくまでもB点における粒子配列により定まる剛性行列であり、一連の逐次解析を行うための初期の剛性行列である。したがって、この剛性行列により定まる変位は引っ張り接触力なしの条件や Mohr-Coulomb の条件を一般には満たさない。

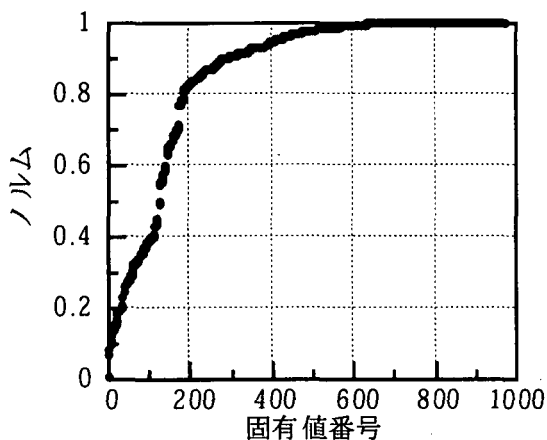


図-27 固有モード展開のノルム (B点6方向)

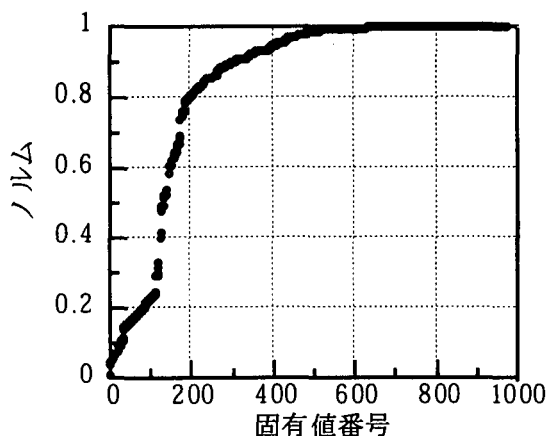


図-28 固有モード展開のノルム (B点7方向)

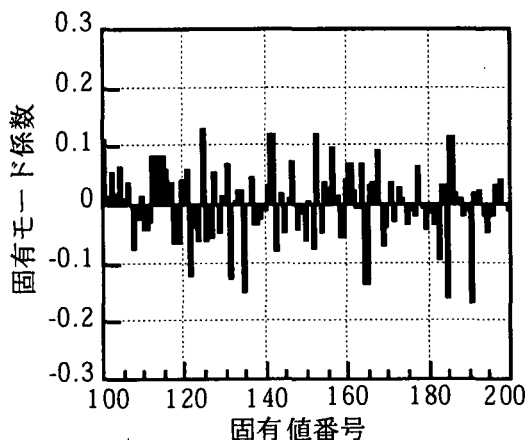


図-29 固有モード係数 (B点0方向)

いま、このような接線剛性行列を S' (階数 N) とし、 S' に対する固有方程式

$$IS' - \lambda I = 0 \quad (32)$$

(I は単位行列) より得られる固有値および固有ベクトルを λ_n, U_n ($n=1, 2, \dots, N$) とする。固有ベクトルの大きさは任意であるので、ここでは次式のように正規化しておくこととする。

$$U_n^T U_m = \delta_{nm} \quad (n, m=1, 2, \dots, N) \quad (33)$$

ここに、 δ_{nm} はクロネッカーのデルタである。固有ベク

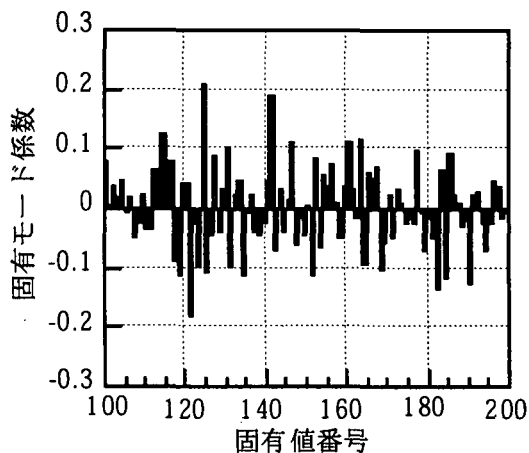


図-30 固有モード係数 (B点1方向)

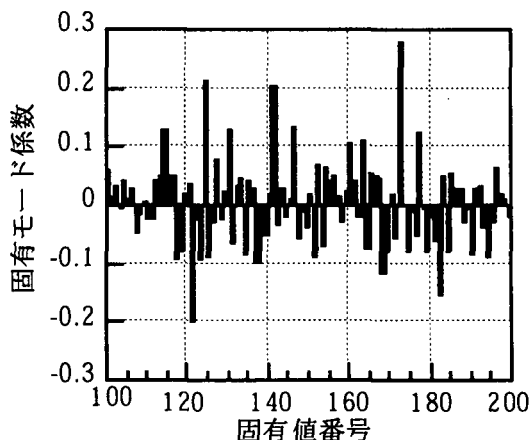


図-31 固有モード係数 (B点6方向)

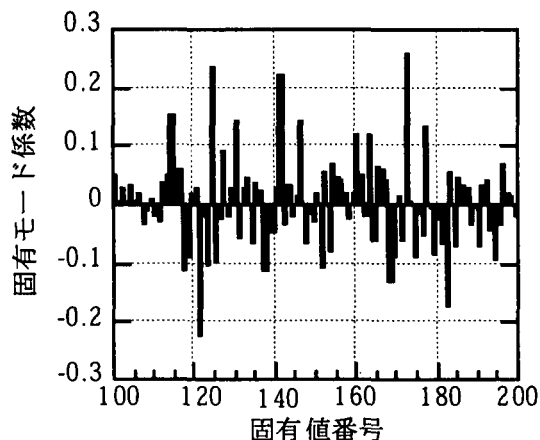


図-32 固有モード係数 (B点7方向)

トル U_n ($n=1, 2, \dots, N$) の直交性により、これらの接線剛性行列の固有ベクトルを用いて、载荷試験より求めた粒子変位ベクトル U について次式のような固有モード展開を行うことができる。

$$U = \sum_{n=1}^N \alpha_n U_n \quad (34)$$

ここに、 α_n は固有モード係数と称され、

$$\alpha_n = U_n^T U \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (35)$$

により計算することができる。 S' の固有値解析の n 番

目 U_n とそれに対応する力のベクトル F_n の間の関係

$$F_n = \lambda_n U_n \quad (36)$$

を考慮すれば、同程度の F_n に対して λ_n が小さければ U_n は大きいことが期待される。すなわち、 U に対する寄与はより小さな固有値の固有モードが大きくなる傾向があると考えられる。以下固有値と固有ベクトルに付する番号は固有値の小さい方から順番に並べておくこととする。また、固有モード展開を行うベクトル U はあらかじめ

$$U^T U = 1 \quad (37)$$

となるように正規化しておくこととする。

ここで、式 (34) の右辺の m 項までの和で表される近似的な固有モード展開を考えその近似度をノルム

$$A_m = \sqrt{\sum_{n=1}^m \alpha_n^2} \quad (m \leq N) \quad (38)$$

で表すこととする。 $m = N$ の場合、次式が成立する。

$$A_N = 1 \quad (39)$$

実際に解析を行った B 点における接線剛性行列の階数は $N = 997$ である。図-24 に接線剛性行列の固有値の分布を小さなものから順に並べて示す。同図よりわかるように、固有値番号 105 までの固有値は極端に小さく、同図には全て 10^{-4} の位置にプロットされている。

B 点における载荷プローブ方向 0, 1, 6, 7 の塑性変形に伴う粒子変位ベクトルを式 (37) を満たすように正規化して接線剛性行列の固有ベクトルに基づく固有モード展開を行った。図-25~28 は、それぞれ、B 点 0, 1, 6, 7 方向の固有モード展開について式 (38) に従って求めたノルムの m による変化を示したものである。これらの図より、各プローブ方向とも固有値番号 200 までの固有モード展開近似の近似度は約 80 %、固有値番号 300 までの固有モード展開近似の近似度は約 90 % となっている。このようにどのプローブ方向とも同様のノルムの変化を示すことは塑性変形に伴う粒子の変位ベクトルの場が類似のものであることを示している。

図-5 からわかるように、B 点は安定的な変形段階にあり、固有値番号 105 以下の固有値に対応する固有モードは、粒状供試体モデル中の単独または少数グループの局所的な不安定粒子の存在に起因したものであるとみなされる。実際、22 個の粒子については接触点数が 0 または 1 であることが確認されているが、少なくともこれらの粒子数の 3 倍の 66 自由度については全体的な変形特性には関与しないと考えることができる。各プローブ方向の固有モード展開における主要部分について式 (35) で与えられる固有モード係数の値 α_n ($n = 100 \sim 200$) を示すと、図-29~32 のようになる。これらの図より、固有モード係数の大きさに若干の差は見られるが、ほぼ同一の固有モード係数の分布とみなしてよいであろう。すなわち、固有モード展開により、応力増分の与え方に依存しない粒子移動パターンが存在することを確認することができた。このことは、金属塑性論においては結晶構造

に依存する滑りモードが流動則で表される塑性変形のマイクロメカニズムであるという説明に対応したものであると考えられる。ただし、粒子移動パターンについて、安定的载荷段階においては零固有値に対応する単一のモードで変形が進行することにはならず、ここに示したような固有モードの複合によりはじめて変形モードを表現することが可能となると結論づけられよう。

7. おわりに

本文においては粒状供試体モデルの粒状要素法解析結果に基づき、粒状体の弾塑性挙動のマイクロメカニクスの考察を行った。まず剛体粒子集合体に対して滑りを生じない条件として降伏条件を誘導した結果、原点を通る直線群から成る錐面が降伏面として得られ、安定的段階にある粒状供試体モデルのシミュレーション結果に一致することを示した。また、塑性変形に伴う粒子の変位ベクトル場が応力空間における応力増分方向に依存しないことを剛性行列の固有モード展開により確め、この応力増分方向に依存しないパターンの存在が巨視的な流動則が成立するメカニズムになっていることを示した。

本文のシミュレーション解析における粒子数は必ずしも多くはなかったが、少なくとも粒状体の安定的硬化状態における基本的マイクロメカニズムは明らかにすることができたと考えられる。

参考文献

- 1) Newland, P.L. and Alley, B.H.: Volume Changes in Drained Triaxial Tests on Granular Materials, *Géotechnique*, 7, pp. 17~34, 1957.
- 2) Rowe, P.W.: The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, *Proc. R. Soc. Lond.*, A-269, pp.500~527, 1961.
- 3) Bardet, J.P.: Numerical simulation of the incremental responses of idealized granular materials, *Int. J. Plasticity*, 10, pp.879-908, 1994.
- 4) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, 29, pp.47~65, 1979.
- 5) 武建勲, 岸野佑次, 京谷孝史: 改良粒状要素法による粒状体の弾塑性挙動的研究, *構造工学論文集*, 43A, pp.403~412, 1997.
- 6) 武建勲, 岸野佑次, 京谷孝史: 2次元モデルプローブ試験による弾塑性挙動の考察, *構造工学論文集*, 44A, pp.399~408, 1998.
- 7) 岸野佑次: 粒状体の固有変形解析, *土木学会論文集*, 481, pp.87-95, 1993.
- 8) 岸野佑次: 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, *土木学会論文集*, 406, pp.97~106, 1989.
- 9) 岸野佑次, 森谷直樹: 粒状体の応力ひずみ関係における増分非線形性の微視力学的解析, *構造工学論文集*, 42A, pp.307-316, 1996.

(1998年4月24日受付)