

微視力学に基づく粒状体の構成則の定式化

Micromechanically Derived Constitutive Law for Granular Materials

金子賢治*, 岸野佑次**, 京谷孝史***

Kenji KANEKO, Yuji KISHINO and Takashi KYOYA

*学生員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**正会員 工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

***正会員 工博 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

The authors have proposed a general constitutive theory based on dissipative function, to describe inelastic behavior of heterogeneous materials. In this paper, the authors formulated a constitutive law for granular materials using basic idea developed in the general theory. The dissipative function used in this paper is determined by formulating the frictional mechanism as well as the trapping of elastic energy in the shearing process of a 3-dimensional granular model with regularly packed spheres. The stress-strain relationship determined by the constitutive theory is compared with the result of GEM simulation test, which verifies the usefulness of our theory. It is proved in this paper that it is possible to deduce dissipative function from micromechanical point of view for the simple model.

Key Words : constitutive law, granular materials, micromechanics, dissipative function

1. はじめに

砂のような粒子集合体である粒状体は離散的な材料であり、その非均質性とも関連して複雑な力学特性を示す。粒状体においては個々の粒子間のすべりや接触点の生成消滅などの微視的な現象が巨視的な現象を複雑に支配している。粒状体の連続体モデルを構築する場合、このような材料内部の微視的変形機構を十分に把握し、これを構成則に反映させることが重要であると考えられる。

従来より粒状体内部の微視的変形機構を解明する手段として種々の粒状体モデルが用いられている。実際の実験のみによりこのような研究を推進することは不可能であり、計算機による数値シミュレーションが一つの有効な手段である。数値シミュレーションによる離散的な粒状体の解析手法として、個別要素法¹⁾や粒状要素法^{2),3)}が挙げられる。個別要素法は粒子間の相互作用が各粒子に対する外力としてのみ評価される動的な近似解法であり、粒状要素法は粒子の接触状態により定まる剛性行列を考慮した準静的な解析手法である。粒状体の準静的な微視的変形機構やエネルギー散逸のメカニズムを把握するためには、内部粒子が常に釣り合い条件を満たしている粒状要素法が適していると考えられる。粒状要素法により粒状体内部の微視的な変形機構に関する研究が進められている。武らは粒状要素法を用いたプローブ試験により流動則等の粒状体の弾塑性挙動に関する考察を行っている^{4),5)}。また、土倉らは球要

素を用いて粒状要素法を3次元に拡張している⁶⁾。

一方、連続体力学モデルとしての粒状体の構成則に関しても種々の研究がなされている^{7)~11)}。これらは、その散逸機構を意識してはいるが、体積変化がない^{7),9),11)}、2次元である^{7),10)}、等方性を仮定している^{8),10)}、等の制約がある。したがって、これらの理論は金属材料に対する塑性論のような一般理論とはいえないと思われる。

また、材料内部のエネルギー散逸を散逸関数として反映させ、構成則理論を組み立てようとする試みがいくつかなされている^{12)~15)}。塑性論における塑性ポテンシャルが単に数学的な意味しかないのに対し、散逸関数は材料の微視的な散逸機構を表現するという物理的な意味を有する。散逸を伴う変形が弾性部分と散逸部分に分けられるとすれば、ひずみに対してなされる仕事のうち弾性部分は材料内部に蓄えられ、散逸部分は材料内部で散逸されるとして構成則を定式化することは合理的な考え方であろう。

岸野らは、このような背景に基づき、散逸関数に着目した構成則理論の定式化を行い、粒状体等への応用例を示している^{16),17),18)}。しかし、その関数形や定数等は、微視的変形機構に基づいて定められたものではない。本論文では、散逸関数に基づく構成則理論の応用として、土倉らの研究⁶⁾を参考に粒状要素法に基づいた3次元規則配列モデルの微視力学的考察により、具体的にそのエネルギー散逸機構や内部構造の変化を反映した散逸関数を決定し3次元粒状体の構成則を定式化する。

2. 散逸関数に基づく構成則理論

散逸関数に着目した構成則理論^{(6),(17),(18)}の特徴としては、下記の事項を挙げることができる。

- ①散逸エネルギーに着目することにより、離散性を含む微視的力学場と連続体的な巨視的力学場を関連づけることが可能である。
- ②地盤材料におけるダイレタンスーのように材料内部の幾何学的拘束条件に対して、微視的構造変化を反映することが可能である。

本論文は、粒状体内部における非可逆性エネルギーを散逸関数に適切に反映させ、粒状体の構成則の定式化を行う。本章においては、この構成則理論の具体的な応用を行うに当たり部分的に改良を加えた構成則理論の提示を行う。流動則は一般論^{(6),(17),(18)}においては極値問題の解として誘導されるが、本論文においては規則配列の粒状体に应用するため理論的誘導を必要としない。したがって、ここでは流動則の誘導に関する部分の理論展開は省略する。

金属塑性論においては非可逆変形の生じる条件として降伏関数を用いて降伏条件を定義しているが、

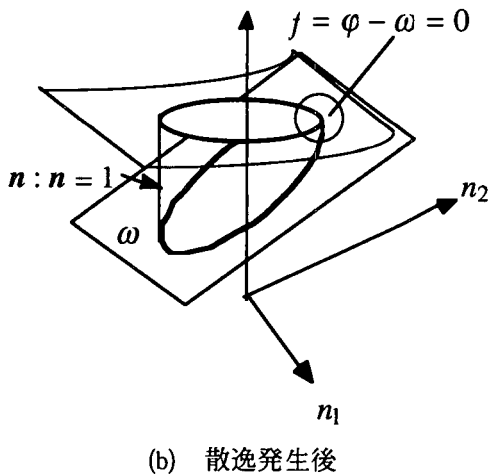
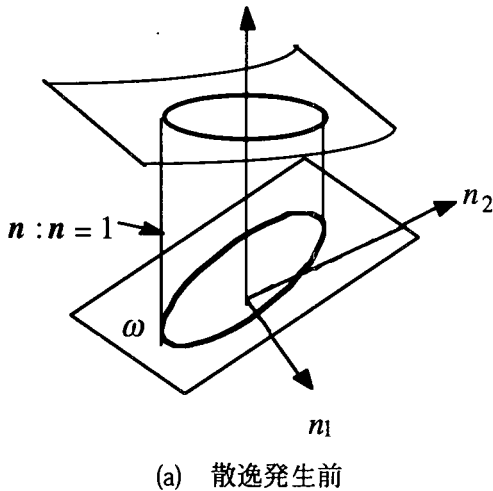


図-1 散逸関数の概念

本論文においては、応力レベルが所定のエネルギー散逸を生じるレベルに達し、非可逆変形が生じる条件を散逸条件と称する。また、変形の非可逆部分を散逸変形または散逸ひずみと呼ぶこととする。なお、散逸条件に用いられる散逸関数は破壊力学におけるエネルギー開放率に相当するものである。

2.1 ひずみ速度の分解

塑性論と同様に、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ と散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ とに分解する。以下、構成則を速度型で定式化するが、特に時間微分としての実質的な意味はない。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} + \dot{d} \quad (1)$$

さらに、散逸ひずみ速度については、その方向と大きさに分解できるものとして次式のように書くこととする。

$$\dot{d} = n \dot{\alpha} \quad (2)$$

ここに、 n は散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ の方向を表す単位のテンソルとし、次式を満足する。

$$n:n=1 \quad (3)$$

また、 $\dot{\alpha}$ は散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ の大きさを表す量で、 $\dot{\alpha}$ の時間積分 α は散逸変形の進行を表すパラメータとして用いられる。ここでは、散逸変形パラメータは簡単のため1つであるとするが、散逸変形モードに対応して複数存在することも考えられる。変形モードが複数存在する場合においては、このパラメータが独立であるとし、各パラメータ毎に分けて定式化すればよい。

2.2 散逸条件

材料の変形に伴って内部応力のする仕事のうち、非可逆変形に対応する部分を散逸仕事と称する。散逸仕事速度は次式のように与えられる。

$$\sigma:\dot{d} = \omega \dot{\alpha} \quad (5)$$

$$\omega \equiv \sigma:n \quad (6)$$

ここに、 ω は単位の散逸ひずみ速度あたりの散逸仕事を表す。 ω は n の値によっては負になりうるが非可逆変形に対応する実際の n に対しては正となる。

材料内部の要素に加わる応力のする仕事が可逆部分と非可逆部分に分解できるとすれば、弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ に対応する部分は弾性ひずみエネルギーとして材料内部に蓄えられる。一方、散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ に対応する部分については、材料固有の散逸機構に従って材料内部でエネルギーが散逸されると考える。このような散逸エネルギーを生じさせるためには、ある一定のエネルギーを与える必要があるが、ここで単位の散逸ひずみを生じさせるのに必要な単位体積あたりのエネルギーを散逸関数と称し、次式のように表す。

$$\varphi \equiv \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) \geq 0 \quad (\text{for } \boldsymbol{n} : \boldsymbol{n} = 1) \quad (7)$$

一般論⁽⁸⁾においては散逸関数は応力と散逸ひずみの関数として定義しているが、ここでは散逸関数を応力とひずみの関数であるとした。これは、後述する規則配列の粒子シミュレーションに基づいて定めた散逸関数が応力とひずみの関数となるためであり、陽にはひずみを変数として入っているが、ひずみがさらに応力と散逸ひずみの関数であるとするれば一般論と同様の定式化は可能となる。また、本文の散逸関数の定義は、Zieglerらによる散逸関数の定義⁽¹²⁾と同様、散逸ひずみ速度の大きさを正規化した量である。散逸関数は、熱力学法則により常に正値でなければならない。材料内部で散逸が生じるためには、付帯条件 $\boldsymbol{n} : \boldsymbol{n} = 1$ のもとで、散逸仕事 ω と散逸関数 φ が共通点を持つ必要がある。すなわち、散逸条件は次式のエネルギーに関する平衡条件を意味する。

$$f \equiv \varphi - \omega = 0 \quad (\text{for } \boldsymbol{n} : \boldsymbol{n} = 1) \quad (8)$$

以上の散逸仕事と散逸関数の概念を散逸ひずみ速度空間に表すと、図-1のようになる。図-1においては、散逸仕事面は散逸仕事を表し、散逸曲面は散逸関数を表している。図-1(a)は載荷の初期段階を表したものであり、 $\boldsymbol{n} : \boldsymbol{n} = 1$ となる全ての $\boldsymbol{n}$ に対して $f > 0$ であり散逸条件を満たしていない。この場合変形は可逆変形のみとなる。この後載荷が進み初めて散逸変形がおこるときには、 $f = 0$ となり、図-1(b)で示されるように ω と φ は $\boldsymbol{n} : \boldsymbol{n} = 1$ 上で接することとなる。これ以降の散逸変形は、この状態を保ったまま推移する。また、実際に散逸ひずみ速度が生じる方向以外においては $f > 0$ となるので、 ω と φ が接する条件は f が極小として満たされる。

2.3 硬化則

散逸が連続して生じるためには、散逸条件を満たし続ける必要がある。このことは、塑性論における適応の条件と同様である。すなわち式(8)の時間微分をとることにより、次式が成立する。

$$\dot{f} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{n} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (15)$$

ここで、ひずみの時間微分は、弾性コンプライアンスを $\boldsymbol{F}^e$ として、

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{F}^e \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{n} \dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

と書くことが可能である。したがって、式(15)は次式のように書き直すことができる。

$$\dot{f} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\boldsymbol{F}^e \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{n} \dot{\boldsymbol{\alpha}}) - \boldsymbol{n} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (16)$$

したがって、次の硬化則を得る。

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{m}{D} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (17)$$

$$D \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{n}$$

$$m \equiv \boldsymbol{n} - \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{F}^e$$

以上より散逸部分の構成則は、以下のような非関連流動則型の構成則となる。

$$\dot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{n} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{n} m : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{D} \quad (22)$$

本理論においては、散逸関数 φ を決定すれば構成則が求まることとなる。散逸関数をどのように定めればよいかがということが問題となるが、これらの関数に微視的変形機構を反映させることにより、より合理的な構成則が得られると考えられる。本論文では本構成則理論を応用し、粒状要素法に基づいたシミュレーション載荷試験により具体的に定めた散逸関数に基づいて粒状体の構成則を定式化する。

3. 3次元6粒子モデルの微視的変形機構と構成則

前章では、散逸関数を用いた構成則理論について述べたが、離散的かつ不均質な粒状体の微視的変形機構をどのように反映させるかということが問題となる。そこで本章では、3次元粒状要素法⁽⁹⁾に基づき、3次元粒状体の規則配列である6粒子モデルの完全変位制御シミュレーション載荷試験によりその微視的変形機構を考察し、それを反映させた構成則の定式化について検討する。

まず、散逸関数に微視的変形機構を陽な形で反映させるために、手計算可能な簡単な制御方法である完全変位制御3軸圧縮シミュレーション載荷試験を行い、これに基づいて構成則を誘導する。また、このような簡単な制御方法により導出された構成則が、ダイレイタンスを生じるような一般の制御方

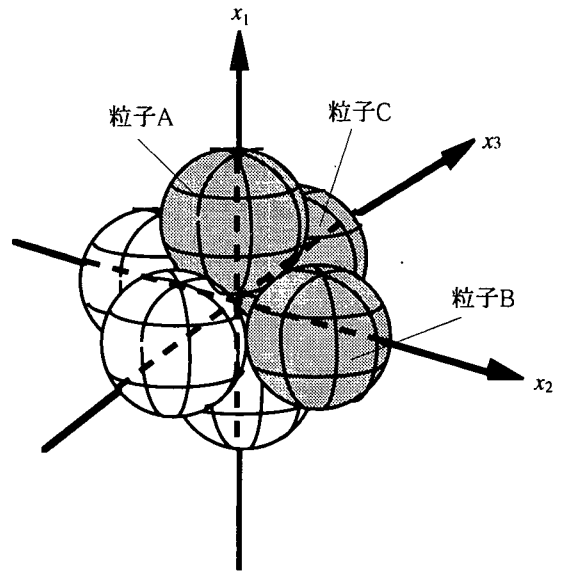


図-2 3次元6粒子モデル図

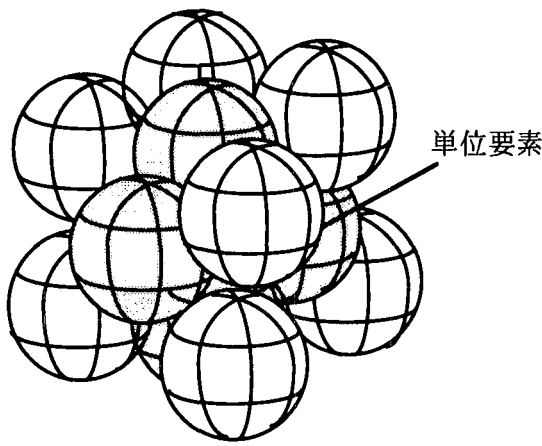


図-3 等粒径球要素と単位要素

法に対しても適用可能であるかどうかを検証するために、応力制御による3軸圧縮シミュレーション載荷試験を行い、その結果と導出された構成則の計算結果とを比較する。

3.1 3次元6粒子モデルのシミュレーション載荷試験

半径 R の6個の球要素が図-2のように面心立方構造になっているときの3軸圧縮シミュレーション載荷試験を行う。本解析モデルは、図-3のように無限に続く密詰め配列から6粒子を規則配列として取り出したものである。粒子間接触点には法線方向および接線方向にバネ定数 c_n 、 c_t の線形バネを仮定し、接触力増分 dp_n 、 dp_t と相対変位増分 du_n 、 du_t の間に以下の関係を仮定する。

$$dp_n = c_n du_n \quad (23)$$

$$dp_t = c_t du_t \quad (24)$$

また、接線方向にはクーロンの摩擦則を仮定し、平衡状態を求めた結果 $p_t \geq p_n \tan \phi$ となった場合には強制的に $p_t = p_n \tan \phi$ となるように補正を行う。また、本解析モデルの幾何学的な等方性により、独立な移動を定めるためには3種類の粒子を考えればよいこととなり、図-2における粒子A, B, Cに着目することとする。座標系の原点から各粒子の中心までの距離を r_A 、 r_B 、 r_C とするが、3軸圧縮試験の場合に限り $r_B = r_C$ となる。また、 x_1-x_2 平面および x_1-x_3 平面において図-4(a), (b) のように角度 θ をとる。図-4(c) のように x_2-x_3 平面においては、 x_2 、 x_3 軸上の各粒子の中心を結んだ四角形が、3軸圧縮の場合常に正方形となる。図-4には、3平面内の各接触点と粒子記号を示している。各接触点は接触点を挟む2つの粒子でAB, AC, BCのように表すこととする。全ての接触点のタイプはこの3種に類別され、各々4接触点が存在する。

完全変位制御により、粒子A, B, Cにそれぞれ変

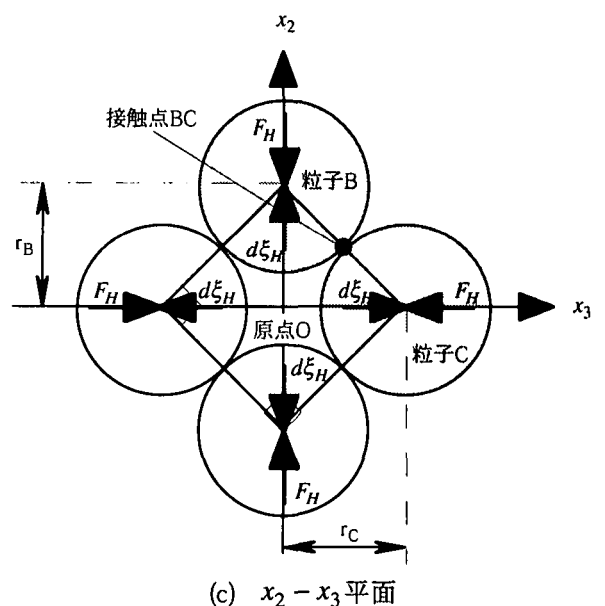
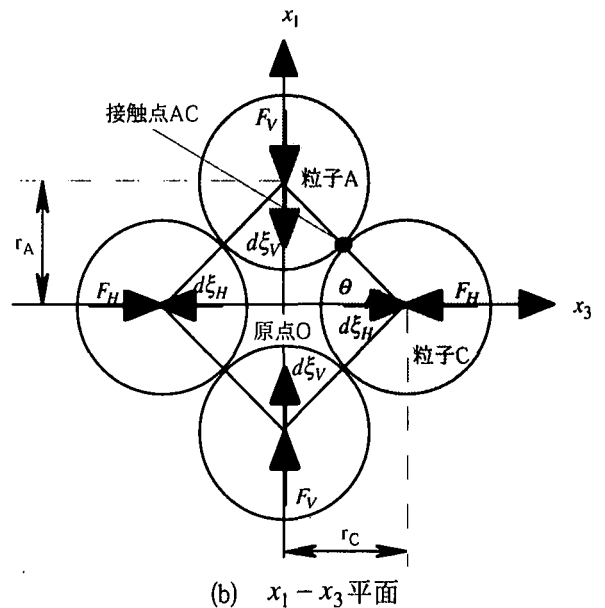
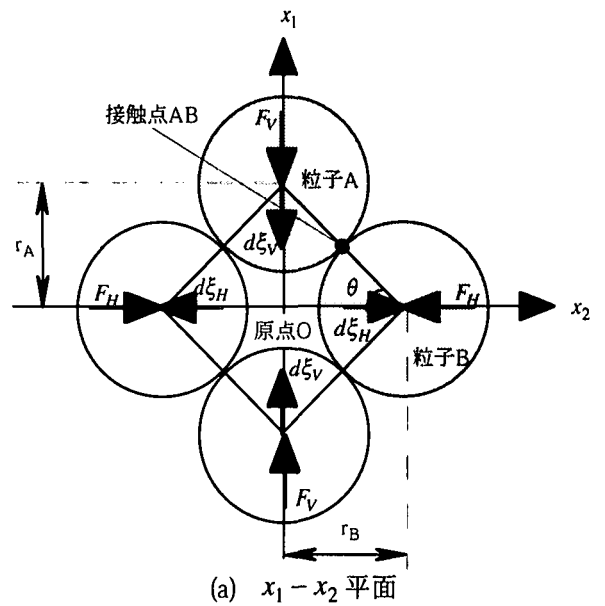


図-4 各平面における各値の設定

位増分 dU^A , dU^B , dU^C を与え、これに釣り合う外力 F_V , F_H を求める。粒子B, Cに作用する外力は3軸圧縮の場合には常に等しくなるため、ともに F_H とした。外力は粒子の中心に作用するものとし、各変位増分は粒子A, B, Cがそれぞれ軸 x_1 , x_2 , x_3 上を移動するように以下のように与えることとする。

$$dU^A = \begin{Bmatrix} -d\xi_V \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad dU^B = \begin{Bmatrix} 0 \\ d\xi_H \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad dU^C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\xi_H \end{Bmatrix}$$

このため、 x_1 - x_2 平面、 x_1 - x_3 平面、 x_2 - x_3 平面の3平面内の粒子の運動のみを考えればよいこととなり、すべての接触点は3平面内のいずれかに位置している。

(1) 初期状態の設定

すべての接触点において法線方向に u_n^0 だけ重なっている状態を初期状態とすれば、初期状態のすべての接触点における接触力は、

$$p_n^0 = c_n u_n^0 \quad (25)$$

$$p_t^0 = 0 \quad (26)$$

となる。また、 $\theta^0 = 45^\circ$ であることを考慮し、初期状態の外力をそれぞれ F_V^0 , F_H^0 とすれば、

$$F_V^0 = F_H^0 = 2\sqrt{2}c_n u_n^0 \quad (27)$$

となり、原点から各粒子の中心までの距離は初期状態においては全て等しく、

$$r^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(2R - u_n^0) \quad (28)$$

となる。また、本解析モデルの単位領域を各球要素の中心を結ぶ8面体で定義すれば、単位領域の初期状態の体積は次式で表される。

$$V^0 = \frac{4}{3}r^{0^3} \quad (29)$$

(2) 3軸圧縮シミュレーション・載荷試験

完全変位制御により、粒子A, B, Cにそれぞれ変位増分 dU^A , dU^B , dU^C を与える。このときの各接触点における法線方向および接線方向の相対変位増分は、以下のように書くことができる。

$$du_n^{AB} = du_n^{AC} = d\xi_V \sin \theta - d\xi_H \cos \theta \quad (30)$$

$$du_t^{AB} = du_t^{AC} = d\xi_V \cos \theta + d\xi_H \sin \theta \quad (31)$$

$$du_n^{BC} = -\sqrt{2}d\xi_H \quad (32)$$

$$du_t^{BC} = 0 \quad (33)$$

ここで、 $\sin \theta$, $\cos \theta$ は原点と各粒子の中心との距離 r_A , r_B を用いて以下のように表される。

$$\cos \theta = \frac{r_B}{\sqrt{r_A^2 + r_B^2}} \quad (34)$$

$$\sin \theta = \frac{r_A}{\sqrt{r_A^2 + r_B^2}} \quad (35)$$

また、 r_A , r_B , r_C は、 r^0 と $d\xi_V$, $d\xi_H$ により次式

で与えられる。

$$r_A = r^0 - \sum d\xi_V \quad (36)$$

$$r_B = r_C = r^0 + \sum d\xi_H \quad (37)$$

各接触点における接触力増分は、それぞれの相対変位増分を用いて式(25), (26)より計算され、各接触力は接触力増分を載荷ステップごとに加えることにより算出される。接線方向に関しては、すべりの条件としてクーロンの摩擦則を仮定しているため、この条件を越える場合には強制的に $p_t = p_n \tan \phi$ となるように補正する。また、各接触点における接触力を以下のように表記することとするが、接触点BCにおける接線方向接触力は常に0である。

$$p_n^{AB} = p_n^{AC} = \eta_n$$

$$p_t^{AB} = p_t^{AC} = \eta_t$$

$$p_n^{BC} = \beta_n$$

各接触点における接触力が求まれば、粒子A, Bの力の釣り合いより外力 F_V , F_H は以下の式により求められることとなる。

$$F_V = 4(\eta_n \sin \theta + \eta_t \cos \theta) \quad (38)$$

$$F_H = 2(\eta_n \cos \theta - \eta_t \sin \theta) + \sqrt{2}\beta_n \quad (39)$$

(3) 応力、ひずみと各エネルギー量の定義

本解析モデルにおいては応力、ひずみの主軸は x_1 , x_2 , x_3 軸方向に一致する。主ひずみは以下の式で求めることができる。

$$\varepsilon_1 = \frac{2r^0 - 2r_A}{2r^0} = \frac{1}{r^0} \sum d\xi_V \quad (40)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{2r^0 - 2r_B}{2r^0} = -\frac{1}{r^0} \sum d\xi_H \quad (41)$$

また、応力は算定領域の仮想ひずみに対してする仮想仕事と粒子モデルに領域外部から作用する接触力が粒子の仮想変位に対してする仮想仕事を等値することにより求め、主応力は次式のように書くことができる³⁾。

$$\sigma_1 = \frac{2}{V^0} F_V r^0 = \frac{3}{2r^{0^2}} F_V \quad (42)$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{3}{2r^{0^2}} F_H \quad (43)$$

なお、主応力、主ひずみはともに圧縮を正とした。

外力による仕事増分を dW 、バネに蓄えられる弾性エネルギー増分を dE_{sp} 、すべりによる摩擦エネルギー増分を dE_{fr} とすれば、それぞれ以下の式で求められる。

$$dW = 2(F_V d\xi_V - 2F_H d\xi_H) \quad (44)$$

$$dE_{sp} = 8 \left(\eta_n du_n^{AB} + \frac{\eta_t d\eta_t}{c_t} \right) + 4(\beta_n du_n^{BC}) \quad (45)$$

$$dE_{fr} = 8\eta_t \left(du_t^{AB} - \frac{d\eta_t}{c_t} \right) = 8\eta_t dL \quad (46)$$

ここに、 dL は接触点AB、ACにおけるすべり量を表している。式(44)で求められる外力による仕事増分は、式(40)～(43)で求められる応力およびひずみ増分によるものと等価である。

(4) 解析結果とその考察

ここでは、完全変位制御による3軸圧縮シミュレーション载荷試験のみについて解析を行う。ここでは、表1に示すようにケース1において内部摩擦角を変化させ、ケース2では x_2 方向と x_3 方向の変位増分を変化させている。また、すべてのケースにおいて用いた諸定数を表2に示す。

図-5、6に3軸圧縮シミュレーション载荷試験により得られた応力ひずみ曲線を示す。縦軸に応力比 τ_{oct}/p 、横軸に八面体せん断ひずみ γ_{oct} をとった。以下、各パラメータの定義式を示す。

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3}\{(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2\}}$$

表1 各ケースの内部摩擦角と変位増分

ケース番号	内部摩擦角 ϕ	$d\xi_V$ (cm)	$d\xi_H$ (cm)
1-1	0°	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}
1-2	5°	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}
1-3	10°	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}
1-4	15°	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}
1-5	20°	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}
1-6	25°	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}
1-7	30°	1.0×10^{-4}	5.0×10^{-5}
2-1	15°	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}
2-2	15°	1.0×10^{-4}	3.0×10^{-5}
2-3	15°	1.0×10^{-4}	7.0×10^{-5}
2-4	15°	1.0×10^{-4}	9.0×10^{-5}
2-5	15°	1.0×10^{-4}	1.1×10^{-4}

表2 解析に用いた諸定数

$R = 1.0(\text{cm})$	$u_n^0 = 5.0 \times 10^{-3}(\text{cm})$
$c_n = 1000(\text{kgf/cm})$	$c_t = 700(\text{kgf/cm})$

$$\gamma_{oct} = 2\sqrt{\frac{1}{3}\left\{\left(\varepsilon_1 - \frac{\nu}{3}\right)^2 + \left(\varepsilon_2 - \frac{\nu}{3}\right)^2 + \left(\varepsilon_3 - \frac{\nu}{3}\right)^2\right\}}$$

$$\nu = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

図-5より、剛性の変化する点が2つ存在することがわかる。最初に剛性が変化する点においては、接触点ABとACにおいて同時にすべりが発生する。ケース1において、内部摩擦角が大きくなるとすべりの発生する応力レベルが上昇することがわかる。また、図-6のケース2は内部摩擦角一定で $d\xi_V$ 、 $d\xi_H$ の比を変化させているが、すべり発生の応力レベルは一定となる。このように内部摩擦角の変化は主にすべり発生の応力レベルの差となって現れる。このことは、すべり発生条件であるクーロンの摩擦則によるものであり、内部摩擦角の増加に伴いすべりの

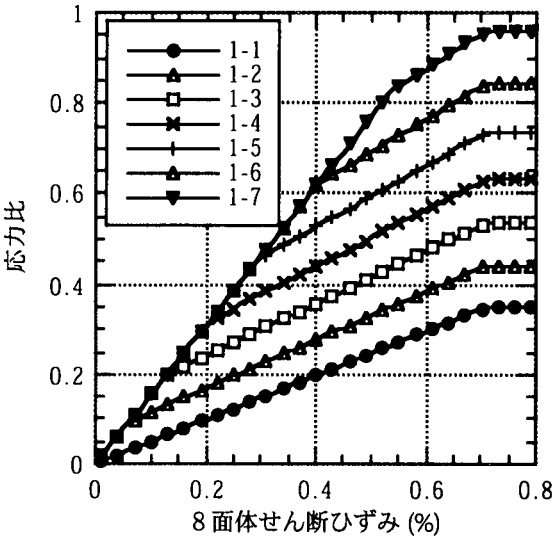


図-5 3次元6粒子モデルシミュレーション载荷試験による応力ひずみ曲線（ケース1）

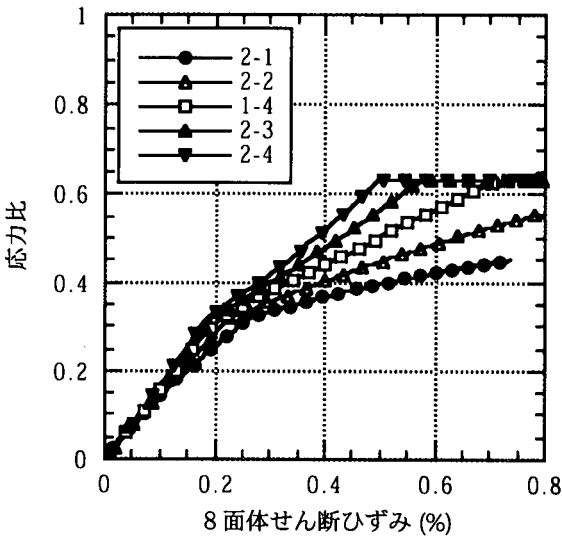


図-6 3次元6粒子モデルシミュレーション载荷試験による応力ひずみ曲線（ケース2）

発生する応力レベルが高くなることは当然のことであるが、次節における構成則の定式化にも反映されている。すべり発生後、粒子間のすべりによる摩擦エネルギーによりエネルギーが散逸され散逸変形が生じるが、応力ひずみ曲線はほぼ直線的に変化する。2方向と3方向の変位増分が異なる場合、接触点ABとACにおいてすべりの発生する応力レベルが異なるため、剛性の変化する点は1つ増えることとなる。また、多粒子ランダムパッキングにおいては、接触点ごとにそれぞれすべり発生の応力レベルやすべり量が異なるため、剛性が次々に変化し曲線的な応力ひずみ曲線が得られると考えられる。

載荷が進んで次に剛性の変化する点は、接触点BCにおける接触状態が失われる点である。この状態に至ると、本6粒子モデルは内部構造が不安定になるが、本論文における構成則の定式化は構造が不安定になる前までを対象とすることとする。

図-7は、各種のエネルギーの変化を示したものであるが、全てのケースにおいて傾向が似ているためケース1-4についてのみ示した。ここで、外力仕事、摩擦エネルギー、弾性エネルギーは、それぞれ式(44)~(46)の各エネルギー増分を載荷ステップごとに加えたものである。また、図-7中に示される散逸エネルギー E^d は、外力仕事を W 、弾性エネルギーを E_{sp} として次式で求められる量である。

$$E^d = W - E_{sp} \quad (46)$$

これは、粒子間バネに蓄積される弾性エネルギーを全て可逆性のエネルギーとみなしたときの散逸エネルギーを表している。図-7より、式(46)による散逸エネルギーとすべりによる摩擦エネルギーがほぼ等しくなることがわかる。このことから粒状体の内部エネルギーは、弾性エネルギー E_{sp} と摩擦エネルギー E_f に分けられ、弾性エネルギーが全て可逆性

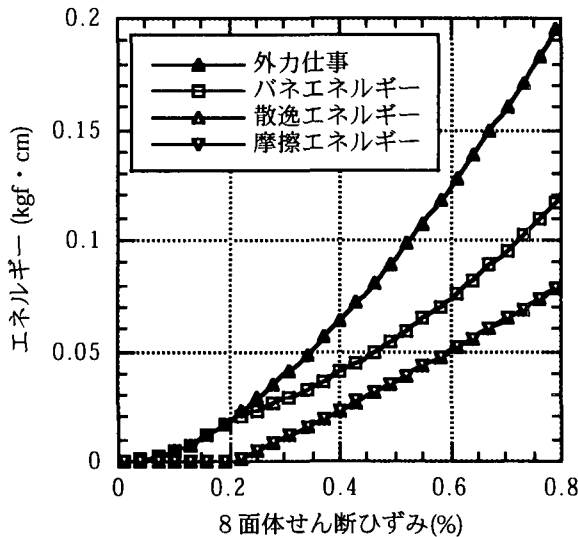


図-7 各エネルギー量の変化

であると仮定した場合、前章で述べた理論に従って構成則を定式化するために定めるべき散逸関数には摩擦エネルギーを用いればよいと推測される。武らによる粒状要素法シミュレーション⁵⁾においては、散逸エネルギーが摩擦エネルギーに一致しないような部分も存在する。粒子数が多く不均質なパッキングの粒状体に対する構成則を誘導する際にはそのようなことも考慮すべきであると考えられるが、次節ではエネルギー散逸は摩擦のみに起因するものと仮定して定式化を行う。

3.2 3次元6粒子モデルの構成則の定式化

ここでは、3次元6粒子モデルのシミュレーション載荷試験に基づき散逸関数を決定し構成則を定式化する。本論文における構成則は完全変位制御の粒子シミュレーションに基づいて誘導されるため、散逸ひずみ速度の方向 $\mathbf{n}$ はあらかじめ確定していることより、 $\mathbf{n}$ の理論的誘導を必要としない。したがって、散逸関数のみを定めることにより構成則が決定することとなる。

(1) 散逸ひずみ速度の方向の決定

散逸ひずみ速度 $d\epsilon_1^d$ 、 $d\epsilon_2^d$ と式(46)中のすべり量 dL との関係より、散逸ひずみ速度の方向 n_1 、 n_2 、 n_3 が導出される。前節では、各粒子の変位増分に上付文字で粒子記号を記したが、本節では連続体モデルとして構成則の定式化を行うため、粒子記号は省略して表記することとする。

すべり量 dL は、式(30)、(31)およびクーロンの摩擦則等を用いて次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} dL &= du_i^{AB} - d\eta_i / c_i \\ &= d\xi_v^d \left(\cos \theta - \frac{c_n}{c_i} \tan \phi \sin \theta \right) + d\xi_H^d \left(\sin \theta + \frac{c_n}{c_i} \tan \phi \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (48)$$

式(45)、(46)、(30)~(33)およびクーロンの摩擦則により求まる載荷、除荷時の外力増分と変位増分の関係と式(48)より、すべり量 dL と散逸変位増分 $d\xi_v^d$ 、 $d\xi_H^d$ の関係が導かれる。ここで、除荷時にはすべりは発生しないと仮定した。

$$\begin{aligned} c_i \cos \theta dL &= (c_n \sin^2 \theta + c_i \cos^2 \theta) d\xi_v^d \\ &\quad - (c_n - c_i) \sin \theta \cos \theta d\xi_H^d \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} c_i \sin \theta dL &= (c_n - c_i) \sin \theta \cos \theta d\xi_v^d \\ &\quad - (c_n \cos^2 \theta + c_i \sin^2 \theta + c_n) d\xi_H^d \end{aligned} \quad (50)$$

式(49)、(50)を解くと散逸変位増分は、

$$d\xi_v^d = \frac{2c_i \cos \theta}{c_n \sin^2 \theta + c_i (1 + \cos^2 \theta)} dL \quad (51)$$

$$d\xi_H^d = \frac{c_i \sin \theta}{c_n \sin^2 \theta + c_i (1 + \cos^2 \theta)} dL \quad (52)$$

と書くことができる。式(51), (52)と式(40), (41)より散逸ひずみ増分は,

$$d\epsilon_1^d = \frac{2c_t \cos \theta}{r^0 \{c_n \sin^2 \theta + c_t (1 + \cos^2 \theta)\}} dL \quad (53)$$

$$d\epsilon_2^d = d\epsilon_3^d = -\frac{c_t \sin \theta}{r^0 \{c_n \sin^2 \theta + c_t (1 + \cos^2 \theta)\}} dL \quad (54)$$

となる。式(53), (54)より散逸ひずみ増分の大きさ $d\alpha$ を求めれば, 次式のように書くことができる。

$$d\alpha = \sqrt{d\epsilon_1^{d2} + d\epsilon_2^{d2} + d\epsilon_3^{d2}} = \frac{c_t \sqrt{4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}}{r^0 \{c_n \sin^2 \theta + c_t (1 + \cos^2 \theta)\}} dL \quad (55)$$

式(53), (54)において dL は未知数であるが, 式(55)で除すことにより dL が消去され散逸ひずみ増分の方
向 $\mathbf{n}$ が求まる。

$$n_1 = \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}} = \frac{2(1 - \epsilon_2)}{\sqrt{4(1 - \epsilon_2)^2 + 2(1 - \epsilon_1)^2}} \quad (56)$$

$$n_2 = n_3 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}} = -\frac{(1 - \epsilon_1)}{\sqrt{4(1 - \epsilon_2)^2 + 2(1 - \epsilon_1)^2}} \quad (57)$$

散逸ひずみ増分の方
向 $\mathbf{n}$ は正確には載荷が進むと変化するが, この変化は微小であるので, 以下では一定であるとして取り扱うこととする。

(2) 摩擦則に基づく散逸関数の決定

3次元6粒子モデルのシミュレーション載荷試験の考察より, 弾性エネルギーが全て可逆性であるとした場合, 散逸エネルギーは摩擦エネルギーに等しいので, 式(46)を変形することにより, 散逸関数を誘導することができる。

$$dE_{fr} = 8\eta_t dL = 8\eta_n \tan \phi dL \quad (58)$$

まず, すべり量 dL は, 式(55)を変形して, 次のように書くことができる。

$$dL = \frac{r^{02} \{ (c_n + c_t)(1 - \epsilon_1)^2 + 2c_t(1 - \epsilon_2)^2 \}}{c_t \sqrt{r_A^2 + r_B^2} \sqrt{4(1 - \epsilon_2)^2 + 2(1 - \epsilon_1)^2}} d\alpha \quad (59)$$

次に, 法線方向の接触力 η_n を応力とひずみで表せば, 次式のようになる。

$$\eta_n = \frac{V^0}{8\sqrt{r_A^2 + r_B^2}} \left\{ \sigma_1(1 - \epsilon_1) + (1 - \epsilon_2) \left(2\sigma_2 - 3\sqrt{2}c_n(u_n^0 + \sqrt{2}r^0 \epsilon_2) / r^{02} \right) \right\} \quad (60)$$

式(59), (60)を式(58)に代入し, 応力とひずみで表せば摩擦エネルギー増分は次式のようになる。

$$dE_{fr} = C_1 V^0 \frac{\{ \sigma_1(1 - \epsilon_1) + (1 - \epsilon_2)(2\sigma_2 - C_2 - C_3 \epsilon_2) \}}{\{(1 - \epsilon_1)^2 + (1 - \epsilon_2)^2\}} \times \frac{\{ C_4(1 - \epsilon_1)^2 + C_5(1 - \epsilon_2)^2 \}}{\sqrt{2(1 - \epsilon_1)^2 + 4(1 - \epsilon_2)^2}} d\alpha \quad (61)$$

ここで, $C_1 \sim C_5$ は3次元6粒子モデルにおける初期配列や内部摩擦角, 粒子間バネ定数等により定まる以下の定数である。

$$C_1 = \frac{\tan \phi}{c_t}, \quad C_2 = \frac{3\sqrt{2}}{r^{02}} c_n u_n^0, \quad C_3 = \frac{6}{r^0} c_n$$

$$C_4 = c_n + c_t, \quad C_5 = 2c_t$$

散逸関数は, 単位面積, 散逸ひずみ当たりの量として定義しているので,

$$\phi = C_1 \frac{\{ \sigma_1(1 - \epsilon_1) + (1 - \epsilon_2)(2\sigma_2 - C_2 - C_3 \epsilon_2) \}}{\{(1 - \epsilon_1)^2 + (1 - \epsilon_2)^2\}} \times \frac{\{ C_4(1 - \epsilon_1)^2 + C_5(1 - \epsilon_2)^2 \}}{\sqrt{2(1 - \epsilon_1)^2 + 4(1 - \epsilon_2)^2}} \quad (62)$$

となる。

以上より散逸関数が求まったが, 散逸関数は応力とひずみの関数となる。一般の塑性論に基づく連続対力学モデルにおける塑性ポテンシャル等では, 全ひずみではなく塑性ひずみや塑性仕事等の内部変数を変数とする場合が多いが, 微視的にはクーロンの摩擦則で示されたすべりの条件を巨視的変数を用いてエネルギー的に表すとひずみの関数となる。このことは, ここで求まった散逸関数の一つの特徴であるといえるであろう。また, 応力はその接触点におけるその載荷段階における力の状態を表し, ひずみは粒子構造の変化を表していると考えられる。

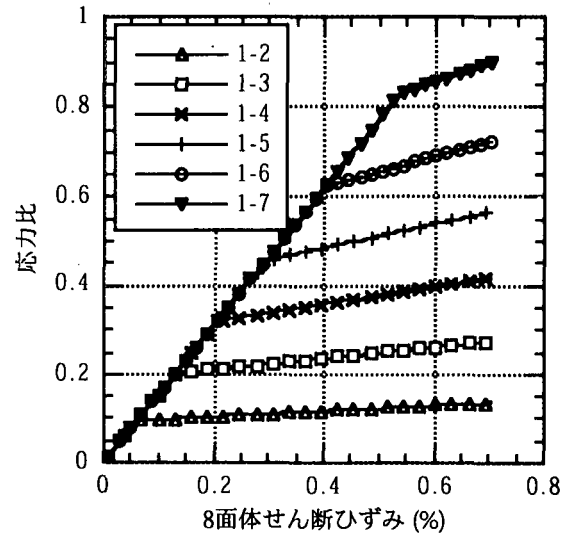


図-8 摩擦則に基づく散逸関数を用いた構成則による応力ひずみ曲線 (ケース1)

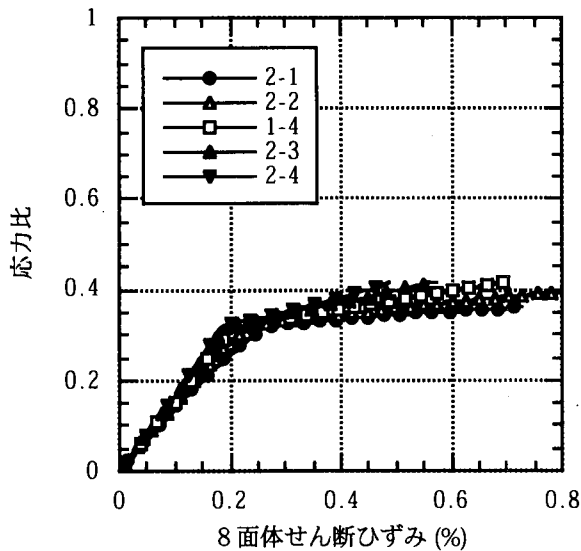


図-9 摩擦則に基づく散逸関数を用いた構成則による応力ひずみ曲線 (ケース2)

(3) 構成則の決定とシミュレーション結果との比較

前項で定まった散逸関数をもとに求めた構成則による応力ひずみ曲線を図-8, 9に示し, 図-5, 6のシミュレーション載荷試験結果と比較する. 散逸関数の $C_1 \sim C_5$ の各定数は, 表-1, 2に示した各ケースの定数から計算したものをを用い, ひずみ増分についてもシミュレーション載荷試験の各ケースと等しいものとした.

まず, 図-8の応力ひずみ曲線より, 最初に散逸が発生する応力レベルは, シミュレーション載荷試験において最初にすべりが発生する応力レベルと一致していることがわかる. また, 内部摩擦角が変化するに伴う散逸の発生する応力レベルの変化が, 明確に表れている. 図-9においても, 内部摩擦角が等しければ, 載荷経路が異なっても同じ応力レベルで散逸が発生している. しかし, いずれのケースにおいても, 散逸が発生した後の応力ひずみ曲線の勾配が, 6粒子モデルシミュレーション載荷試験の結果と比較し小さくなっている. 前節で定めた散逸関数は, 散逸条件を定めるものとしての役割は果たしているが, 硬化特性を表現できるものではない. ここでの構成則は散逸関数のみにより一意的に定めることができるという立場をとっているため, 硬化特性までも含めた正確な構成則を定式化するためには散逸関数の見直しを行う必要があると考えられる.

(4) 粒状体の残留弾性エネルギー

散逸関数の見直しを行うために, 粒状体内部のエネルギーに関する考察を行う. 3次元6粒子モデルのシミュレーション載荷試験のエネルギーに関する考察より, 粒状体内部の全エネルギー増分 dE は次式のように分解される.

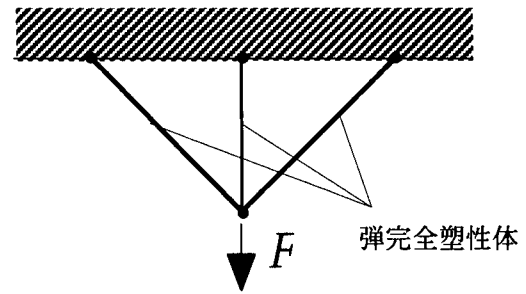


図-10 3本吊りトラスモデル図

$$dE = dE_{sp} + dE_{fr} \quad (63)$$

ここで, dE_{sp} は粒子間バネに蓄えられる弾性エネルギー増分, dE_{fr} は粒子間のすべりによる摩擦エネルギー増分である. 前項では, バネに蓄えられる弾性エネルギー増分は全て可逆性のエネルギー増分 dE^e であり, すべりによる摩擦エネルギー増分が散逸エネルギー増分 dE^d であると仮定した. しかし, バネに蓄えられる弾性エネルギーは粒子の配列状態により変化するものであり, 載荷した際にすべりが発生した場合, その後除荷して載荷前と等価な応力状態に戻したときの粒子配列は載荷前の配列とは異なっている. このことから, 弾性エネルギー増分を次式のように除荷した際に回復する可逆部分と回復しない残留部分とに分けることが可能であると考えられる.

$$dE_{sp} = dE_{sp}^e + dE_{sp}^d \quad (64)$$

このように, 粒状体の粒子間バネに蓄えられる弾性エネルギーが可逆部分と残留部分とに分けられることは2次元粒状体におけるランダムパッキングの多粒子粒状体モデル等によるプローブ試験により確認されている¹⁹⁾. このような粒状体の残留弾性エネルギーは, 図-10のような弾完全塑性体の3本吊りトラスの塑性挙動と類似している. 3本吊りトラスにおいて, 中央部材が塑性化した後に除荷した時, 各部材に残留応力が発生する. 3本吊りトラスの場合の残留応力は, 粒状体の場合においてはバネに作用する力のうちの回復しない部分に相当する. また, この残留応力は塑性ひずみが生じたことに起因して生じ, 除荷後にひずみエネルギーが残留することとなる. 式(64)における残留弾性エネルギーは, このようなエネルギーに対応するものである. 残留弾性エネルギーは内部構造の変化に起因して生じるので, 3本吊りトラスで節点の連結をはずせば残留ひずみエネルギーは解放されるように, 他の粒子による拘束がなくなれば解放されるエネルギーである. 粒状体のような摩擦性材料においては内部構造の変

化は非常に複雑であり、このようなエネルギーが完全に解放されることはほとんどないと考えられるが、非排水条件下で繰返し载荷を行った場合などにおいては解放される可能性があると考えられる。すべりによる摩擦エネルギーはすべりに直接的に起因して発生するのに対して、残留弾性エネルギーはすべりの発生の結果、従属的に発生し、すべりが発生していない状態においては0になる。また、残留弾性エネルギーは消散するわけではなく、粒子間バネに蓄えられているが、「元の応力状態になるように除荷した時に回復しない」という意味において散逸エネルギーの一部であると考えてよいであろう。したがって、以下、与えられた外部仕事増分のうち弾性エネルギーに転化する部分 dE^e は、

$$dE^e = dE_{sp}^e \quad (65)$$

散逸エネルギー増分 dE^d は、

$$dE^d = dE_{sp}^d + dE_{fr} \quad (66)$$

と仮定して散逸関数を誘導し構成則を定式化する。

(5) 改良した散逸関数による構成則の誘導とシミュレーション結果との比較

ここでは、式(64)の散逸エネルギー増分より散逸関数を誘導し構成則を定式化する。まず、残留部分を含めた全弾性エネルギー増分は、式(45)より、

$$dE_{sp} = 8(\eta_n du_n^{AB} + \eta_t dS) + 4\beta_n du_n^{BC} \quad (67)$$

と書くことができる。ここで、 dS は接触点AB, ACにおける接線方向のバネに対応する部分の相対変位であり、以下の関係が成り立つ。

$$du_t^{AB} = dS + dL \quad (68)$$

式(67)を式(30), (32), (68), クーロンの摩擦則等を用いて変位増分で表し、可逆部分と残留部分とに分解すれば、残留弾性エネルギー増分は次式のように書くことができる。

$$dE_{sp}^d = 8\eta_n \left\{ (\sin \theta + \tan \phi \cos \theta) d\zeta_V^d - (\cos \theta - \tan \phi \sin \theta) d\zeta_H^d \right\} - 4\sqrt{2}\beta_n d\zeta_H^d - dE_{fr} \quad (69)$$

よって、散逸エネルギー増分は式(66), (69)より、

$$dE^d = V^0 \frac{\{\sigma_1(1-\varepsilon_1) + (1-\varepsilon_2)(2\sigma_2 - C_1\varepsilon_2 - C_2)\}}{\{(1-\varepsilon_1)^2 + (1-\varepsilon_2)^2\}} \times \{[(1-\varepsilon_1) + \tan \phi(1-\varepsilon_2)]n_1 + [(1-\varepsilon_2) - \tan \phi(1-\varepsilon_1)]n_2\} d\alpha + V^0(C_1\varepsilon_2 + C_2)n_2 d\alpha \quad (70)$$

となる。これを応力とひずみに書き直し散逸関数の定義に従って正規化すれば、散逸関数は以下のように書くことができる。

$$\varphi = (C_1\varepsilon_2 + C_2)n_2 + \frac{\{\sigma_1(1-\varepsilon_1) + (1-\varepsilon_2)(2\sigma_2 - C_1\varepsilon_2 - C_2)\}}{\{(1-\varepsilon_1)^2 + (1-\varepsilon_2)^2\}} \times \{[(1-\varepsilon_1) + \tan \phi(1-\varepsilon_2)]n_1 + [(1-\varepsilon_2) - \tan \phi(1-\varepsilon_1)]n_2\} \quad (71)$$

C_1, C_2 はシミュレーション载荷試験で用いた各定数を次のように計算して求められる定数である。

$$C_1 = \frac{6c_n}{r^0}, \quad C_2 = \frac{3\sqrt{2}c_n u_n^0}{r^{0^2}}$$

以上のように改良した散逸関数を用いて定式化した構成則による計算結果を6粒子モデルシミュレーション载荷試験結果と比較する。

図-11, 12に、改良した散逸関数により誘導した構成則に基づいて描いた応力ひずみ曲線を示した。ここでの各ケースも6粒子モデルシミュレーション载荷試験の時と同じものである。どのケースにおいてもここで定めた構成則の結果と図-5, 6におけるシミュレーション結果とがほぼ一致している。散逸エネルギー増分を摩擦エネルギー増分のみとした場

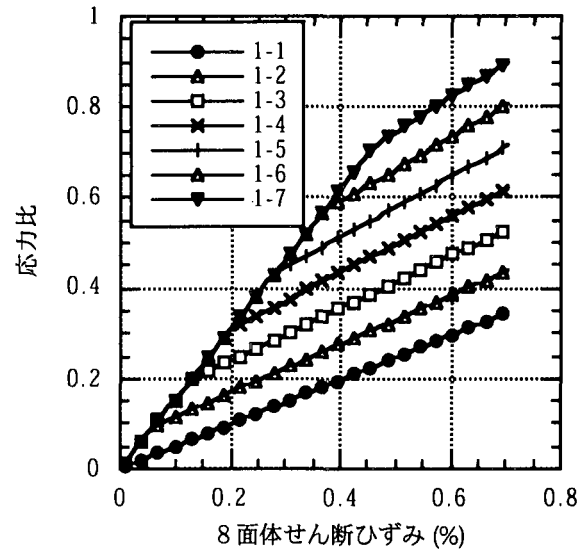


図-11 改良した散逸関数を用いた構成則による応力ひずみ曲線 (ケース1)

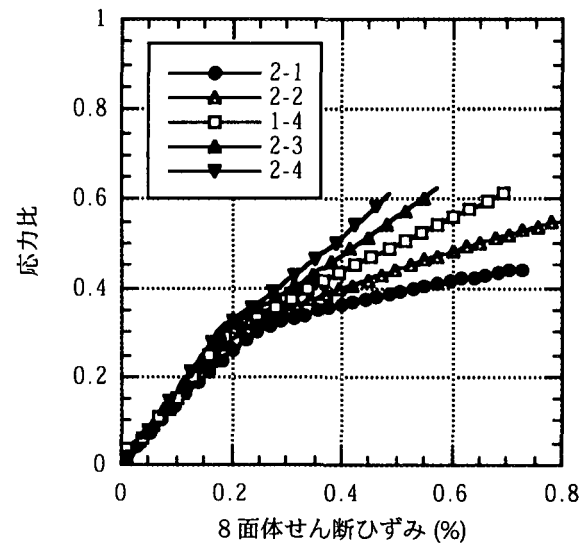


図-12 改良した散逸関数を用いた構成則による応力ひずみ曲線 (ケース2)

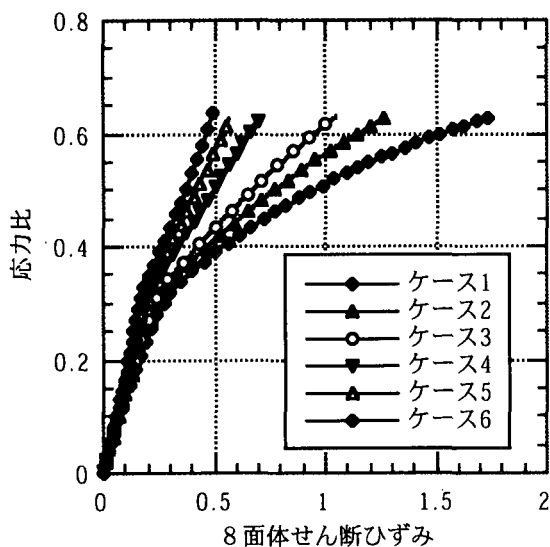


図-13 3次元6粒子モデルの応力制御シミュレーション荷重試験結果（応力ひずみ曲線）

合には、散逸条件に関しては6粒子モデルシミュレーション荷重試験の結果と一致したが、硬化の表現には不十分であった。これに対して、散逸エネルギー増分を摩擦エネルギー増分と残留弾性エネルギー増分を加えたものであるとした場合、本構成則は散逸条件、硬化特性ともに6粒子モデルシミュレーションの結果を十分表現しうるものであるということができよう。

このようなことから、散逸エネルギーに関してはすべりにより直接的に生じる摩擦エネルギーと、すべりの結果として従属的に生じる残留弾性エネルギーを考慮すべきであると考えられる。また、残留弾性エネルギーは粒状体の内部に起こる構造変化によるものであり、これがひずみ硬化に対し大きな役割を担うと考えられる。

本論文で定式化された構成則は散逸関数のみに依存するものであり、式(71)の散逸関数は荷重以前に定まっている定数とその時の応力状態、粒子配置のみによって定まるものである。したがってこの構成則は荷重経路に依存するものではないと考えられる。ケース2は、荷重経路のみを変化させたものであり全ケースで同じ構成則を用いているが、図-12を見ても分かるように、粒子シミュレーションの結果を正確に表現可能である。つまり、本構成則が荷重経路に依存しないものであるといえるであろう。

さらに、本構成則が他の荷重方法においてもシミュレーション荷重試験結果を表現しうるものであるかを検証するために、同モデルを用いて応力制御によるシミュレーション荷重試験の結果と構成則による計算結果を比較した。図-13に3次元6粒子モデルの応力制御による3軸圧縮シミュレーション荷

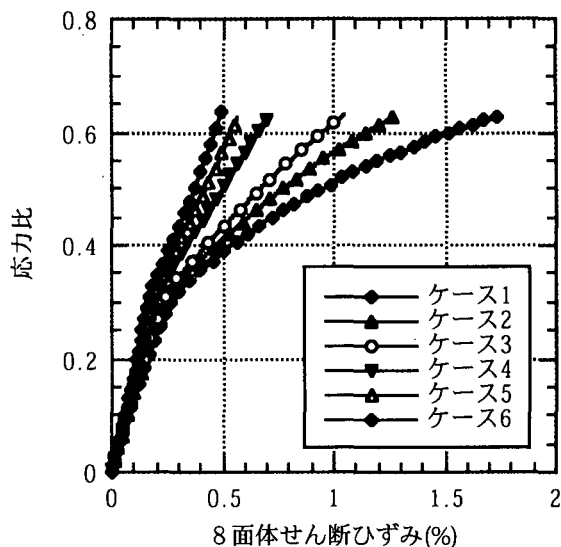


図-14 応力制御による構成則の計算結果（応力ひずみ曲線）

荷試験による応力ひずみ曲線を示し、図-14に式(71)の散逸関数を用いた構成則による応力ひずみ曲線を示した。諸定数は完全変位制御と同様に表2のものを用い、内部摩擦角を 15° 、 x_1 方向の応力増分を 0.1 kgf/cm^2 とした。また、3軸状態に限ることとしケース1～6として x_2, x_3 方向の応力増分を0.01, 0, -0.01, -0.05, -0.1, -0.2 kgf/cm^2 と変化させた。図-13と14を比較して、応力制御においても本構成則が粒子シミュレーション結果を正確に表現できていることが分かる。このことから、完全変位制御の粒子シミュレーション荷重試験に基づいて定式化された構成則が、応力制御においても有用であるといえる。また、応力制御においても粒子シミュレーション荷重試験結果を正確に表現可能であることも、本構成則が荷重経路に依存しないことの一つの根拠となるであろう。

4. おわりに

本論文は、散逸関数に基づく構成則理論^{16),17),18)}が粒状体の微視的変形機構を巨視的な構成則に反映させる可能性があることを示したものである。具体的には、3次元6粒子モデルの完全変位制御による荷重シミュレーション試験を行い粒状体内部の微視的変形機構を観察し、これに基づいて巨視的である応力およびひずみの関係として散逸関数を定めた。この散逸関数を理論式に代入し構成則を確定し、シミュレーション荷重試験結果との比較考察を行った。以下、本論文における結論を列挙する。

①粒状要素法に基づく3次元6粒子モデルのシミュレーション荷重試験結果に基づき摩擦エネルギー

とともに非可逆性の弾性エネルギーである残留弾性エネルギーを巨視的散逸関数として表現した結果、散逸関数は応力とひずみを含む関数形となった。

②残留弾性エネルギーの効果を散逸関数に含め、構成則を誘導した結果、3次元6粒子モデルのシミュレーション載荷試験結果を精度良く表現し得ることを確認した。

③完全変位制御のシミュレーション載荷試験に基づいて誘導された本構成則は、初期状態の各定数のみにより決定されるものであり、載荷経路に依存するものではなく、応力制御にも対応可能であることを確認した。

今後の課題として、より一般的な配列の粒状体に対する検討が必要である。とくに、粒径が等しくない多数の粒子パッキングに対して構成則を定式化する場合には、エネルギー散逸の要因となる各パラメータを平均化して取り扱う必要があるが、そのための手法を確定する必要がある。

以上、本論文においては簡単な粒子シミュレーションに基づき粒状体の微視的変形機構を散逸関数を介して巨視的な構成則に反映し得ることを示すことができたが、今後さらに上述の課題を解決することにより、より一般的な粒状体の連続体力学モデルの構築を行いたいと考えている。

参考文献

- 1) Cundall, P. A. and Stack, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol. 1, No. 2, pp. 293-298, 1973.
- 2) 岸野佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, *土木学会論文集*, Vol. 406 / III-11, pp.97-106, 1989.
- 3) Kishino, Y. : Computer analysis of dissipation mechanism in granular media, *Powders and Grains* (Biarez and Gouvers eds.), Balkema, pp.323-330, 1989.
- 4) 武 建勲, 岸野佑次, 京谷孝史：改良粒状要素法による粒状体の弾塑性挙動の研究, *構造工学論文集*, Vol. 43A, pp. 403-412, 1997.3.
- 5) 武 建勲, 岸野佑次, 京谷孝史：2次元粒状体モデルプローブ試験による弾塑性挙動の考察, *構造工学論文集*, Vol. 44A, pp. 399-408, 1998.3.
- 6) 土倉 泰, 岸野佑次, 佐武正雄：粒状要素法による粒状体の3次元変形機構の解析, *土木学会論文集*, No. 436 / III-16, pp. 111-120, 1991. 9.
- 7) Spencer, A. J. M. : A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 12, pp. 337-351, 1964.
- 8) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R. : Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- 9) Mehrabadi, M. M. and Cowin, S. C. : Initial planar deformation of dilatant granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 26, pp. 269-284, 1978.
- 10) 金谷健一：粒状体の速度場の理論—関連流動則と特性曲面—, *土質工学論文報告集*, Vol. 19, No. 4, pp. 103-112, 1978.
- 11) Nemat-Nasser, S. and Balendran, B. : Micromechanics of flow and failure modes of particulate media over a wide range of strain rates, *Advances in Micromechanics of Granular Materials*, Shen, H. H. , Satake, M. , Mehrabadi, M. M. , Chang, C. S. and Campbell, C. S. eds. , Elsevier, Amsterdam, pp. 21-30, 1992.
- 12) Ziegler, H. and Wehrli, C. : The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 183-238, 1987.
- 13) Houlsby, G. T. : A derivation of the small-strain incremental theory of plasticity thermomechanics, *Deformation and Failure of Granular Materials*, Vermeer, P. A. and Luger, H. J. eds. , Balkema, Rotterdam, pp. 109-118, 1982.
- 14) Chandler, H. W. : A Plasticity theory of without Drucker's postulate suitable for granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 33, pp. 215-226, 1985.
- 15) 岸野佑次：散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導, *土木学会論文集*, No. 394 / III-9, pp. 115-122, 1988.
- 16) 岸野佑次：摩擦性材料の構成則の定式化, *土木学会論文集*, No. 511 / III-30, pp. 181-190, 1995. 3.
- 17) 岸野佑次：散逸関数を用いた構成則理論の粒状体への応用, *構造工学論文集*, Vol. 41 A, pp. 485-491, 1995. 3.
- 18) 金子賢治, 岸野佑次, 倉科広作：散逸関数を用いた構成則理論の一般化, *土木学会第51回年次学術講演会概要集*, 1996. 9.
- 19) 近藤善裕, 岸野佑次, 武 建勲：粒状体における弾塑性エネルギー収支の考察, *平成9年度土木学会東北支部技術研究発表会講演概要集*, III-18, pp. 322-323, 1998. 3.

(1998年4月25日受付)