

M- ϕ 曲線が軟化する柱部材の Duffing 方程式による曲げ振動解析

Bending Oscillation Analysis of Column Member with Softening of M- ϕ Curve by Duffing Equation

大島俊之*, 三上修一**, 山崎智之***, 小倉裕介****

Toshiyuki OSHIMA, Shuichi MIKAMI, Tomoyuki YAMAZAKI and Yusuke OGURA

*工博 北見工業大学教授 工学部土木開発工学科 (〒090-8507 北見市公園町 165 番地)

**正会員 博士(工) 北見工業大学助教授 工学部土木開発工学科 (〒090-8507 北見市公園町 165 番地)

***正会員 北見工業大学助手 工学部土木開発工学科 (〒090-8507 北見市公園町 165 番地)

****正会員 工修 (株)八千代エンジニアリング (〒153-0061 東京都目黒区中目黒 1 丁目 10-21)

Nonlinear bending oscillation of RC column with softening of M- ϕ curve is dealt with in this paper. Simplified one mass system of column with weakly nonlinear M- ϕ relationship is modeled by Duffing equation and some typical behaviors of Duffing equation are shown in numerical results. And comparison of phase plane of horizontal displacement between actual results of dynamic response of RC column and the results of Duffing equation has a good coincidence in the case of weakly nonlinear region of M- ϕ curve.

Keyword : Duffing equation, weakly nonlinear oscillation, M- ϕ softening, bending column

1. まえがき

本論文では、曲げモーメント(M)-曲率(ϕ)関係の復元力特性が軟化部を有する柱状曲げ部材を対象として、その非線形振動応答問題を Duffing 型振動方程式により定式化して検討している。

この種の復元力の軟化を考慮した研究には Duffing 型振動方程式に関連した多くの理論的研究があるが^{1)~5)}、ここでは大地震時に柱状構造物が基部に損傷や局部座屈を生じて復元力特性が軟化する場合を対象として、これを Duffing 型方程式として定式化し、この解析を通じてこの非線系振動応答の特性を明らかにしようとするものである。

Duffing 型振動方程式に関連する理論的研究には摂動法を用いた解の安定・不安定性に関する様々な研究や Poincaré Map を用いたカオス構造に関連する研究など多くの研究がある。これらの中で特に本論文に関連する研究としては系のエネルギーつり合い安定に基づく Bifurcation Point または Saddle Point (鞍点) における振動応答の飛び移り現象(図 1 参照)に関連する一連の研究が上げられる^{2), 5)}。また構造物の弾塑性振動応答問題として関連する研究には構造物への入力エネルギーおよび構造物が分担する運動エネルギーと内部保存エネルギーに着目した研究として加藤・秋山ら^{8), 9)}の研究、および構造系の Post Peak の安定性に着目した田辺ら^{6), 7)}の研究が上げられる。

本論文では Duffing 型振動方程式による解析を対象としているが、この種の問題の解析手法や検討手法にはこれまで多くの方法が発表されている²⁾。本論文ではこのうち構造系のエネルギー応答や変位の応答軌跡および変位応答の位相平面に着目して解析した結果を示している。なお、本研究は別途実施した橋脚の非線形振動応答解析結果との比較のために実施したものである。¹⁶⁾

2. Duffing 型方程式による定式化

2.1 M- ϕ 関係が軟化する柱部材のモデル化について

前述したように本論文では大地震時に柱状構造物が基部に損傷や局部座屈を生じて復元力特性が軟化する場合

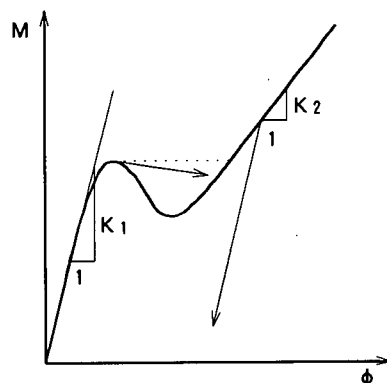


図-1 復元力特性

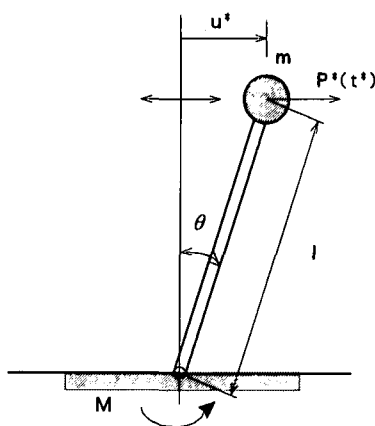


図-2 水平加振力を受ける
1自由度弾塑性系

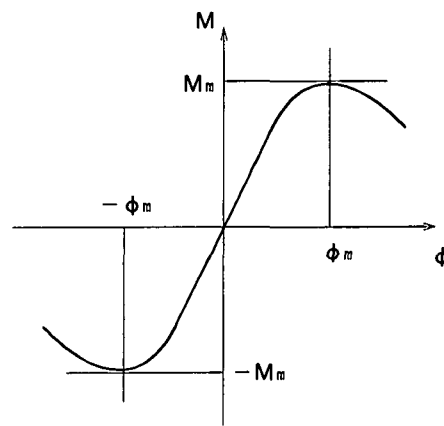


図-3 M-φ関係のモデル化

を対象として、これを Duffing 型振動方程式として定式化し解析する。

通常この種の問題は柱状構造物を質点系に分解し、質点系をつなぐ柱要素には断面内の弾塑性構成則を考慮したモデル化により得られた弾塑性骨組み要素関係式を適用して解析する^{15),16)}。しかし本論文では Duffing 型振動方程式による1質点系にモデル化した解析を対象としているので、柱状構造物の質量はすべて上部に集中するものとしてモデル化するとともに、M-φ関係の非線形性は柱基部に集中するものとする。M-φ関係は除荷時も含めて図3および式(1)に支配されるものとする。

2.2 Duffing 型振動方程式の誘導

図-2に示すように柱基部のみで塑性化することを想定した1自由度系弾塑性モデルを考える。このモデルでは質量はすべて柱上部に集中しており、この質量に水平加振力 $P^*(t^*)$ (ただし t^* は実時間) が作用するものとする。ここでは質量 m の偏心や大変形の影響は考慮しないものとする。

柱基部における曲げモーメント M と曲率 ϕ の関係として図-3のような曲線を考え、M-φ曲線の軟化を考慮する。このM-φ関係の設定については実際の橋脚構造の大地震時の復元力特性、特に塑性化後の保有耐力に関する多くの研究^{12),14),15),16)}があるので、これらを参考として決定する。またモデル化の過程で幾何学的非線形性(偏心や大変形の影響)を考慮していないので、このM-φ関係のモデル化は実際の現象との対応としては比較的塑性化の範囲が小さい場合に相当する。すなわち弱い軟化(Weakly nonlinear)の場合に相当する。

図-3のM-φ関係として次式を用いる。

$$M = K \left(\phi - \frac{\phi^3}{3\phi_m^2} \right), \quad M_m = \frac{2}{3} K \phi_m \quad (1)$$

ただし K は曲げ剛性に相当する係数である。

図2および文献¹³⁾を参照して曲率 ϕ と頂点の水平変位 u^* に関する第一次近似の関係より次のようにおく。

$$\phi = \frac{3}{l^2} u^* \quad (2)$$

また質量 m と柱基部の曲げモーメント M および、外力 $P^*(t^*)$ の関係は

$$m\ddot{u}^* = -\frac{M}{l} + P^*(t^*) \quad (3)$$

したがって式(3)に式(1)及び式(2)を代入すれば

$$m\ddot{u}^* + \frac{3K}{l^3} u^* - \frac{9K}{l^7 \phi_m^2} u^{*3} = P^*(t^*) \quad (4)$$

となり、 u^* に関する Duffing 型の振動方程式が得られる。

一般には減衰項を付加した次式が Duffing 方程式として知られている²⁾。

$$m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + k_1 u^* + \alpha k_3 u^{*3} = P^*(t^*) \quad (5)$$

ただし $c\dot{u}^*$ は振動速度に比例する減衰項、 $k_1 = 3K/l^3$ 、 $k_3 = 9K/l^7 \phi_m^2$ 、 $\alpha = \pm 1$ ($\alpha = +1$ のときひずみ硬化、 $\alpha = -1$ のときひずみ軟化)。

2.3 Duffing 方程式の解析

一般に式(5)のような非線形方程式の振動特性をパラメトリックに検討する手法としては、直接数値シミュレーションを行って、系の応答を求め応答波形や位相平面、さらには波形のスペクトル解析などを用いて初期条件の影響、減衰の影響、軟化の違いによる影響、加振振幅や周期などの影響を検討することが多い。また、応答スペクトルのような周波数領域での特性を検討することもかなり行われており、非線形挙動を検討する項目は多い。

式(5)の外力 $P^*(t^*)$ として

$$P^*(t^*) = F^* \cos \omega^* t^* \quad (6)$$

を用い、振幅 F^* 、円振動数 ω^* で加振されるものとする。式(5)を文献¹⁾にならって固有周期 T^* および振幅の特性値 U^* を用いて次のように無次元化する。

$$\ddot{u} + u + 2\hat{\mu}\dot{u} + \alpha \varepsilon u^3 = F \cos \omega t \quad (7)$$

ただし

$$\begin{aligned} t &= t^*/T^*, & u &= u^*/U^*, & \omega &= \omega^*/\omega_0 \\ T^* &= 1/\omega_0, & \omega_0^2 &= k_1/m, & 2\hat{\mu} &= c/m\omega_0 \\ \varepsilon &= k_3^*U^{*3}/k_1^*U^*, & F &= F^*/k_1U^* \end{aligned}$$

このように変形した結果、物理的意味としては ε は非線形項と線形項の比、 F は外力の振幅と線形保存力との比、 $\hat{\mu}$ は減衰定数のように変換されている。以下 u_0 、 $\dot{u}_0$ を無次元化された初期変位及び、初期速度とする。数値計算では Runge-Kutta-Gill 法による逐次積分法を用い、 $\alpha = -1$ （軟化）の場合を対象として検討する。

3. 摂動法による Duffing 方程式の検討

非線形性の程度を示す ε として

$$\varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon = O(1) \quad (8)$$

すなわち Weakly Nonlinear の条件を用い、また減衰定数 $\hat{\mu}$ として

$$\hat{\mu} = \varepsilon \mu \quad (9)$$

のように ε の関数とする。すなわち振動系の構造減衰は小さいものと仮定する。

解の摂動展開として

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots \quad (10)$$

これを式(7)に代入して ε^0 と ε^1 の係数をゼロとおくと

$$\varepsilon^0: \ddot{u}_0 + u_0 = F \cos \omega t \quad (11)$$

$$\varepsilon^1: \ddot{u}_1 + u_1 = -2\mu \dot{u}_0 - \alpha u_0^3 \quad (12)$$

また式(11)の解としては

$$u_0(t) = A e^{it} + \bar{A} e^{-it} + \frac{F e^{i\omega t}}{2(1-\omega^2)} + \frac{F e^{-i\omega t}}{2(1-\omega^2)} \quad (13)$$

ただし $A, \bar{A}$ は未定係数で初期条件などから求まる。

$\omega \approx 1$ のときは u_0 が大きくなり、Primary resonance になるとともに、式(12)の右辺に示すように u_1 にも影響することとなり、解が発散しやすい。

また式(12)の右辺からも明らかなように $\alpha = -1$ の場合、減衰項 $2\mu \dot{u}_0$ と非線形項 αu_0^3 がお互いに影響を及ぼし合う関係にあり、これらの効果の大小が非線形振動応答に大きな影響を及ぼすこととなる。

次に外力振幅の値が比較的小さい場合について検討する。したがって式(7)において

$$F = \varepsilon f \quad (14)$$

とおく。

この場合、時間 t について Multiple Scale¹⁾

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

を導入し、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_n} \frac{\partial T_n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \\ &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

の演算記号を用いる。

ε^0 と ε^1 のオーダーまでを考慮することになると応答の解は

$$u(t, \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (17)$$

となり、これを式(7) ($\hat{\mu} = \varepsilon \mu$) に代入すると

$$\begin{aligned} (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(u_0 + \varepsilon u_1) + u_0 + \varepsilon u_1 \\ + 2\varepsilon \mu (D_0 + \varepsilon D_1)(u_0 + \varepsilon u_1) \\ + \varepsilon \alpha (u_0 + \varepsilon u_1)^3 = \varepsilon f \cos \omega T_0 \end{aligned} \quad (18)$$

ただし外力の Time Scale を T_0 のみにとり、大きな Time Scale の影響を無視すると、式(11)、(12)と同様

$$\varepsilon^0: D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 \\ - \alpha u_0^3 + f \cos \omega T_0 \end{aligned} \quad (20)$$

また式(19)の解として

$$u_0(t) = A(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0} \quad (21)$$

これを式(20)の右辺に代入すると

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2i(A' + \mu A)e^{iT_0} - 3\alpha A^2 \bar{A} e^{iT_0} - \alpha A^3 e^{3iT_0} + \frac{1}{2} f e^{i\omega T_0} + cc \quad (22)$$

ただし cc は Complex conjugate, プライム' は時間微分を意味する。

ここでまた $\omega \approx 1$ の場合に応答解が発散しないように制御するため

$$\omega = 1 + \varepsilon \sigma \quad (23)$$

とおく。したがって

$$\left. \begin{aligned} \omega t &= t + \varepsilon \sigma t \\ \omega T_0 &= T_0 + \sigma(\varepsilon t) = T_0 + \sigma T_1 \\ \frac{1}{2} f e^{i\omega T_0} &= \frac{1}{2} f e^{i\sigma T_1} e^{iT_0} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

となり、応答解が発散しないための条件として式(22)の右辺第1項、第2項および第4項より次式が得られる。

$$-2i(A' + \mu A) - 3\alpha A^2 \bar{A} + \frac{1}{2} f e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (25)$$

さて式(21)の右辺の係数 A が複素振幅であることから

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (26)$$

とおく。ただし a, β は実数。

これを式(25)に代入して実数部と虚数部に分離すると

$$\left. \begin{aligned} a' &= -\mu a + \frac{1}{2} f \sin(\sigma T_1 - \beta) \\ a\beta' &= \frac{3}{8} \alpha a^3 - \frac{1}{2} f \cos(\sigma T_1 - \beta) \\ \text{ただし } u &= a \cos(t + \beta) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで

$$\sigma T_1 - \beta = \gamma, \quad \sigma - \beta' = \gamma' \quad (28)$$

のように β を γ でおきかえ、応答解が安定となる条件 (Fixed point) として

$$a' = 0, \quad \gamma' = 0 \quad (29)$$

をとると、次式が得られる。

$$\mu^2 a^2 + (\sigma a - \frac{3}{8} \alpha a^3)^2 = \frac{1}{4} f^2 \quad (30)$$

この式の物理的な意味は応答の振幅 a は

$$a = a(\sigma; f) \quad (31)$$

となり、振動数の変化と入力振幅の関数として与えられることを意味している。一般にこの a と σ の関係は $\alpha = -1$ のひずみ軟化の場合、左側に Bifurcation Point (飛び移り点) や Saddle Point (鞍点) を有する応答関係となる。(図-10 参照)

これらに関する数値計算結果は次章で報告することとする。

4. 数値解析による Duffing 方程式の検討

4.1 比較対象モデルの解析結果¹⁶⁾

本研究は橋脚基部に大きな地震の影響を受けて損傷が発生し、橋脚の履歴復元力が軟化する場合を対象として、これらの非線形挙動を Duffing 型振動方程式によってモデル化することを目的としている。そこでまず比較対象とする RC 柱モデルについてのこれまでに実施した解析結果について概略を説明する^{15), 16)}。

表-1 解析モデル諸元

(a) 構造諸元

節点	座標(m)	重量(tf)	要素	要素長さ(m)
1	0.0000	24.00		
2	1.2000	25.35	①	1.2000
3	1.9000	2.429	②	0.7000
4	2.4625	2.165	③	0.5625
5	3.0250	2.333	④	0.5625
6	3.6750	2.502	⑤	0.6500
7	4.3250	2.502	⑥	0.6500
8	4.9750	2.502	⑦	0.6500
9	5.6250	11.84	⑧	0.6500
10	7.6750	87.62	⑨	2.0500

(b) 断面諸元

要素番号	断面名	
1		フーチング部
2	CS1	橋脚基部断面
3	CS2	1 回目段落し後断面 (D19×48→×24)
4	CS2	
5	CS3	2 回目段落し後断面 (D19×24→×12)
6	CS3	
7	CS3	
8	CS3	
9	CS3	

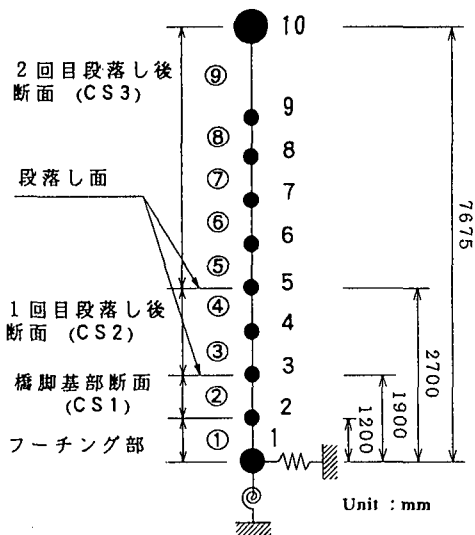


図-4 柱部材の離散質点系解析モデル

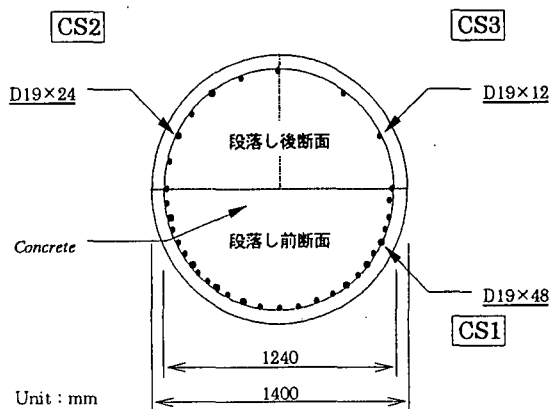
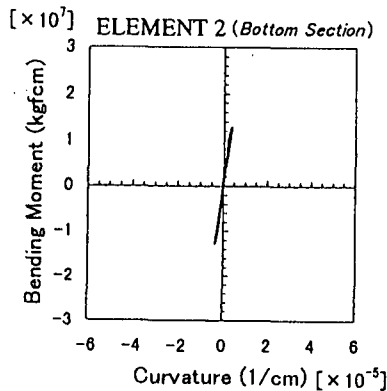
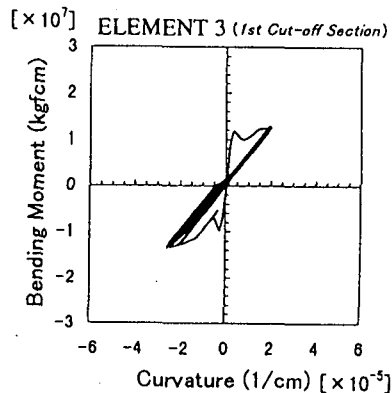


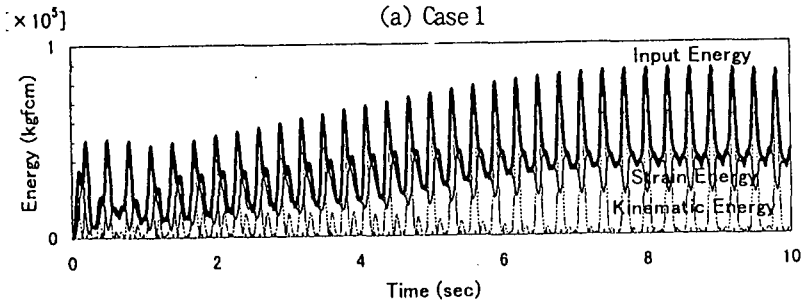
図-5 RC柱モデルの断面構成



(a) Case 1

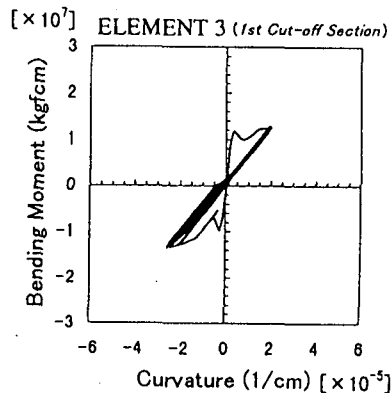


(a) Case 1



(b) Case 2

図-6 エネルギー応答結果

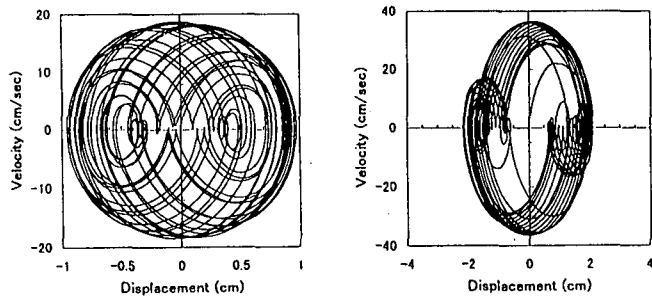


(b) Case 2

図-7 M-φ履歴

比較対象解析モデルは図-4に示すように10個の質点からなる柱部材で上部工重量と基礎の重量を考慮するとともに段落とし部を2箇所設けている。Duffing 方程式と比較するため、解析結果のうち節点3の橋脚基部断面に軟化が集中する場合の結果を対象とする。構造諸元は表-1に示すとおりであり、断面構成は図-5に示している。数値計算では柱要素に塑性化を考慮した増分形式のはり要素を用い、M-φ関係はあらかじめ断面分割法(断面50分割)により求めている。用いた鉄筋とコンクリートの材料構成則は基本的に道路橋示方書(耐震設計編)に基づいている¹⁶⁾。

解析では構造系の減衰は考慮していないので、減衰効果は履歴減衰効果のみである。解析に用いた入力波形は正弦波形で周期は0.2sec、振幅はCase1で200gal、Case2で400galとしている。構造系の弾性時の最低次固有周期



(a) Case 1

(b) Case 2

図-8 柱上部水平変位の位相平面

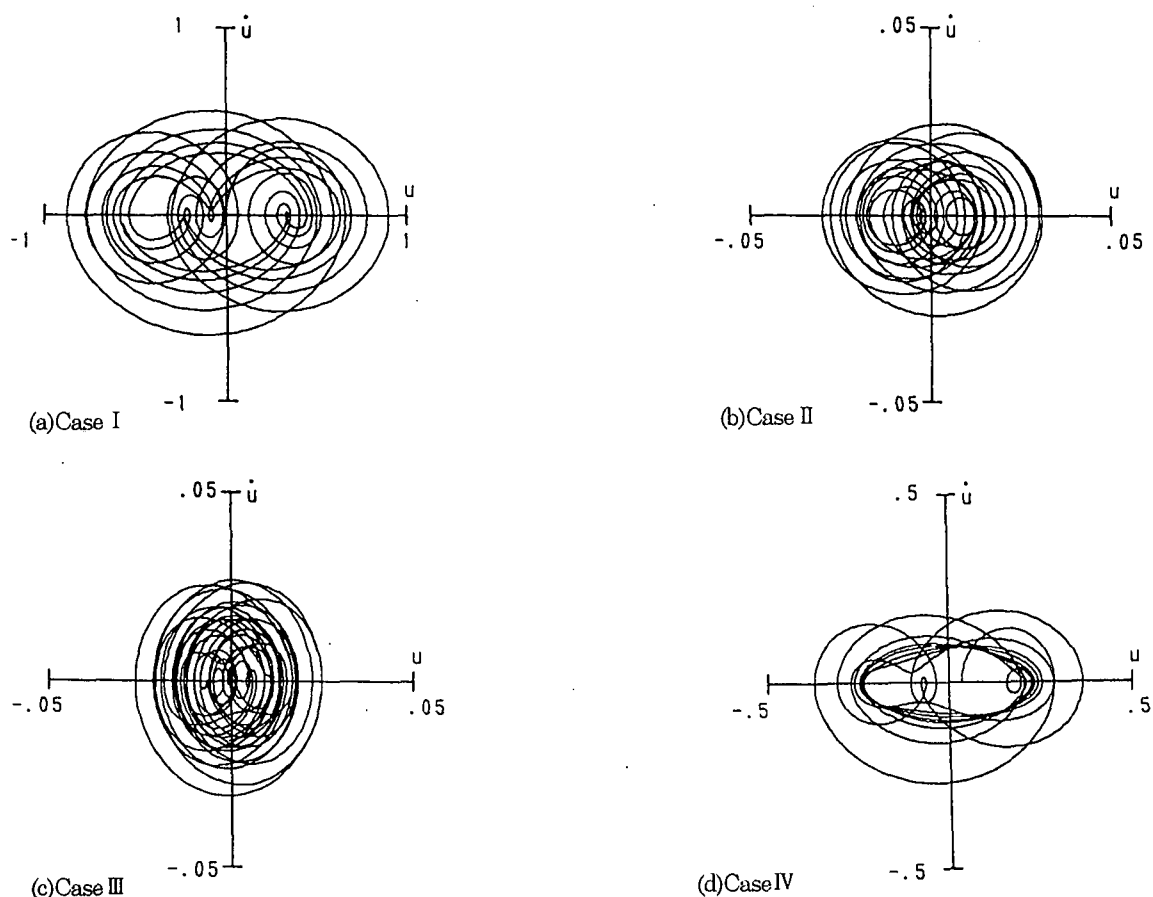


図-9 柱上部水平変位の位相平面 (Duffing 方程式)

は 0.422sec である。

図-6にはエネルギー応答解析結果として太い実線は入力エネルギー, 細い実線は内部ひずみエネルギー(弾性ひずみエネルギー+塑性ひずみエネルギー), 点線は運動エネルギーを示している。これらの図より運動エネルギーと内部ひずみエネルギーの間のエネルギーのやりとりの状況がわかる。図-7には柱基部(断面3)のM-φ履歴を示している。Case1でわずかに塑性化が現れている。また Case2では軟化と塑性化がさらに現れている。図-8には柱上部(上部工質量)の水平変位の位相平面を示している。

4.2 数値積分による Duffing 方程式の解析

ここでは式(7)に $\dot{\mu} = \varepsilon \mu$ (式(9))とおいた式を対象として Runge-Kutta-Gill 法を用いた逐次積分による結果を示す。この計算では時間刻み Δt を 0.05, $\alpha = -1$ (軟化), $\mu = 0.1$ を用いている。

図-9には図-8と同様柱上部質量水平変位の位相平面を示している。ここでは

(a)Case I : $u_0 = 0, \quad \dot{u}_0 = 0, \quad \varepsilon = 0.1$
 $\omega = \pi/8, \quad f = 0.4$

(b)Case II : $u_0 = 0, \quad \dot{u}_0 = 0.02, \quad \varepsilon = 0.1$
 $\omega = \pi/8, \quad f = 0.01$

(c)Case III : $u_0 = 0, \quad \dot{u}_0 = 0.02, \quad \varepsilon = 0.1$
 $\omega = \pi/2, \quad f = 0.01$

(d)Case IV : $u_0 = 0.035, \quad \dot{u}_0 = 0, \quad \varepsilon = 0.3$
 $\omega = \pi/8, \quad f = 0.2$

の4つの場合についての結果を示している。

図-9(a), (b)は図-8(a)と同様 Period Doubling の Limit Cycle の挙動を示しており, 非線形の影響が弱く

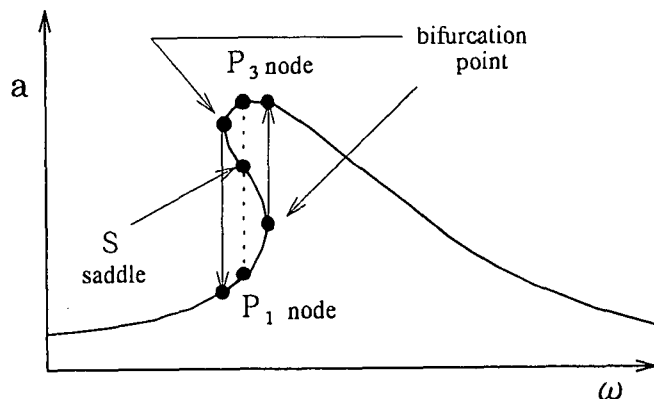


図-10 安定な周波数応答振幅

(Weakly nonlinear) 相似の応答となっている。図-9(b)と図-9(c)の違いは加振周波数の ω の違いによる影響である。図-9(d)の結果は軟化による変位応答の増大により一次的に外側に大きくふくらむ軌跡をとり、軟化を有する場合の特徴的な挙動となっている¹⁶⁾。

4.3 周波数応答曲線

式(30)は式(29)のように応答が周期軌道(Periodic motion)にはいり安定(Stable)になる条件として求められたものである。すなわち入力波の振幅と振動数が変化

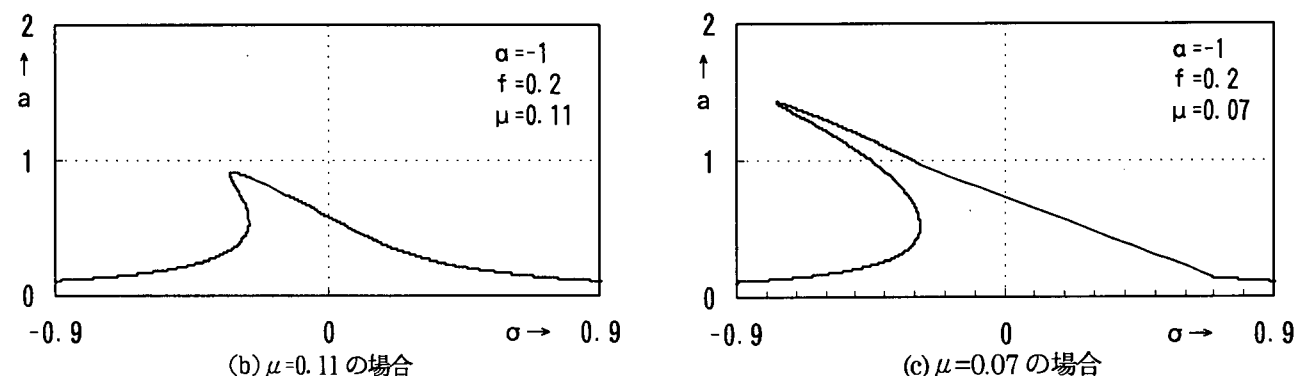


図-11 周波数応答曲線

する中で得られる応答振幅がどのように変化するかを見ることができる。特に Bifurcation Point(飛び移り点)の場合(図-10)には振動系のエネルギーのつり合いから応答振幅に飛び移りが発生し、応答性状が急激に変化することが知られている。

図-11 には式(30)より得られる応答振幅 a の結果を $\mu = 0.2, 0.11, 0.07$ の3つのケースについて示している。 $f = 0.2, \alpha = -1$ 。これらの結果より入力振幅を固定して振動系の減衰を小さくした場合に非線形性が強くなり応答曲線が左に傾くことから応答振幅の飛び移りは大きなことがわかる。

5. 結論

M- ϕ 曲線が軟化する柱部材の曲げ振動応答を Duffing 型振動方程式によりモデル化して、特徴的な振動応答挙動を数値計算により示した。

以上の解析から得られた結果を要約すれば以下のようになる。

- (1) M- ϕ 曲線が弱い軟化を示す場合の柱部材の振動応答を簡略にモデル化して Duffing 型振動方程式が得られた。
- (2) Duffing 方程式の位相平面を実際の橋脚部材の応答による位相平面と比較して、非線形性が弱い場合に相似な位相平面が得られた。
- (3) Duffing 方程式の入力振幅を大きくした場合には応答振幅が急激に拡大する状況が位相平面でも見られ

た。

- (4) Duffing 方程式の減衰効果を小さくしながら安定軌道に入る周波数応答曲線を求めた結果、減衰効果の減少とともに周波数応答曲線が傾き、非線形性の強くなる状況が定量的に明らかとなった。

以上の解析結果は実際の塑性化する橋脚の応答を正確に表現しているものではないが、M- ϕ 関係が軟化を有する場合には Duffing 方程式としてモデル化することができ、応答結果が複雑に変化する状況を数値的に示すことができた。実際の橋脚の弾塑性応答解析ではこれらの効果をできるだけ忠実にモデル化することが望まれる。

本研究の数値計算においては北見工業大学大学院の丹波郁恵氏の助力がありました。ここに感謝申し上げます。また本研究の一部は平成9年度文部省科学研究費(代表者大島俊之)の補助を受けて行われました。厚く感謝いたします。

参考文献

- 1) Nayfeh, A. H. : *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, 1981
- 2) Nayfeh, A. H., Mook, D. T. : *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, 1979
- 3) Nayfeh, A. H. : *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, 1973
- 4) Nayfeh, A. H. : *Problems in Perturbation*, John Wiley & Sons, 1985
- 5) Nayfeh, A. H., N. E. Sanchez : *Bifurcations in a Forced*

Softening Duffing Oscillator, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 24, No. 6, pp. 483-497, 1989.

- 6) 田辺忠顕：コンクリート構造解析法の最近の進歩，土木学会誌，Vol. 79, 6月号, 1994
- 7) 中村光，田辺忠顕：鉄筋コンクリートはりのポストピーク挙動に関する解析的研究，土木学会論文集，No. 490/V-23, pp. 81-90, 1994. 5
- 8) 加藤勉，秋山宏：強震による構造物へのエネルギー入力と構造物の損傷，日本建築学会論文報告集，第 235 号，pp. 9-18, 1975. 9
- 9) 秋山宏：建築物の耐震極限設計，第 2 版，東京大学出版会，1987
- 10) 岡村甫，前川宏一：鉄筋コンクリートの非線形解析と構成則，技報堂出版，1991
- 11) 日本建築学会：構造物の不安定現象と限界状態，応用力学シリーズ 1，丸善，1994
- 12) 大島俊之，三上修一，小倉裕介，佐藤昌志：段落し部を有する RC 橋脚の強震時非線形挙動とエネルギー分布，構造工学論文集，Vol. 41A, 1995. 3
- 13) 太田俊昭：構造物の非弾性解析，新体系土木工学 8，土木学会編，技報堂出版，pp. 90-91, 1980
- 14) 池田尚治，山口隆裕：地震による鉄筋コンクリート柱の動的応答に関する映像とシミュレーション，土木学会論文集，No. 451/V-17, pp. 139-149, 1992. 8
- 15) 大島俊之，三上修一，山崎智之，石川竊樹：歪軟化を有する構造の非線形振動応答解析，第 46 回応用力学連合講演会講演予稿集，pp. 229-300, 1996
- 16) 大島俊之，三上修一，山崎智之，小倉裕介，石川竊樹：M- ϕ 関係が部分軟化する柱部材の非線形曲げ振動応答解析における安定性の検討，土木学会論文集掲載予定，1998
(1998 年 4 月 24 日受付)