

剛体要素からなる粒状体の上界法とその応用 Upper Bound Method for Rigid Granular Materials

田村 武*, 小池 渉**, 桜井 義之***
Takeshi Tamura, Wataru Koike and Yoshiyuki Sakurai

* 正会員 工博 京都大学教授 工学研究科土木工学専攻 (〒 606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工修 日本電信電話株式会社

*** 学生会員 工学士 京都大学大学院

The fundamental mechanics of the assembly of rigid particles is clarified. In particular, the relationship between the upper bound theorem and the equilibrium conditions is mentioned in detail since the upper bound theorem is directly applied to solve the problem by using the linear programming method. Some numerical results are compared with those of a simple experiment by using Japanese coins.

Key Words: granular material, rigid-plasticity, upper bound, linear programming

1. 概説

砂や粉体などの粒状体の力学的挙動をモデル化する方法として 2 つの方法が知られている。1 つは、粒子の集合を連続体として見る方法であり、そこでは弾性論、塑性論など連続体力学の理論を通して運動や変形が解析される。Young 率などの巨視的な材料定数を仮定する連続体モデルでは、個々の粒子の運動は関知しない。したがって、得られた結果も巨視的な観点から考察される。一方、個々の粒子に作用する力に着目し、粒子自体の運動方程式の時間積分する方法がある。このモデルでは、個々の粒子の運動の把握が基本となる。両者の方法は、これまで長い間、研究されてきたが、近年の計算機の発達は、粒子からなるモデルの解析を大いに進展させた。たとえば、個別要素法^{1,2)}、粒状要素法³⁾ やそれらの改良モデルが地盤工学の分野でさかんに用いられている。しかしこの方法には、実際の砂などの粒子がかなり剛であることから、粒子の変形に関する材料定数の決定がかならずしも容易でないという欠点もある。たとうまく測定できたとしても、これは本質的に非線形接触問題であり 1 つの定数として扱うことは難しい⁴⁾。ところで粒状体全体の運動が個々の粒子の変形の結果とみるよりも、粒子間のすべりやころがりの結果と見なすことが自然な場合もある。すなわち、砂などを想定するとき、DEM などで仮定

されている粒子自体の変形はそれほど大きいものとは思われない。そこで本研究では、粒子を円形の剛体と仮定し、全体の運動は粘着力のみに支配される粒子の「すべり」と「ころがり」のみによって生じるとして塑性極限解析を行った。連続体モデルによる剛塑性解析はすでに開発されているが^{5,6)}、粒状体についてはほとんど見られない⁷⁾。以下では、その解析上の原理と例題および簡単な実験との比較を述べる。

2. 2 要素の場合

説明を簡単にするために、はじめに図-1 に示すような 2 つの剛体要素の準静的な運動について考察する。3. において、より一般的な場合を検討する。

2. 1 つりあい条件と適合条件

図-1 のような同じ大きさの半径 R をもつ 2 つの円形剛体要素の粒子が x 軸から α の角度で接触しているとする。粒子 2 には y 軸に平行な剛な板により荷重 P のもとで一定変位速度 $\dot{\delta} (> 0)$ を受ける。各要素の重心の速度と反時計方向の角速度をそれぞれ $\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{\theta}_i (i = 1, 2)$ とする。また、4 つの接触点における軸力とせん断力(接線方向の力)

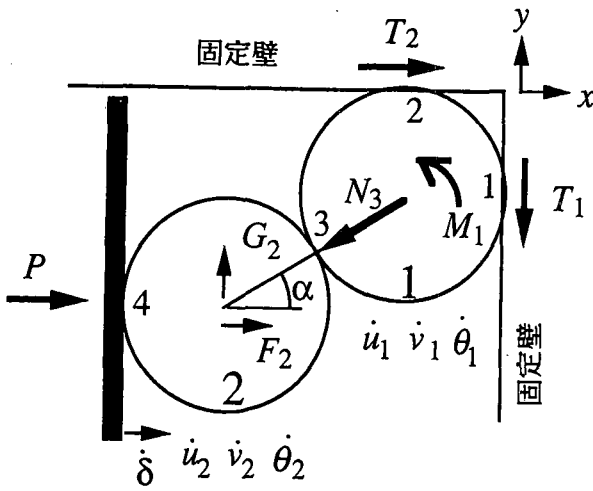


図-1 2つの剛体要素

を $N_j, T_j (j = 1, 2, 3, 4)$ とする。なお、軸力は圧縮を、また、せん断力は時計方向を正とする。要素2の x, y 軸方向の力のつりあい式は

$$\begin{cases} N_3 \cos \alpha - T_3 \sin \alpha - N_4 = F_2 \\ N_3 \sin \alpha + T_3 \cos \alpha - T_4 = G_2 \end{cases} \quad (1)$$

である。要素1, 2のそれぞれの重心回りの力のモーメントのつりあい式は

$$\begin{cases} R(T_1 + T_2 + T_3) = M_1 \\ R(T_3 + T_4) = M_2 \end{cases} \quad (2)$$

である。ここで F_i, G_i, M_i はそれぞれ各要素に作用する x, y 軸方向の外力および反時計方向のトルクである。また、載荷板の x 方向のつりあい式から

$$N_4 = P \quad (3)$$

を得る。なお、載荷板には y 方向にも力が作用するが、 y 方向の移動はないものとする。3種類のつりあい式をまとめて記すと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -1 & \sin \alpha & 0 \\ R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ P \end{pmatrix} \quad (4)$$

一方、幾何学的な条件（適合条件）を考える。粒子1の中心は移動せずに回転のみ生じる。要素1と2が接触を保つとき、重心間の相対速度は0なので

$$\dot{u}_2 \cos \alpha + \dot{v}_2 \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

でなければならない。また、載荷板の速度 $\dot{\delta}$ は要素2の速度 $\dot{u}_2$ と一致するので

$$-\dot{u}_2 + \dot{\delta} = 0 \quad (6)$$

が得られる。なお、式(5),(6)の左辺はともに距離が短くなる速さを表している。図-2のように「右ずれ」を正にとれば、要素間の相対すべり速度 $\dot{S}_j (j = 1, 2, 3, 4)$ はそれぞれ

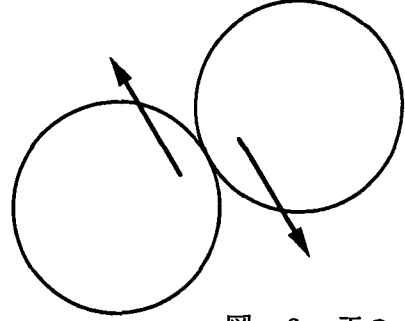


図-2 正のすべり方向

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = R\dot{\theta}_1 \\ \dot{S}_2 = R\dot{\theta}_1 \\ \dot{S}_3 = -\dot{u}_2 \sin \alpha + \dot{v}_2 \cos \alpha + R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{S}_4 = -\dot{v}_2 + R\dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (7)$$

と表される。これらを行列表示すると以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \dot{S}_1 \\ \dot{S}_2 \\ \dot{S}_3 \\ \dot{S}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & R & R & 0 \\ 0 & -1 & 0 & R & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} \quad (8)$$

2. 2 仮想仕事の式

上で求めた適合条件式(8)を

$$\mathbf{p} = D\mathbf{q} \quad (9)$$

と表せば、つりあい式(4)は

$$D^T \mathbf{r} = \mathbf{s} \quad (10)$$

のように同じ行列 D を用いて表すことができる。ここで2組のベクトル:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \dot{S}_1 \\ \dot{S}_2 \\ \dot{S}_3 \\ \dot{S}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} \quad (11)$$

および

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\delta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ P \end{pmatrix} \quad (12)$$

の成分の並びや符号には力学的双対性があることに注意しなければならない。

以上のことを用いれば簡単な内積の計算によって、この2要素の仮想仕事の式が導かれる。

$$\mathbf{s}^T \mathbf{q} = (D^T \mathbf{r})^T \mathbf{q} = \mathbf{r}^T (D \mathbf{q}) = \mathbf{r}^T \mathbf{p} \quad (13)$$

すなわち

$$P\dot{\delta} + F_2\dot{u}_2 + G_2\dot{v}_2 + M_1\dot{\theta}_1 + M_2\dot{\theta}_2 = \sum_{j=1}^4 T_j \dot{S}_j \quad (14)$$

が得られる。つりあい式(4)あるいは(10)を満たす任意の(静的可容な)力学系と、適合条件式(8)あるいは(9)を満たす任意の(運動学的可容な)速度場に対し、上記の仮想仕事式が成立することがわかった。

2. 3 上界定理

図-1に示す4つの接触点で発揮できる最大せん断力、すなわち、せん断強度を $C_j (j=1, 2, 3, 4)$ とする。当面の間、このせん断強度は接触点ごとの定数としておく。これはあたかも粘着力のような物理量を想定したことに匹敵するが、あるいは、「軸力 N_j に依存しない摩擦抵抗」と見てもよい。図-1に示すように要素2に一定外力 F_2, G_2, M_1, M_2 を作用させたまま、載荷板を強制的に既知の速度 $\dot{\delta}$ で移動させるために必要な外力 P を求めるような問題を設定する。そこでいま、1つの運動学的可容な速度場 $\mathbf{q}^T = (\dot{u}_2, \dot{v}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\delta})$ を任意に仮定したうえ

$$P\dot{\delta} + F_2\dot{u}_2 + G_2\dot{v}_2 + M_1\dot{\theta}_1 + M_2\dot{\theta}_2 = \sum_{j=1}^4 T_j(\dot{S}_j) \dot{S}_j \quad (15)$$

なる式を作る。ここで注意すべきは、右辺の $T_j(\dot{S}_j)$ である。これは以下のように定義される。

$$T_j(\dot{S}_j) = \begin{cases} C_j & (\dot{S}_j > 0) \\ -C_j \leq T_j \leq C_j & (\dot{S}_j = 0) \\ -C_j & (\dot{S}_j < 0) \end{cases} \quad (16)$$

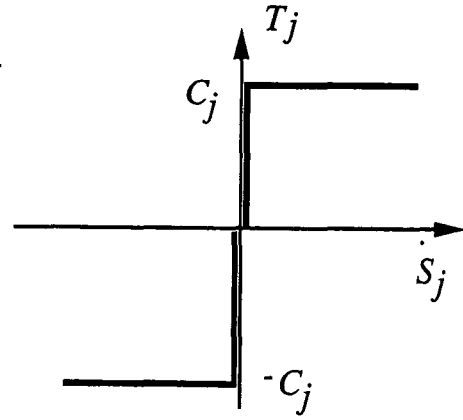


図-3 すべり速度とせん断力の関係

すなわち図-3のように正のすべりが生じているときには、そのせん断強度に等しい正の向きの(時計方向の)せん断力を、負のすべりが生じているときには、そのせん断強度に等しい負の向きの(反時計方向の)せん断力を、そしてすべりが生じていない場合にはその間のある大きさのせん断力を表す。上の定義を用いれば

$$T_j(\dot{S}_j) \dot{S}_j = C_j |\dot{S}_j| \quad (17)$$

と書くこともできる。さて可容な速度場を仮定すれば式(15)で P 以外の値はすべて計算できる。つまり、1つの速度場を与えれば、左辺の第2～5項も、また、右辺の値も既知となる。したがって、式(15)から P の値が計算されることになる。いわば、速度場 $\mathbf{q}$ の関数として載荷板に作用すべき力 $P(\mathbf{q})$ が1つ求められる。このとき上界定理は「こうして求めた力 $P(\mathbf{q})$ は、正解値 P^* の1つの上界であり、これを最小にする速度場を探すことによって正解が得られる」ことを主張する。その証明は以下のようにされる。

実際に動き出す状態、すなわち正解時の力の系： $\mathbf{s}^{*T} = (F_2, G_2, M_1, M_2, P^*)$ および $\mathbf{r}^{*T} = (T_1^*, T_2^*, T_3^*, T_4^*, N_3^*, N_4^*)$ はつりあい式(4)あるいは(10)を満たす。もちろん $|T_j^*| \leq C_j$ である。この静的可容な系と式(15)に代入した運動学的可容な系とで仮想仕事の式を作れば

$$P^*\dot{\delta} + F_2\dot{u}_2 + G_2\dot{v}_2 + M_1\dot{\theta}_1 + M_2\dot{\theta}_2 = \sum_{j=1}^4 T_j^* \dot{S}_j \quad (18)$$

となる。式(15),(18)の両辺を引き算すれば

$$(P - P^*)\dot{\delta} = \sum_{j=1}^4 (T_j(\dot{S}_j) - T_j^*) \dot{S}_j \quad (19)$$

であるが $\dot{\delta} > 0$ と、式(16)から導かれる

$$(T_j(\dot{S}_j) - T_j^*)\dot{S}_j \geq 0 \quad (20)$$

より

$$P \geq P^* \quad (21)$$

が明かとなる。なお、式(20)は式(16)より導かれるが、塑性論における「最大塑性仕事の原理」の特別な場合に相当する。

2. 4 上界定理の意味

適合条件式(8)の行列を分割して以下のよう
に書き改める。

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & W & \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^T & \mathbf{o}^T & 0 \\ -\mathbf{d}^T & \mathbf{o}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} \quad (22)$$

ここで

$$\dot{S} = \begin{pmatrix} \dot{S}_1 \\ \dot{S}_2 \\ \dot{S}_3 \\ \dot{S}_4 \end{pmatrix}, \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\theta} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

なる定義を用いた。式(22)の行列の中にある小行列の成分は式(8)より明かである。同様に、つりあい式(4)は

$$\begin{pmatrix} L^T & \mathbf{h} & -\mathbf{d} \\ W^T & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ M \\ P \end{pmatrix} \quad (24)$$

のように書ける。ここで

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

とする。式(22)は1次式であることから、1次の斉次式である式(15)を通して1つの可容な速度場 $(\dot{u}, \dot{\theta}, \dot{\delta})$ より P を求めるとき、あらかじめ

$$\dot{\delta} = 1 \quad (26)$$

と仮定しても一般性は失わない。すると式(15)より

$$P = [T(\dot{S})]^T \dot{S} - F^T \dot{u} - M^T \dot{\theta} \quad (27)$$

なる P を可容な速度場 $(\dot{u}, \dot{\theta})$ について最小化すればよい。この最小化の条件を考える。まず、式(17)の増分形の表現を行う。この右辺第1項は $\dot{S}_j = 0$ において明らかに微分不可能である。ところが式(16)の定義を考慮すれば、任意の $\dot{S}_j$ において

$$\Delta[T_j(\dot{S}_j)\dot{S}_j] = T_j(\dot{S}_j)\Delta\dot{S}_j \quad (28)$$

となることがわかる。これは絶対値関数が数学的な意味で微分可能となる意味ではなく、 $\dot{S}_j = 0$ では増分の確定値の代わりに、式(16)のようにとりうる値を限定したにすぎない。しかし、以下の演算では式(28)でも十分な役割を果たすことがわかる。

式(28)を用いると、最小化されたとき式(27)の P の増分 ΔP は

$$\Delta P = [T(\dot{S})]^T \Delta\dot{S} - F^T \Delta\dot{u} - M^T \Delta\dot{\theta} = 0 \quad (29)$$

を満たさねばならない。式(22)からわかるように

$$\Delta\dot{S} = L\Delta\dot{u} + W\Delta\dot{\theta} \quad (30)$$

であり、また、増分 $\Delta\dot{u}$ は

$$\mathbf{h}^T \Delta\dot{u} = 0, \quad -\mathbf{d}^T \Delta\dot{u} = 0 \quad (31)$$

を満たすものだけをとればよい。いいかえると、任意の $\Delta\dot{\theta}$ と式(31)を満たす任意の $\Delta\dot{u}$ に対し、式(30)を代入した式(29)の増分 ΔP は0でなければならない。実際、式(30)を式(29)に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta P &= -\left\{F - L^T T(\dot{S})\right\}^T \Delta\dot{u} + (W^T T - M)^T \Delta\dot{\theta} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

となる。まず、右辺第2項の $\Delta\dot{\theta}$ にはなにも制約条件がないので

$$W^T T(\dot{S}) - M = 0 \quad (33)$$

でなければならない。じつはこれは式(24)の2番目の式である。つぎに式(32)の右辺第1項であるが、 $\Delta\dot{u}$ の各成分は完全に独立ではなく、式(31)に示す2つの制約条件を満たさねばならない。ここで線形代数の定理：「行列 A に対し

$$A^T \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (34)$$

なる任意の $\mathbf{y}$ に対し、

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} = 0 \quad (35)$$

であることは

$$Ax = b \quad (36)$$

に解が存在することと等価である」を用いる。式(31)を

$$\begin{pmatrix} h^T \\ -d^T \end{pmatrix} \Delta \dot{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

と書き直し、これを満たす任意の $\dot{u}$ に対し

$$-\{F - L^T T(\dot{S})\}^T \Delta \dot{u} = 0 \quad (38)$$

であるためには2つの数 N_3, N_4 が存在して

$$N_3 h - N_4 d = F - L^T T(\dot{S}) \quad (39)$$

を満たすことが上記の定理からわかる。これはじつは式(24)の1番目の式である。いま、正解を与える可容速度場が既知となったとすれば、むしろ式(22)で $\delta = 1$ としたときの関係を満たす。式(27)に式(33)と(39)を代入し、さらに式(22)を用いれば

$$N_4 = P \quad (40)$$

を得る。これはじつは式(24)の3番目の式である。これで、上界値 P の最小値が求められたとき、つりあい式(24)が完全に満たされていることがわかった。また、式(27)が速度場 $(\dot{u}, \dot{\theta})$ に関して凸関数であることを用いれば、逆方向の推論が可能となる。すなわち、 P の最小化は系のつりあい条件と等価なのである。

3. $m \times n$ 要素の場合

図-4のような同じ大きさの半径 R をもつ $m \times n$ 個の円形剛体要素の粒子が規則正しく配列され、 x 軸から α の角度で接触しているとする。ただし m は偶数とする。左端の n 個の粒子には y 軸に平行な剛な板により荷重 P のもとで一定変位速度 δ を受ける。運動を始めたとき、粒子どうしの接触点是对角線方向のみとする。各要素の重心の速度と反時計方向の角速度をそれぞれ $\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{\theta}_i (i = 1, \dots, mn)$ とする。また、各接触点における軸力とせん断力を N_j, T_j とする。なお、軸力は圧縮を、また、せん断力は時計方向を正とする。各要素の x, y 軸方向の力のつりあい式、重心回りの力のモーメントのつりあい式および載荷板の x 方向につりあい式は

$$\begin{pmatrix} L^T & H^T & -D^T \\ W^T & O & O \\ o^T & o^T & 1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ M \\ P \end{pmatrix} \quad (41)$$

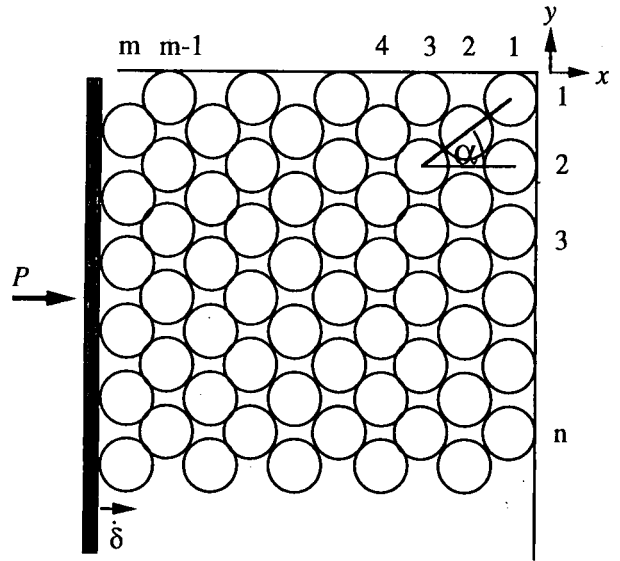


図-4 $m \times n$ 要素

と書くことができる。ここに

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ G_1 \\ F_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (42)$$

F, M はそれぞれ外力ベクトルおよびトルクからなるベクトルである。また N, N' はそれぞれ軸力のうち、載荷板と接点をもたない成分からなるベクトルおよび載荷板と接点をもつ成分からなるベクトルである。図-1では N_1, N_2 が両者にそれぞれ対応する。 1 の次元は、載荷板に接触する要素の数、すなわち、 n に等しい。なお、載荷板には y 方向にも力が作用するが、 y 方向へは移動しないものとする。また、各接触点における「右ずれ」を正にとることにして、すべての接触点におけるすべり速度を集めたベクトルを $\dot{S}$ 、各要素の重心の速度を集めたベクトルを $\dot{u}$ および各要素の反時計まわりの角速度を集めたベクトルを $\dot{\theta}$ 、すなわち

$$\dot{S} = \begin{pmatrix} \dot{S}_1 \\ \dot{S}_2 \\ \dot{S}_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dot{\theta} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (43)$$

とすれば、式(22)の第1式と同様な式：

$$\dot{S} = L\dot{u} + W\dot{\theta} \quad (44)$$

が得られる。すなわち、重心の速度と角速度から

接触点でのすべり速度を求めることができる。つぎに接触する2要素の重心間の距離は変化しないという条件を集めると

$$H\dot{u} = 0 \quad (45)$$

と書ける。また、載荷板に接触するすべての要素の x 方向の速度は $\dot{\delta}$ に等しいので

$$D\dot{u} = \dot{\delta}\mathbf{1} \quad (46)$$

と書ける。以上をまとめると

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & W & \mathbf{o} \\ H & O & \mathbf{o} \\ -D & O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} \quad (47)$$

のようになる。ここで注意すべきは式(22)と(24)の関係のように、式(41)と(47)でも同じ行列の転置行列が用いられていることである。ただし、式(41)と式(47)にあるベクトルの成分の並びや符号の定義には力学的な双対性を考慮しなければならない。

ただしこの場合にも、式(14)を導いたようにして

$$P\dot{\delta} + \mathbf{F}^T\dot{u} + \mathbf{M}^T\dot{\theta} = \mathbf{T}^T\dot{S} \quad (48)$$

なる仮想仕事の式が得られる。すなわち、つりあい式(41)を満たす任意の(静的可容な)力学系と、適合条件式(47)を満たす任意の(運動学的可容な)速度場に対し、上記の仮想仕事式が成立する。また、式(27)と同じ形式の上界値 P の計算式も得られる。

4. 線形計画法による数値解析

図-4に示す初期配列のもとで、載荷板を移動させるに必要な力 P とそのときの速度場 $\dot{u}, \dot{\theta}$ の計算方法を考える。上界定理から解くべき問題は

$$\begin{pmatrix} \dot{S} \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & W & \mathbf{o} \\ H & O & \mathbf{o} \\ -D & O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

の条件のもとで

$$P = [\mathbf{T}(\dot{S})]^T \dot{S} - \mathbf{F}^T \dot{u} - \mathbf{M}^T \dot{\theta} \quad (50)$$

を最小にすることである。なお、式(49)は式(47)で $\dot{\delta} = 1$ としたものである。先に繰り返し述べた

ように、最小化はつりあい式を満足させることにはかならない。したがって、この問題を解くためには、速度場 $\dot{u}, \dot{\theta}$ で表したつりあい式(41)を解けばよいことになる。実際、この方法は理論上は可能である。ただ、速度場を用いて表したつりあい式は線形ではない。式(17)を見ればわかるようにせん断力 T_j は相対すべり速度 S_j の絶対値の関数である。これが微分可能であれば、いわゆるNewton法などを用いることにより収束計算しながらつりあい条件を近似的に満たす方法が適用できる。それができないので、各接触点ごとにすべりの方向を仮定しながら、種々の場合分けをしなければならない。接触点の数が少ないときは簡単にできるが、多くなると実用的ではない。むしろ、つりあい式を直接に扱うよりは、もとの最小化の問題を線形計画法の枠組みのなかで対処する方がはるかに効率的である。なぜなら、解くべき問題は容易に線形計画法の問題に移行ができるからである。以下では、その手順を説明する。

線形計画法の標準形には種々のものがあるが、結局のところ x を変数ベクトルとして

$$\text{minimize } f = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o} \quad (51)$$

と等価となる。以下ではこれを標準形とよぶ。上記の P の最小化問題を標準形に直す。まず用いる変数は非負であるので

$$\dot{u}_{\pm} \geq \mathbf{o}, \quad \dot{\theta}_{\pm} \geq \mathbf{o}, \quad \dot{S}_{\pm} \geq \mathbf{o} \quad (52)$$

なる非負のベクトルを用いて

$$\dot{u} = \dot{u}_+ - \dot{u}_-, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_+ - \dot{\theta}_-, \quad \dot{S} = \dot{S}_+ - \dot{S}_- \quad (53)$$

のように表す。これらの表現では1つの左辺の各成分の値に対して右辺の2項の組み合わせは無限に多く存在するが、あとで適用するシンプレックス法によれば右辺の片方の成分の値はいつも0となることがわかる。つぎに目的関数には式(17)のような絶対値関数がある。同様にこれらも

$$P = \mathbf{C}^T(\dot{S}_+ + \dot{S}_-) - \mathbf{F}^T(\dot{u}_+ - \dot{u}_-) - \mathbf{M}^T(\dot{\theta}_+ - \dot{\theta}_-) \quad (54)$$

のように非負ベクトルからなる変数で表現できる。ここで $\mathbf{C}$ は、すべての接触点のせん断強度を並べ

たベクトルである。一方、制約条件式(47)は

$$\begin{cases} \dot{S}_+ - \dot{S}_- = L(\dot{u}_+ - \dot{u}_-) + W(\dot{\theta}_+ - \dot{\theta}_-) \\ \mathbf{o} = H(\dot{u}_+ - \dot{u}_-) \\ \mathbf{o} = -D(\dot{u}_+ - \dot{u}_-) + \mathbf{1} \end{cases} \quad (55)$$

となる。これで標準形にすることができた。さらに式(51)との関係をより明確にすると

$$x = \begin{pmatrix} \dot{S}_+ \\ \dot{S}_- \\ \dot{u}_+ \\ \dot{u}_- \\ \dot{\theta}_+ \\ \dot{\theta}_- \end{pmatrix} \geq \mathbf{o}, \quad c = \begin{pmatrix} C \\ C \\ -F \\ F \\ -M \\ M \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$A = \begin{pmatrix} I & -I & -L & L & -W & W \\ O & O & -H & H & O & O \\ O & O & D & -D & O & O \end{pmatrix} \quad (57)$$

なる対応を付ければよい。

5. 実験

粒状体に生じる速度場を観察するために10円硬貨の集合を用いて簡単な実験を行った。その手順は以下の通り。

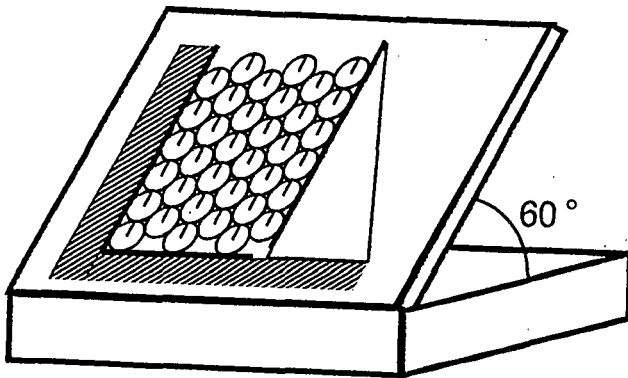


図-5 実験装置

- 1) 図-5に示すように(塩化ビニルの)平面の上に10円硬貨を規則的に敷き詰める。
- 2) 領域の左端、底部ではそれぞれ横方向、たて方向の変位は拘束される。
- 3) 領域の上端には応力は作用しない。
- 4) 上端を除く3辺の境界では硬貨との摩擦(粘着力)を増加させるため、ビニルテープを貼り付けた。
- 5) 以上の準備ののち、三角定規をすべらせながら右端の境界を左方にわずかだけ静かに移動

させた。

6) 硬貨の集まり全体の動きを写真に撮る。

この実験は、全体的な運動の特性を調べることが目的であって、三角定規が移動を始めるに必要な極限荷重の計測は行わない。また、同一の条件で何回か実験を繰り返したが、結果に大きな違いはなかった。

6. 摩擦角の測定

図-6に示すように2要素(10円硬貨)を用いて2種類の実験を行うことによって、要素間の摩擦係数と要素と境界との摩擦係数を測定した。まず1つは、右側にある境界を左方に押し出し、受働状態を作り出す。このとき要素2の水平方向の力のつりあい式は以下のである。

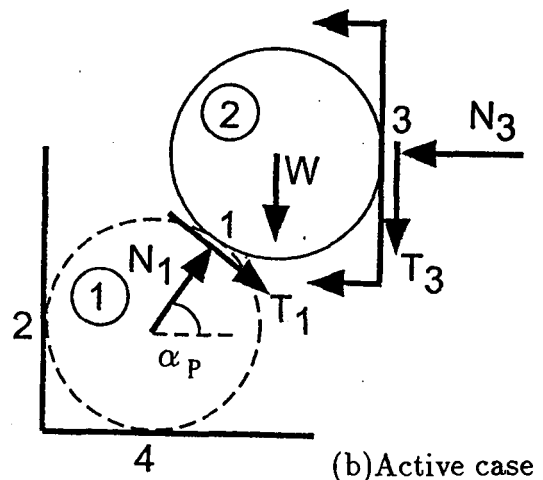
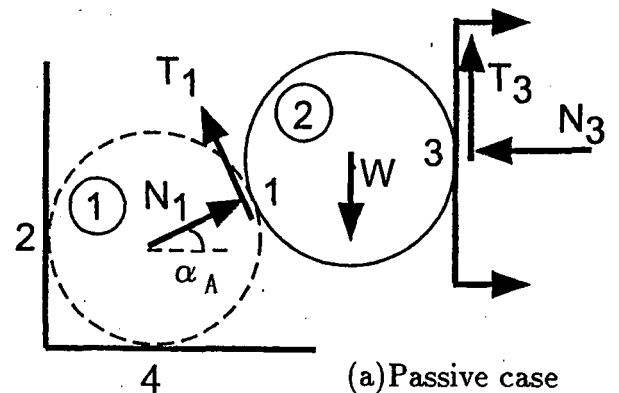


図-6 摩擦角の測定

$$N_3 = N_1 \cos \alpha + T_1 \sin \alpha \quad (58)$$

ここで N_1 , N_3 および T_1 はそれぞれ接点1, 3に作用する軸力および接点1のせん断力を表す。 α

は2つの要素の中心を結ぶ線分が水平線となす角である。この α を 30° から 80° まで種々変化させながら実験を行う。 α がある角度 α_P よりも小さい場合には接点3がすべり出す。逆に α が角度 α_P よりも大きい場合には接点1がすべり出す。つまり、 $\alpha = \alpha_P$ の場合には2つの接点が同時にすべり出すので

$$T_1 = N_1 \tan \phi_p, \quad T_3 = N_3 \tan \phi_w \quad (59)$$

が成り立っている。また、要素1の回転に対するつりあい式は

$$T_1 = T_3 (= T). \quad (60)$$

である。これらを式(58)に代入して T を消去すると

$$\frac{1}{\tan \phi_p} = \frac{1}{\tan \phi_w} \cos \alpha_P + \sin \alpha_P \quad (61)$$

を得る。まったく同様にして主動状態、すなわち、載荷板を右側に変位させることを考える。すると要素2の水平方向の力のつりあい式は

$$N_3 = N_1 \cos \alpha - T_1 \sin \alpha \quad (62)$$

となる。このときも α が α_A より小さければ接点3がすべり出し、逆に大きい場合には接点1がすべり出す。先の場合と同じように考えれば式(61)に対応する式

$$\frac{1}{\tan \phi_p} = \frac{1}{\tan \phi_w} \cos \alpha_A - \sin \alpha_A \quad (63)$$

を得る。式(61)と(63)から $\tan \phi_p$ および $\tan \phi_w$ を解くことができる

$$\tan \phi_p = \frac{\cos \alpha_A - \cos \alpha_P}{\sin \alpha_A + \sin \alpha_P} \quad (64)$$

$$\tan \phi_w = \frac{\cos \alpha_A - \cos \alpha_P}{\sin(\alpha_A + \alpha_P)} \quad (65)$$

となる。実際に実験すれば α_P と α_A はそれぞれ 65° および 55° となった。これらを上式に代入して、求める2つの摩擦係数が

$$\tan \phi_p = 0.875 \quad \tan \phi_w = 0.174 \quad (66)$$

であることが、さらに2つの摩擦角が

$$\phi_p = 5.0^\circ \quad \phi_w = 9.9^\circ \quad (67)$$

であることがわかる。一方、10円硬貨と斜面板との間の摩擦係数角 ϕ_f は、別の簡単な実験から 13° であることがわかった。

7. 実験と解析の比較

写真1は、もっとも密な状態に並べた30個の要素に対するものである。初期と変形後の両者を示す。図-7は、同じ条件に対して求めた計算結果である。数値解析で、先に記したように、せん断抵抗 C_j が一定として計算を進めるが

$$C_j = N_j \tan \phi_p \quad \text{or} \quad C_j = N_j \tan \phi_w \quad (68)$$

を満たすように、数回の繰り返し収束計算を行っている。

また、載荷板の変位と要素の運動とは非線形関係であるので、数値解析では2ステップに分けて変形場を計算した。これらを比較すればわかるように、両者の対応は十分、満足できるものであることがわかる。また、両者において明確なすべり線が生じていることも一致している。写真2と図-8は、96要素の場合の比較を示す。ここでも2ステップによって計算した。

8. まとめ

以上の考察の結果、以下のような結論が得られた。

1. 剛体要素からなる粒状体に対する上界定理とつりあい条件の関係が明らかになった。

2. 上界法に基づき定式化された問題は線形計画法により数値解析することができる。

3. 解析に必要な材料定数は簡単な実験により求めることができる。

4. 数値解析結果は10円硬貨を用いた実験をかなりの精度で再現できる。

今後、不規則な初期配置を仮定する場合、要素の大きさが異なる場合あるいはより多くの要素を含む場合などについて検討する予定である。

参考文献

- 1) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L. 1979. A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol.29, No.1, pp.47-65.
- 2) Hakuno, M. and Meguro, K. 1992. Simulation

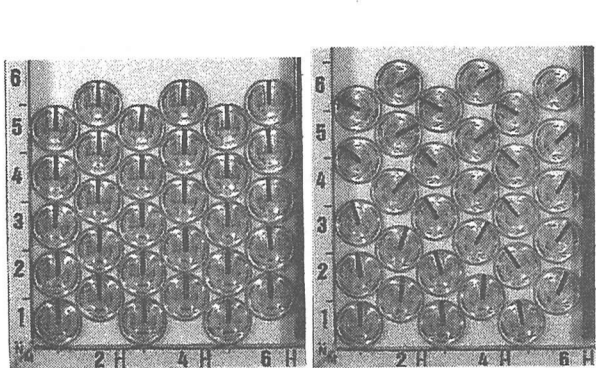


写真1 30要素の実験結果

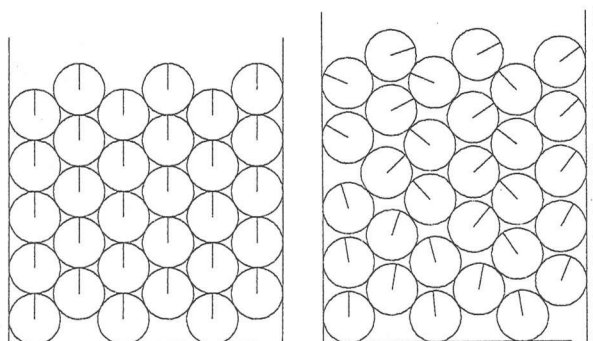


図-7 30要素の計算結果

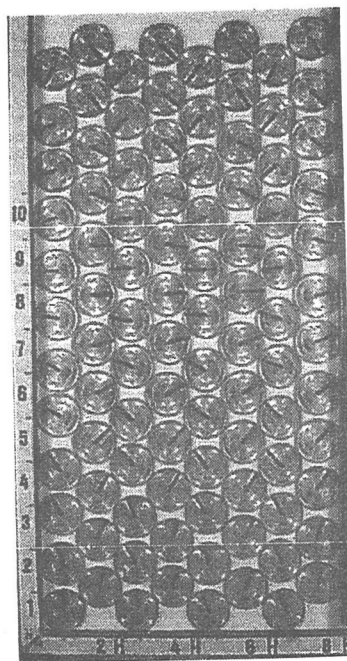
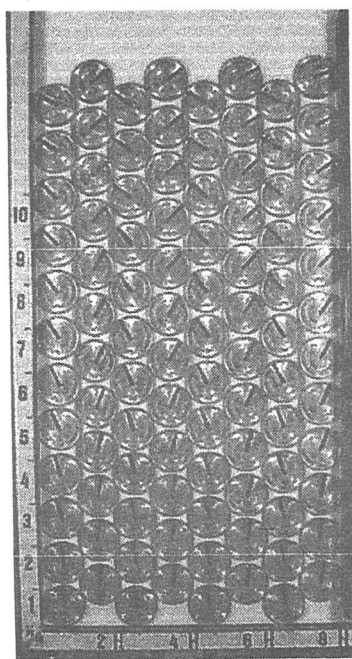
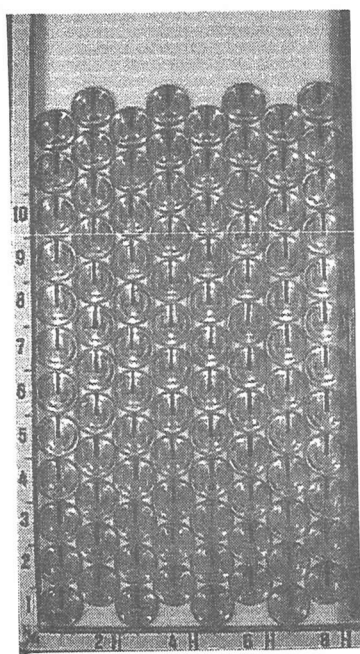


写真2 96要素の実験結果

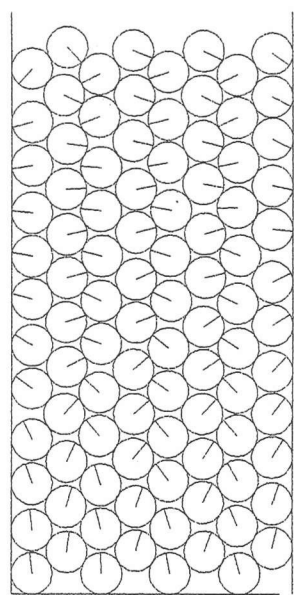
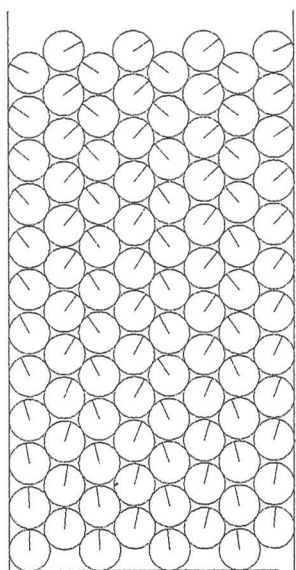
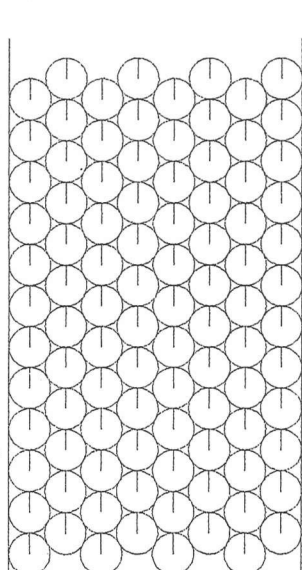


図-8 96要素の計算結果

of the collapse of concrete frame and volcanic eruption, *Advances in micromechanics of granular materials*, pp.321-330.

3)Kishino, Y. 1989. Investigation of the quasi-static behavior of materials with a new simulation method, *Proc. JSCE*, No.406/III-11, pp.97-106(in Japanese).

4)Nakase, H., Annaka, T., Katahira, F and Kyo-no, T. 1992. An application study of the distinct element method to plane strain compression test, *Proc. JSCE*, No.454/III-20, pp.55-64 (in Japanese).

5)Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T. 1984.

Limit analysis of soil structure by rigid plastic finite element method, *Soils and Foundations*, Vol.24, No.1, pp.34-42.

6)Tamura, T., Kobayashi, S. and Sumi, T. 1987. Rigid-plastic finite element method for frictional materials, *Soils and Foundations*, Vol.27, No.3, pp.1-12.

7)Tamura, T. and Yamada, Y. 1996. A rigid-plastic analysis for granular materials, *Soils and Foundations*, Vol.36-3, pp.113-121

(1998 年 4 月 24 日受付)