

1 質点構造物の非線形ランダム応答に関する数値解析的評価

Numerical Evaluation of Non-linear Random Response in S.D.O.F System

杉山毅*・西岡隆**

Tsuyoshi SUGIYAMA and Takashi NISHIOKA

*学生員 工修 筑波大学大学院工学研究科 (〒 305-0006 つくば市天王台 1-1-1)

**正会員 工博 筑波大学教授 構造工学系 (〒 305-0006 つくば市天王台 1-1-1)

In this paper, a newly developed method on random response analysis of the non-linear, but non-hysteretic systems subjected to nonstationary excitation is proposed. At first, Fokker-Planck equation for single-degree-of-freedom systems is derived, then local uniform grid refinement(LUGR) method is applied to solve numerically the Fokker-Planck equation. In order to examine the simulation capabilities of this method, numerical solutions of simple linear systems are compared with those obtained by the theory. Finally, several solutions for the earthquake response of non-linear systems are given, and the validity of the newly proposed method are verified.

Key Words : random response, Fokker-Planck equation, LUGR method

1. 序

建築構造物の終局的な耐震安全性を論ずる場合、地震動の不確定性と構造物の弾塑性応答を評価し、それら相互の関係を把握する手段が必要となる。計算機能力が発達した現在では、模擬地震動などを入力に用いた動的な非線形応答解析が盛んに行なわれ、統計的処理によって大局的な性状を判断する材料としてその結果を用いることが多い。このような計算によるモンテカルロ法的手法とは別に、ランダム振動理論を積極的に展開し、地震動に対する建築構造物の非線形ランダム振動を取り扱う方法もみられる。小堀等^{1),2)}や松島³⁾による方法では、マルコフベクトル法によって定常及び非定常なランダム入力に対する履歴系のランダム応答が評価された。マルコフベクトル法では、強震動を受ける構造物の履歴特性が、符号関数を含む適当な 1 価関数でモデル化され、応答の推移確率密度を決定する Fokker-Planck 方程式が解かれた。また和泉等⁴⁾の方法では、完全弾塑性型の履歴特性をもつ構造物の応答が、マルコフ連鎖確率モデルによって表現され、塑性流れの確率的な特性が定量的に評価された。履歴系のランダム応答は、荷重-変位平面上で分割された領域に対する応答位置の確率密度の推移として表され、推移マトリクスによって計算されている。また近年の成果としては Lin 等⁵⁾の文献に詳しい。

これらの方法の改善すべき点としては、マルコフベクトル法では Fokker-Planck 方程式の解析解を求めるために、履歴系モデルとして符号関数を含む 1 価関数を用いなければならない、より一般的な履歴系のモデルである bi-linear 型などの復元力特性を持つ系を定性的にしか論ずる事が出来ないことがあげられる。またマルコフ連鎖モデルによる方法では、推移マトリクスの決定に各領域の弾性応答の定常解を用いるため、分割された各領域に非線形性を仮定する場合に論議の余地を残している。

本研究は、上記のランダム応答解析の手法が持つ長所および問題点を考え、より一般的な履歴特性でモデル化された構造物のランダム応答を詳細に解析することを目指としている。この過程において、本論文は非線形応答の推移確率密度を決定する Fokker-Planck 方程式の数値解析解を、Blom 等^{6),7)}によって開発された LUGR 法で簡単かつ効果的に求める方法を提案し、その妥当性について検証を行った。解析中に用いられる構造物の復元力特性のモデルは、現在はまだ履歴性状を考慮していないため、解析で得られた結果の工学的な価値は必ずしも高くない。しかしながら、本論文で行ったランダム入力と応答非線形性の直接的な取り扱い、より本質的なランダム応答の理解につながるものと考えられる。

本論文は、上記のランダム応答解析の手法が持つ長所および問題点を考え、より一般的な履歴特性でモデル化された構造物のランダム応答を詳細に解析することを目指としている。この過程において、本論文は非線形応答の推移確率密度を決定する Fokker-Planck 方程式の数値解析解を、Blom 等^{6),7)}によって開発された LUGR 法で簡単かつ効果的に求める方法を提案し、その妥当性について検証を行った。解析中に用いられる構造物の復元力特性のモデルは、現在はまだ履歴性状を考慮していないため、解析で得られた結果の工学的な価値は必ずしも高くない。しかしながら、本論文で行ったランダム入力と応答非線形性の直接的な取り扱い、より本質的なランダム応答の理解につながるものと考えられる。

2. 解析手法

2.1 Fokker-Planck 方程式

解析にあたっては、構造物のモデルとして非線形復元力特性をもつ 1 自由度系が、基盤から地震入力をうけて振動する系を考える (図-1)。この系の基礎運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + \phi(x, \dot{x}) = f(t) \quad (1)$$

ここに x はランダム変位で、上つきの $\dot{\cdot}$ は時間に関する微分、 $\phi(x, \dot{x})$ は x と $\dot{x}$ の任意の関数を表す。地震入力を

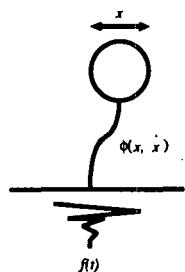


図-1 構造物モデル

表す $f(t)$ は、次のように地震強度の非定常性をあらわす包絡関数 $e(t)$ と、ランダム関数 $w(t)$ との積であらわれる。

$$f(t) = e(t)w(t) \quad (2)$$

式(2)において、 $w(t)$ を平均値 0、スペクトル密度 s_0 の定常ガウス型ホワイトノイズとし、状態変数を式(1)の $x, \dot{x}$ に選べば、時刻 t における $(x, \dot{x})$ の 2 次元推移確率密度 $p(x, \dot{x}; t)$ を決定する Fokker-Planck 方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{s_0}{2} e^2(t) \frac{\partial^2 p}{\partial \dot{x}^2} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (\phi(x, \dot{x})p) - \frac{\partial}{\partial x} (\dot{x}p) \} \quad (3)$$

解析は地震強度の非定常性を示す関数 $e(t)$ 、最大強度レベルを示す s_0 、および構造物の応答特性をあらわす $\phi(x, \dot{x})$ をパラメータとし、 $(x, \dot{x})$ の解析空間で式(3)を数値解析的に解いていく。地震動の不確定性と構造物の非線形復元力特性に対して、直接ランダム応答の特性が明らかにされる。このことは、従来多くの非線形応答解析が不確定性をもつ入力と動的応答の双方について計算機によるシミュレーションに頼り、数多くの計算から統計的にその特性を明らかにしようとするのに対して、より本質的なアプローチであると考えられる。すなわち、ランダム応答の推移確率密度は、それ自体が地震動のような不確定入力を受ける系の特性を示す。式(3)をより一般的な系で解くための本研究の試みは、以上のような動機付けによっている。

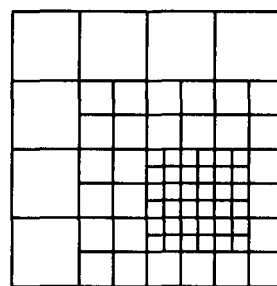
系に与えられる応答特性 $\phi(x, \dot{x})$ については線形粘性減衰と非線形 non-hysteretic 復元力特性を持つバネモデルを採用して、以下の形で与える。

$$\phi(x, \dot{x}) = 2h\omega_0 \dot{x} + g(x) \quad (4)$$

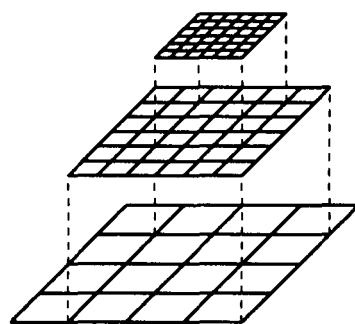
今回非線形バネ特性 $g(x)$ には塑性による履歴特性を与えていないため、構造物本来の特性を反映したものとはいえない。等価線形化法的な考え方によれば、これらの特性を取り入れることも可能である。

2.2 LUGR 法の概要

式(3)の非定常解を求める意義については前節で触れた。式(3)を数値解析的に求めるにあたって、本研究では偏微分方程式の差分解析ルーチン Local Uniform Grid Refinement(LUGR) 法を用いて解析を行っている。



(a) 副格子の部分的生成



(b) 細かい格子での解は粗い格子に書き込まれる

図-2 局所的な副格子の生成

数値解析の対象となる推移確率密度 $p(x, \dot{x}; t)$ は、応答の開始直後からしばらくは、 $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ 付近で、局所的に他の領域に比べて非常に大きな値を持ち、その他の領域では値がほぼ 0 となる。そのため偏微分方程式の差分解析を精度良く求めるためには、分布が集中する領域に対して、十分に細かい差分格子を準備する必要がある。しかしながら、このような領域にあわせて解析空間全体に等しく格子点を配分すると、計算時間および計算機の記憶容量に無駄が生じやすい。 $p(x, \dot{x}; t)$ はランダム入力の特性や復元力特性によって挙動が異なるため、計算を始める前に最適な格子配分を得ることは難しい。

LUGR 法は、有限差分解析において未知量の空間的変化が大きい領域には部分的に差分格子の再分割を行い、近似解の十分な精度を保ちながら数値解析に必要とされる記憶領域と解析に要する時間を効率良く節約するアダプティブ格子法の一つである。以下にそのアルゴリズムの概要を示す。

1. 有限差分解析にあたって、解析空間全体をベースとなる同一形状の矩形領域に分割し、その最も粗い格子から解析を開始する。
2. 時刻 t での解の値を初期値として、時間ステップ Δt 秒後の、格子上での積分値を求める。
3. 格子点上で新たに求められた時刻 $t + \Delta t$ での解に

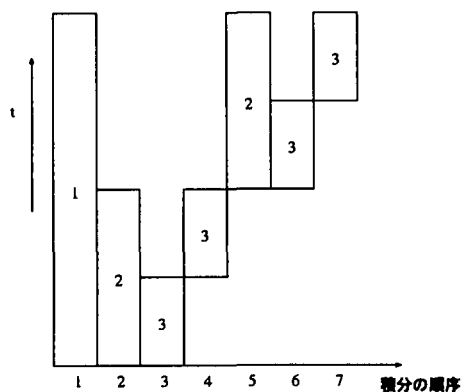


図-3 格子細分化と時間ステップ

ついて、ある設定された基準によって空間的变化が大きいと判断される格子点周りの領域を、各格子が等しく4分割されるように細分化する(図-2(a)).

4. 時刻 t にもどって、細分化によって形成された細かい格子の格子点について、

- 以前の時刻 t において同じ座標の格子点での解が求められているならば、その値を初期値とする。
- 新たに形成された格子点であれば、時刻 t での粗い格子の解から、細かい格子の初期値を補間する。

5. 細かい格子で、時刻 $t + \Delta t'$ までの積分を行う。 $\Delta t'$ は現在の格子レベルよりも一段階粗い格子の時間ステップ Δt よりも小さく取られ、複数のステップで一つ粗いレベルの時刻 $t + \Delta t$ での積分に到達する(図-3)。

6. 現在の格子レベルでの空間的变化を監視し、細分化の必要がなくなるまで3~6を繰り返す。

7. 細分化の必要がなくなれば、時刻 $t + \Delta t$ での解が求められる。この時、細かい格子の格子点が粗い格子と一致する場所では、粗い格子点の解は細かい格子で求められた解で上書きされる(図-2(b))。

8. 再び2に戻り粗い格子から始めて、解析の終了時刻 T まで逐次積分を実行する。

計算プログラムは、文献⁶⁾とともに公開されているソースコードをもとにして、本研究のために一部改良を加えたものを使用している。改良を施した点は、上に述べたアルゴリズムの3.において、各格子点上での空間的变化を監視するモニター変数の定義について変更を行った。文献においてはこの監視用のモニター変数は、解析時間 $[0, T]$ の間に解 $u(x, y)$ に期待される最大値 u_{max} を用いて、

$$(space\ monitor)_{i,j} : \frac{|\Delta x^2 u_{xx}(i, j)| + |\Delta y^2 u_{yy}(i, j)|}{tol\ u_{max}} \quad (5)$$

で与えている。ここに (i, j) は解析空間上で各格子点を示し、 $u_{xx}(i, j), u_{yy}(i, j)$ は2次精度の差分近似で与えられる格子点 (i, j) の2階微分である。また tol は細分化の起こりやすさを制御するために、場合に応じて値を与えられる定数で、これが小さいほど空間的变化の監視はより厳しい条件でチェックされる。このように定められるモニター変数が、ある定められた許容範囲よりも大きくなる場合には、対応する格子の細分化が行われる。

文献においては、式(5)の分母にあらわれる u_{max} は、解析中一定とされている。本解析で求められる推移確率密度はその最大値が大きく変動し、解の拡散性から時間の経過にしたがい最大値が小さくなる傾向がある。定義にしたがって運動の開始直後での解の最大値を u_{max} として選べば、拡散が進んだ時に格子細分化の基準が相対的に緩やかになり、結果として十分な格子細分化が起らず、計算精度に関して不都合が生じる。一方もとの定義を離れて、運動開始から時間が経過したときの最大値の予測値を u_{max} として選んだ場合、今度は運動開始直後の格子細分化の基準が厳しくなり、計算機の記憶容量や計算時間の面で負荷が高い。

そこでもとの基準の与え方に照らし合わせて、式(5)の u_{max} を、空間的变化が評価される時刻 $t + \Delta t$ より一つ前の時間ステップで導かれた最も粗い格子上での解の最大値 u'_{max} で逐次置き換える。

(new space monitor) $_{i,j}$:

$$\frac{|\Delta x^2 u_{xx}(i, j)| + |\Delta y^2 u_{yy}(i, j)|}{tol\ u'_{max}} \quad (6)$$

これにより解の変動によって時間ステップごとに修正された格子細分化の基準が与えられ、精度とコストの両面からみて、より有効に結果が得られるようになる。

2.3 実行例

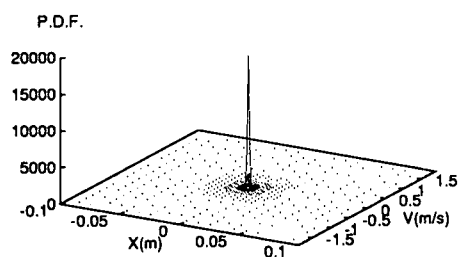
前節に述べた通り一部改良を施したLUGR法の解析ルーチンを用いて計算を行った場合の、解析における格子細分化の過程を見るために、解析の一例を図-4に示した。ここではLUGR法によって求められた推移確率密度 $p(x, \dot{x}; t)$ を時刻 $t = 0.01, 0.1, 1$ について示した。図の右側がそれぞれの時刻で用いられた差分格子である。ここで最も粗い格子の変位及び速度方向の格子幅 $\Delta x, \Delta \dot{x}$ は、各解析範囲の20等分としている。細分化が必要になった場合、格子レベルが一つ上がるごとに格子幅は1/2になる。

ここで(3)および(4)に対して用いられたパラメータは以下の通りである。

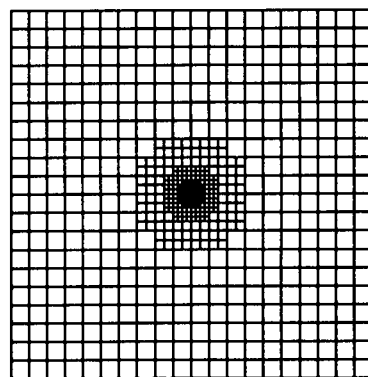
$$s_0 = 0.01,$$

$$e(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{単位階段関数}),$$

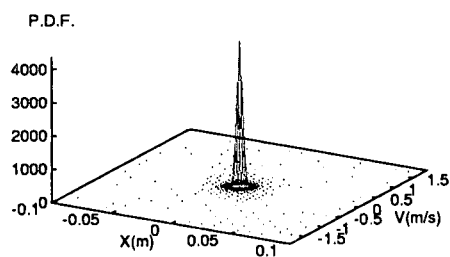
$$\omega_0 = 2\pi$$



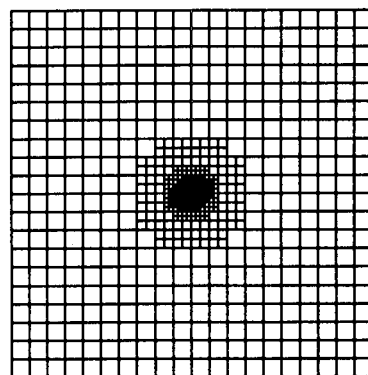
(a)



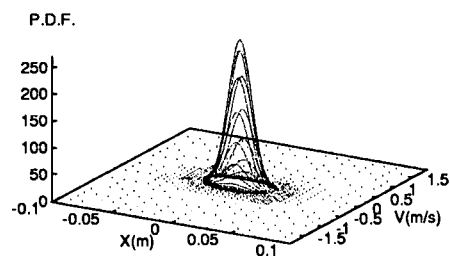
(b)



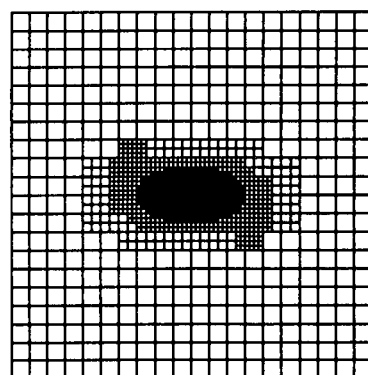
(c)



(d)



(e)



(f)

図-4 計算例：格子細分化の様子

(a), (b): $t=0.01$
(c), (d): $t=0.1$
(e), (f): $t=1.0$

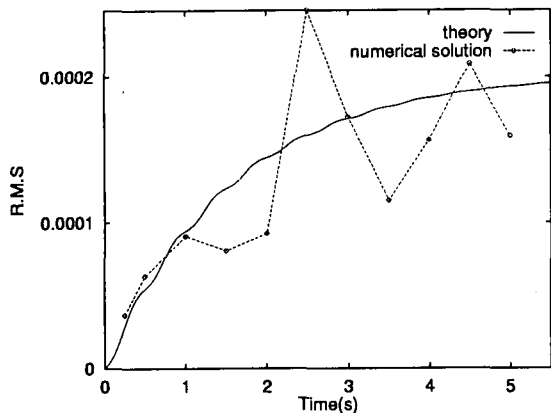


図-5 理論解との比較

$$g(x) = \omega_0^2 x \quad (\text{線形系})$$

$$h = 0.05$$

推移確率密度の初期条件は、原点で無限大の値を持つ2次元のDiracの δ 関数 $\delta(x, \dot{x})$ にかわって、 $\sigma_x, \sigma_{\dot{x}} \ll 1$ の2次元ガウス分布を用いて次のように与えた。

$$p(x, \dot{x}; 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right] \quad (7)$$

図-4の結果は、一見すると時刻が進むにつれてより広い領域で細かい格子が必要とされるように見えるが、ここでは表示の都合上、細分化された格子は格子レベル4(最も粗い格子の $\frac{1}{8}$ の大きさ)までしか図示していない。実際に各時刻で必要とされた最も小さい格子幅は、 $t = 0.01, 0.1, 1.0$ それぞれに対してレベル $8(\frac{1}{128}), 7(\frac{1}{64}), 5(\frac{1}{16})$ となっている。ここでは時刻 t が進むにつれて、最初は局所的だった推移確率密度が次第に解析空間の全体に拡散していく過程で、LUGR法によって細分化された差分格子が解の形状にあわせて配分されていることがわかる。

3. 解析結果

3.1 線形理論解との比較

この節ではまず提案された本論文の方法による数値解析解と、線形系ランダム応答における理論解との比較を行い、解析の妥当性を検証する。式(1)の運動方程式において、線形系ランダム応答の理論解は系の復元力特性に線形性を仮定し、 $t = 0$ での静止状態から突然作用する平均0、パワースペクトル密度 s_0 のホワイトノイズの過渡応答解で与えられる。このとき応答の2乗平均変位 σ_x^2 は、線形粘性減衰をもつ系に対して次のように与えられる。

$$\sigma_x^2 = \frac{s_0}{4h\omega_0^3} [1 - e^{-2h\omega_0 t} (1 + 2\varepsilon^2 \sin \omega_0' t + \varepsilon \sin 2\omega_0' t)] \quad (8)$$

ここに $\varepsilon = h/\sqrt{1-h^2}$, $\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1-h^2}$ である。

パラメータとしては減衰定数 $h = 0.05$ 、パワースペクトル密度 $s_0 = 0.01$ 、系の固有周期 $T = 1$ に選び、継続時間を5とした場合の過渡応答を想定する。理論解は上の式(8)とし、数値解析解の2乗平均変位に関しては以下のように近似する。

$$\sigma_x^2 = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 p_{ij} \Delta x \Delta \dot{x} \quad (9)$$

ここに i, j は等間隔格子上の座標点であり、 p_{ij} はその点での数値解、 $\Delta x, \Delta \dot{x}$ はそれぞれ格子の分割幅である。

結果は図-5の通りである。ここで求められる数値解析解は理論解と完全に一致しないまでも、滑らかに変化する理論解と同様の性状をもった曲線となることが期待されたが、残念ながらそのような精度の高い一致を見ることができない。

表示した結果以外にもいくつかのケースを取り扱ってみたが、図-5と同様に結果は理論解とは一致せずバラツキを持つことがほとんどであった。

一方、図-6には上記と同じパラメータを持つ系が定常状態になった時に、推移確率密度に期待される2次元のガウス分布を、式(8)から分散を決定し表示した。同時に図-7には十分長い時間が経過した後の本解析法による推移確率密度の解析結果を示した。両者はほと

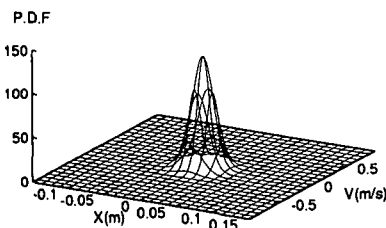


図-6 理論解による推移確率密度

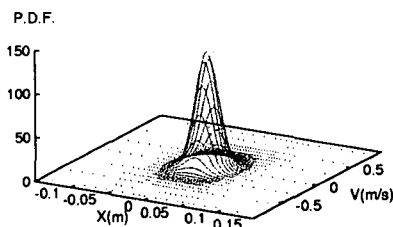


図-7 数値解による推移確率密度

んど同じ分布形状をもっているため、これらから求められる各々の2乗平均変位について、先の結果のような相違が出ることは一見したところでは考えにくい。

しかしながらここで本解析法の格子細分化過程における監視用のモニター変数を定義した時の考えによれば、差分格子の細分化は主に空間的変化の大きな領域が対象となるから、細分化の対象になりにくい原点から離れた領域では、誤差の蓄積が起りやすかったのではないかと考えられる。そのような数値解析解の誤差が2乗平均値を求めるにあたって変位 x の2乗の項によって拡大された結果、分布形状はほぼ一致しながらも、2乗平均変位では理論解との不一致が起こったと考えられる。

2乗平均変位の意味では理論解との精度の高い一致を見なかったが、図-6,7などから本解析法により求められた推移確率密度は定性的には線形系のランダム理論に見あった結果となっている。このことから、解析中の誤差評価法などに改善の余地が残されるものの、提案された解析法がFokker-Planck方程式によるランダム応答の評価に応用できることが確認された。

3.2 定常入力に対する非線形応答

以下の2節ではより具体的な解析への応用を試みる。前節からわかったように、解析中に含まれる誤差の伝播について未知の領域を残すため、解析後の結果を定量的に評価することはむずかしい。しかし任意のnon-hystereticな非線形特性をもつ系が容易に解析できる本手法の有意性を示すことは可能であると考え、ここでは構造の応答に非線形特性を仮定し、次節では非定常入力を加えた場合についていくつかの解析を行ってみる。

系の非線形復元力特性として図-8のような変位量に応じて2段階の非線形弾性応答特性を持つbi-linear型non-hysteretic復元力特性を定義する。

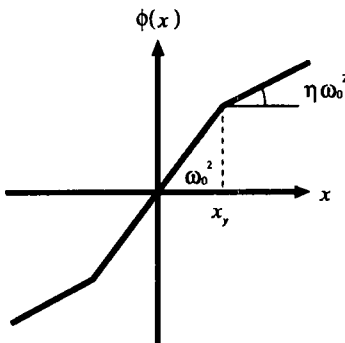


図-8 bi-linear型non-hysteretic特性

復元力特性は変位が $x = \pm x_y$ を越えて進む場合第1分枝剛性の η 倍だけ剛性が低下する。変位が戻る場合は

履歴性状を示さず、もときた経路をたどって原点に戻る。したがって一般的なbi-linear型履歴復元力特性とは異なり残留変位が現れる事は無く、履歴減衰をもたない。このような特性を持つ系に対して、第1分枝剛性の固有周期を3倍した継続時間をもつ定常ホワイトノイズを与えた場合に、解析で得られる2次元推移確率密度から、変位 x についての1次元の確率密度を求めたのが図-9である。パラメータは、(a)~(c)の各グラフで着目されるパラメータ以外のものについては、それぞれ $s_0 = 0.01$, $x_y = 0.01$, $\eta = 0.0$ に固定して解析を行った。

図-9(a)ではランダム入力の強度が高くなるにつれ、非線形応答特性をもつ系の変位分布は正規性を失い、解析空間に広く分布する様子が表された。図-9(b)では、第1・第2分枝剛性比 η の変動で、系の見かけの剛性が低下する $\eta = 0$ や $\eta = 0.5$ の場合に、線形系と比べて分布が広がる様子がわかる。また図-9(c)では、第1・第2分枝剛性が変化する位置 x_y が0.02と0.03の場合では、分布がほぼ重なりあっており、bi-linear型non-hystereticモデルのごとき非線形弾性応答においては、入力レベル s_0 に応じて応答がほぼ線形応答する場合と、非線形領域にいたる場合とがあることがわかる。

各々の結果をさらに具体的に考察するには、得られた確率分布から諸量を導出し、定量的に評価する事が必要である。しかしながらこれらの結果はすべてFokker-Planck方程式で各パラメータが直接評価されて得られるものであり、提案された解析法は非線形ランダム応答の性状を明らかにすることを可能にしている。解精度の向上によって、結果の定量的な評価が可能となり、解析はより有用性を増すものと考えられる。

3.3 非定常入力に対する応答評価

最後にランダム入力に対して2.1節で定義を行った包絡関数 $e(t)$ について適当な形状の関数を与え、非定常入力に対するランダム応答解析を行う。

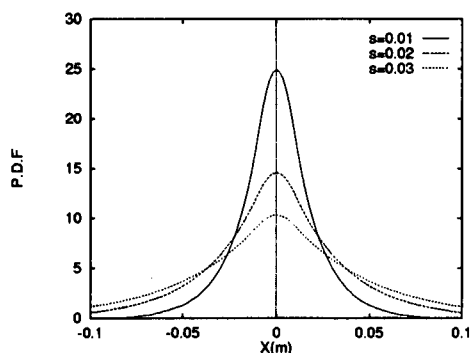
ランダム入力の非定常性を表す包絡関数としてはここでは半波正弦波を用いて解析を行う。非定常入力の持続時間を T_d として包絡関数 $e(t)$ を次のように与える(図-10)。

$$e(t) = \sin(\pi t/T_d) \quad (10)$$

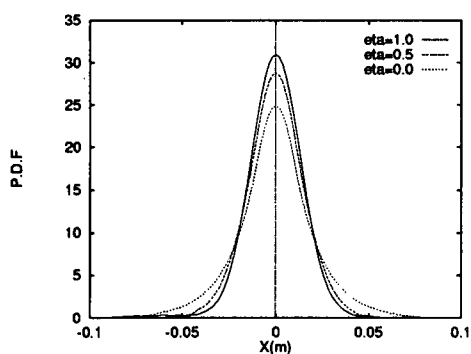
ランダム入力 $w(t)$ のパワースペクトル密度 s_0 とともに包絡関数 $e(t)$ をFokker-Planck方程式に導入し解析を行う。

構造物の応答特性はここでは固有周期 $T = 1$ の線形系を用いたが、これまでの論議から明らかのように、前節で用いたような非線形応答特性であってもかまわない。非定常入力の持続時間 T_d は10とし、解析で得られた推移確率密度を、時刻ごとの変位分布で整理した結果を図-11に示す。

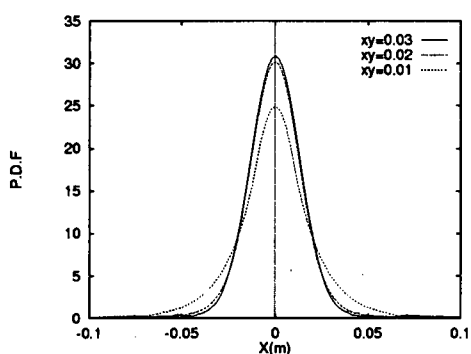
結果をみると、グラフむこう側から手前側に時刻が



(a) 入力レベルを変化させた場合



(b) 第2分枝剛性を変化させた場合



(c) 第1・第2分枝剛性位置の移動させた場合

図-9 非線形系における変位分布特性

進む過程で、時刻 $t = 5$ でピークをもつ包絡関数 $e(t)$ の特性にしたがって、解析で求められた変位分布もこの時刻近辺で最も広い分布となる。その後入力の減衰によってもなると、系の線形粘性減衰によって応答が再び初期状態に戻ろうとする様子が変位分布を通して明らかとなっている。

図-12では、時刻 $t = 10$ における本解析で得られた数値解と、同じ特性を持たせた系をモンテカルロ法によって計算し、変位分布を求めた結果とを比較した。解析空間全体に渡って数値解とモンテカルロ解とはよい

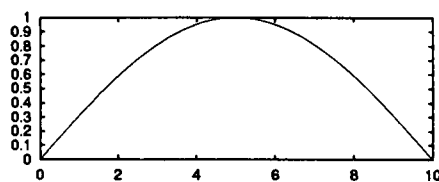


図-10 包絡関数 $e(t)$

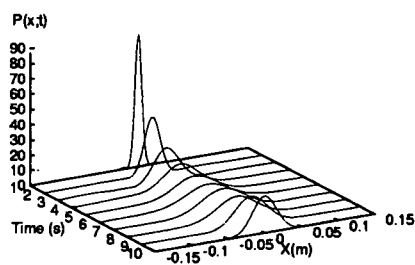


図-11 非定常入力に対する線形系の変位分布特性

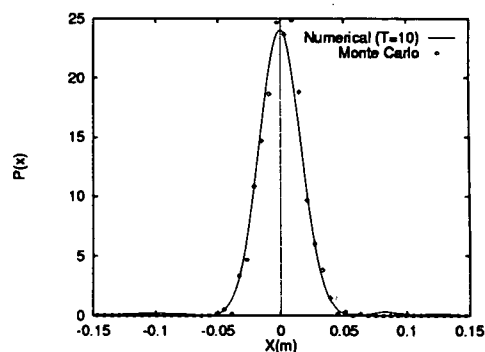


図-12 数値解とモンテカルロ解との比較

一致を示している。このことから本研究の手法が非定常入力を加味した系についても利用できる事が示された。

4. あとがき

本論文はランダムな入力をうける構造物の応答を評価する一手法を提案した。ランダム応答の推移確率密度を決定する Fokker-Planck 方程式を解くために、独自の視点による数値解析法を提案し、その方法に基づいて実際の解析例を示し、妥当性を検証した。本解析法によって得られた解は、誤差評価などにおいて未知な部分を含むため、例えば線形の定常応答解についても解析精度の面で十分な結果を導くことが出来なかった。また現段階では地震時における構造物の応答をモデル化する履歴復元力特性を加味することが出来ない。しかしながら現段階においても、

1. LUGR 法によって Fokker-Planck 方程式を数值的に解いた本手法は、外乱および応答の諸特性をパラメータとして容易に取り扱い解析を行うことが可能で、構造物の応答特性を評価する直接的な方法であること。
2. 解析で得られた結果は線形理論解と比較しても、定性的に十分構造物のランダム応答を評価し得ること。

などの点において意義のあるものであり、今後の解析の可能性を示したものであると考える。

参考文献

- 1) 小堀鐸二・南井良一郎・浅野幸一郎: 履歴塑性変形領域における 1 質点構造物の定常ランダム応答について, 日本建築学会論文報告集, 第 226 号/pp.29-37,1974

- 2) 小堀鐸二・南井良一郎・浅野幸一郎: 履歴塑性変形領域における 1 質点構造物の非定常ランダム応答について, 日本建築学会論文報告集, 第 241 号/pp.55-63,1976
- 3) 松島豊: ホワイトノイズを受ける 1 自由度系の非線形ランダム応答, 日本建築学会論文報告集, 第 255 号/pp.17-23,1977
- 4) 和泉正哲・木村正彦: 振幅非定常入力を受ける履歴系のランダム応答解析, 日本建築学会論文報告集, 第 335 号/pp.15-21,1984
- 5) Lin, Y.K., Cai, G.Q.: "Probabilistic Structural Dynamics", McGraw-Hill, Inc., 1995
- 6) Blom, J.G., Verwer, J.G.: "VLUGR: A Vectorized Local Uniform Grid Refinement Code for PDEs in 2D", Centre for Mathematics and Computer Science, NM-R9403, 1994
- 7) Trompert, R.A.: Local uniform grid refinement for time-dependent partial differential equations, Centrum voor Wiskunde en Informatica, CWI TRACT 107, 1995

(1998 年 4 月 24 日 受付)