

ディジタルフィルタを内蔵した時間積分法

Proposal of Digital-Filtering Time-Integration Scheme

本田利器*・澤田純男**

Riki HONDA and Sumio SAWADA

*正会員 工修 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

**正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

High frequency noise sometimes triggers computational instability in the dynamic response analysis of a high-degree-of-freedom nonlinear system, such as a dynamic nonlinear FEM analysis. This paper proposes a new time integration scheme that eliminates high frequency noise by a digital filter. In this scheme, digital filtering is performed as a part of the time integration process. This paper describes a theory and a computational process of the scheme, as well as required conditions. There is little condition for the frequency characteristics of a filter and in this paper two recursive filters are introduced. The applicability of the scheme is also discussed and it is shown that this scheme is applicable to a linear acceleration method but that further study is required for its application to a central difference method. Effectiveness of the scheme is shown through the comparison of dynamic response analyses of a simple nonlinear system with / without proposed scheme.

Key Words : time integration scheme, digital filter, computational stability, non-linear analysis

1. はじめに

地震応答解析のような時間領域の動的解析において最も計算を困難とする現象は、解の発散である。特に、有限要素法に代表されるような自由度の大きい非線形動的解析では、何らかの要因で生じた高周波ノイズがトリガとなり、それが成長して解を発散させる場合がある。

そのような場合の対処方法としては、空間的なフィルタリングによる短波長成分の除去¹⁾や、Rayleigh 減衰等の減衰の導入による高周波成分の除去、等による計算の安定化が図られることが一般的である。しかし、前者は、多次元の格子状に設けられた点を用いた計算の場合以外には適用が困難である。また、後者の場合、与えられる減衰の周波数依存性が限定される、意図しない周波数帯においても減衰を付加することになる、等の制約がある。

本研究では、対象とする問題の空間的配置に依存せず、また、除去する周波数領域を明確に定義できる手法として、時間積分を行う過程において同時にディジタルフィルタを施すことにより、高周波成分を除去する手法 (Digital-Filtering Time-Integration Scheme, 以下、「DFTI 法」という) を提案する。本手法は、解析過程において、あらかじめ設定したフィルタを施すものであるため、その周波数特性等を明確に定義できるという特徴がある。

2. 理論的背景

本節では、まず z 変換およびディジタルフィルタについて述べ、これらに基づく計算手法である DFTI 法の基本的な計算プロセスについて述べる。

2.1 z 変換

ディジタルフィルタについて述べる前に、まず、 z 変換について簡単に述べる。 z 変換は、いわば離散化されたラプラス変換に相当し、ある数列 (時系列) $\{x(n)\}$ の z 変換を $\{X(z)\}$ とすると、これは、

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n)z^{-n} \quad (1)$$

と与えられる。(和をとる範囲を $n = 0.. \infty$ としたもの片側 z 変換として、上式で定義される (両側) z 変換と区別することもある。ただし、 $\{x(n)\}$ としてインパルス応答関数のように $n < 0$ で $x(n) = 0$ となる数列を与えた場合には両者は明らかに同一となる。以下では片側 z 変換を想定する。) また、 z 変換の逆変換は次式で与えられる。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c X(z)z^{n-1}dz \quad (2)$$

ただし、 c は積分路であり、原点を含み、左周りを正にとった任意の閉曲線である。

z 変換の諸性質²⁾については省略するが、以下で用いる性質として 2 点のみ記す。

- 1) 式 (1) において z に $e^{i\omega\Delta t}$ (Δt はサンプリング時間間隔に相当する。) を与えた場合、(離散化された) フーリエ変換を与える。これは、定義式から明らかである。
- 2) 時間的に ℓ だけシフトさせた数列 $\{x(n-\ell)\}$ の z 変換 $\{X'(z)\}$ は次式で与えられる。(片側 z 変換の場合も、 $n < 0$ で $x(n) = 0$ となることを用いれば同一の結果になる。)

$$\begin{aligned} X'(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n-\ell)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n)z^{-n-\ell} \\ &= z^{-\ell}X(z) \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 デジタルフィルタ

デジタルフィルタは、時系列 $\{x_n\}$ をある系への入力とし、その出力として $\{\tilde{x}_n\}$ を与えることにより、その系の応答特性 (伝達関数) に相当するフィルタを施した時系列 $\{\tilde{x}_n\}$ を算出するものであるといえよう。(以下、フィルタを施された数列を $\sim$ を付して表す。) $\{\tilde{x}_n\}$ は、 $\{x_n\}$ と、その系のインパルス応答時系列 $\{h_n\}$ との重畳積分により算出される。応答時系列として有限長の時系列を用いる場合、これを FIR (Finite Impulse Response) フィルタといい、 $\{\tilde{x}_n\}$ は、インパルス長から 1 を減じた整数 M を用いて

$$\tilde{x}_n = \sum_{i=0}^M a_i x_{n-i} \quad (4)$$

で与えられる。一方、応答時系列として無限長の時系列を用いる場合は IIR (Infinite Impulse Response) フィルタと呼ばれる。この場合、フィルタを施した数列の各項の算出に、その直前の有限個の項を再帰的に用いることにより、無限長のインパルス応答を評価することになる。 $\{\tilde{x}_n\}$ は、再帰的に用いる項数を N として、

$$\tilde{x}_n = \sum_{i=0}^M a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i \tilde{x}_{n-i} \quad (5)$$

という巡回型の式で与えられる。ここで、式 (4) 及び (5) を z 変換すると、 $\{x_n\}$ 、 $\{\tilde{x}_n\}$ の z 変換をそれぞれ $X(z)$ 、 $\tilde{X}(z)$ として、

$$\tilde{X}(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} X(z) \quad (6)$$

$$\tilde{X}(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} \tilde{X}(z) \quad (7)$$

となる。伝達関数 $H(z)$ は、

$$H(z) = \frac{\tilde{X}(z)}{X(z)} \quad (8)$$

であたえられるので、式 (4) 及び (5) で表されるフィルタの伝達関数 $H(z)$ は、それぞれ、

$$H(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} \quad (9)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad (10)$$

と求められる。したがって、このフィルタの振幅 $Amp(\omega)$ 及び位相 $\theta(\omega)$ の周波数特性は、 $H(z)$ に $z = e^{i\omega\Delta t}$ を代入して得られる関数を $H(\omega)$ として、それぞれ、

$$Amp(\omega) = |H(\omega)| \quad (11)$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(H(\omega))}{\text{Re}(H(\omega))} \right) \quad (12)$$

となる。一般に $\theta(\omega)$ は 0 ではないため、これらのフィルタを施すことにより時系列に時間遅れ (遅延時間) が生じる。遅延時間 $\tau(\omega)$ は、

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta}{d\omega} \quad (13)$$

で与えられる。

FIR フィルタは、 $a_i = a_{M-i}$ ($i = 1, 2, \dots$) を満たす時、遅延時間が周波数依存性を有しない、完全に定遅延なフィルタを与え、この場合、遅延時間は $\tau = (M/2)\Delta t$ となる。FIR フィルタは、インパルス応答関数の長さが有限であり発散することが無いため、常に安定である。しかし、ローパスフィルタのように振幅が周波数により急変するフィルタを作成するためには項数 (M) を大きくとる必要がある。

一方、IIR フィルタでは、完全に定遅延なフィルタは作成できない。しかし、強い周波数依存性を有するフィルタをも比較的少ない項数 (M, N) で作成できる。IIR フィルタのインパルス応答関数は無限長であるため、設定によっては発散するインパルス応答関数を想定したフィルタとなっていることもありえる。この場合、このフィルタは不安定となり、フィルタを施された数列は急速に発散する。一般に、 r が式 (10) の極であれば、そのインパルス応答関数 $h(n)$ は ar^n と表される項を含むので、フィルタが安定であるためには ar^n が $n \rightarrow \infty$ においても発散しないことが必要になる。すなわち、IIR フィルタが安定であるための条件は、式 (10) の全ての極が z 平面上で単位円内に存在することである。解析に用いる IIR フィルタは常にこの条件を満たす必要がある。

2.3 デジタルフィルタを用いた時間積分法

デジタルフィルタを用いた時間積分法 (DFTI 法) の計算手順について述べる。

DFTI 法では、フィルタを施した時系列 $\{\tilde{x}_n\}$ から運動方程式を解く (時間積分を行う) ことにより逐次算出されていく数列を、フィルタを施されていない時系列 $\{x_n\}$ として定義する。そして、 $\{\tilde{x}_n\}$ 及び $\{x_n\}$ を 2 つの時系列と考えることにより、デジタルフィルタを施した時間積分を行う。このプロセスの概念図を図-1 に示す。

以下に、DFTI 法を用いた時間ステップの更新手順を具体的に示す。

今、時刻 $t = t_{n+1}$ における状態量 x_{n+1} が、それ以前の時間における状態量 $x_i, i = n, n-1, \dots$ および時間 t の関数として

$$x_{n+1} = f(t, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots) \quad (14)$$

と与えられる系を考える。

時刻 $t \leq t_n$ における状態量が、デジタルフィルタにより高周波成分を除去されているものとし、これを $\tilde{x}_i$ とする。まず、関数 f を用いて、高周波成分を除去されていない状態量が

$$x_{n+1} = f(t, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_{n-2}, \dots) \quad (15)$$

として与えられる。この数列 $\{x_n\}$ は、時刻 $t \leq t_{n+1}$ において定義されるため、時刻 $t = t_{n+1}$ における状態量を式 (5) を用いて、

$$\tilde{x}_{n+1} = \sum_{i=0}^M a_i x_{n+1-i} - \sum_{i=1}^N b_i \tilde{x}_{n+1-i} \quad (16)$$

と定義できる。このように求められた $\tilde{x}_{n+1}$ は、式 (16) の形から明かなように、式 (10) で表される伝達関数に相当するフィルタを施された時系列になっている。したがって、このフィルタとして適切なローパスフィルタを設定することで、高周波成分を除去しつつ時間積分を行うことが可能になる。これは、周波数依存の減衰を与えることに相当し、DFTI 法においては、高周波数領域で大きい減衰を与えていることになる。

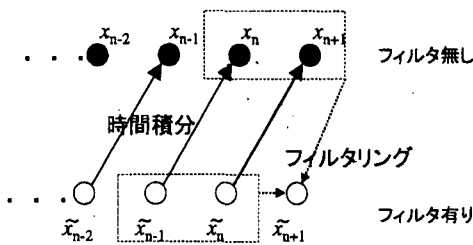


図-1 DFTI 法の計算手順の概念図

前述したように、一般にデジタルフィルタは(周波数依存の)遅延時間を有しているため、時間積分において、その影響を考慮する必要がある。遅延時間の周波数依存性については、後述するように、定遅延時間特性を有するフィルタを用いることで対応できる。ここでは周波数に依存しない遅延時間を有するフィルタを想定して、遅延時間の影響の考慮方法を示す。

デジタルフィルタの遅延時間を τ_0 とすると、式 (15) 及び (16) に基づいて算出された x_{n+1} は、 $t = t_{n+1} - \tau_0$ における値を与えていることになる。DFTI 法では、この問題を回避するため、時系列 $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots$ は、それぞれ、時刻 $t = t_{n+1} + \tau_0, t = t_n + \tau_0, t = t_{n-1} + \tau_0, \dots$ における状態量を示すものであると定義する。すなわち、式 (15) により x_{n+1} を算出する際に、 $t = t_{n+1}$ における値ではなく、 $t = t_{n+1} + \tau_0$ にお

ける値を算出する。これにより、式 (16) により与えられる $\tilde{x}_{n+1}$ に時刻 $t = t_{n+1}$ における値を持たせることができる。デジタルフィルタの遅延時間を考慮した時間積分の方法の概念図を図-2 に示す。

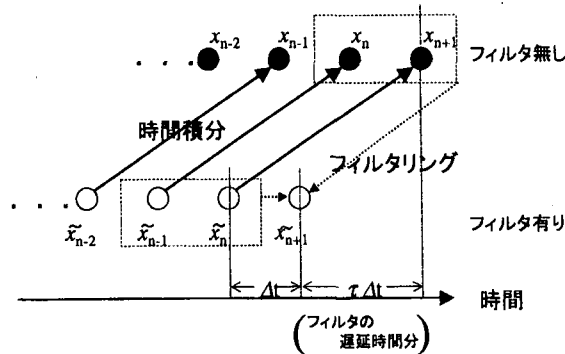


図-2 遅延時間を考慮した DFTI 法の計算手順

3. 計算方法

本節では、FDTI 法で用いるフィルタの例を示し、時間積分の具体的な計算方法について述べる。

3.1 定振幅・定遅延フィルタ

デジタルフィルタの遅延時間が周波数依存性を有すると、フィルタ処理後のデータは、周波数成分毎に異なる時刻の値を有することになり、波形形状が崩れる。これは、周波数成分ごとの挙動が独立していない非線形系の時刻歴解析において重大な問題となる。また、フィルタの振幅特性としては、解析の対象とする周波数領域においては一定値 1、それより高周波領域においては可能な限り小さい値を有するのが好ましい。振幅が 1 を下回る場合の影響は、対象とする系の挙動に含まれない減衰を与えることになる程度であるが、逆に、振幅が 1 を越える周波数領域においては、その周波数成分の振動モードを指数関数的に増幅していくことになるため、解析を不安定化させる結果にもなりうる。なお、この不安定性は IIR フィルタの不安定性に起因するものではなく、DFTI 法固有の問題であることに留意する必要がある。

これらの問題を回避するためには、周波数非依存の振幅・遅延を有するフィルタを用いる必要がある。このようなフィルタは、定振幅・定遅延フィルタとして、種々提案されている³⁾。また、目標とする周波数特性や遅延特性を周波数領域や時間領域でフィッティングする最適化問題としてフィルタの係数を評価する手法等も多く提案されている⁴⁾。基本的に振幅・遅延量特性をみたすものであれば、いずれのフィルタを用いてもよい。ただし、チェビシェフ多項式を用いるフィルタや、フィッティング等により係数を算出するフィルタには、通過周波数帯における振幅が部分的に 1 を上回るものもある。前述したように、このようなフィルタは、フィルタとし

ては安定であっても DFTI 法に適用した場合不安定性を生じさせることがあるので注意が必要である。

ここでは、Thiran⁵⁾による最大遅延平坦フィルタ (Maximally Flat Delay : MFD フィルタ) 及び、佐藤⁶⁾が提案した有理ルジャンドルフィルタを用いる。これらは IIR フィルタであり、比較的少ない項数で振幅、遅延ともに十分な平坦性を有している。また、関数形が明確に与えられているので係数の設定も容易である。

(1) 最大遅延平坦フィルタ (MFD フィルタ)

最大遅延平坦 (MFD) フィルタは、全極型関数 (式 (10) において $M = 0$ 、すなわち、分母が定数項のみからなる関数) で与えられる。式 (13) から、フィルタの遅延時間が平坦で一定値 τ_0 であるためには、

$$\theta = \tau_0 \omega \quad (17)$$

であればよい。MFD フィルタでは、式 (12) を $\omega = 0$ の周りでテイラー展開した場合に ω^k の係数が $k=2, \dots, 2n-1$ について 0 となるように $\{b_i\}$ を定める。この解はサンプリング時間間隔を Δt として、

$$b_k = (-1)^k n C_k \prod_{i=0}^n \frac{2\tau + i}{2\tau + k + i} \quad (18)$$

$$a_0 = \sum_{i=0}^n b_i = \frac{2n!}{n!} \frac{1}{\prod_{i=n+1}^{2n} (2\tau + i)} \quad (19)$$

ただし、 $\tau = \tau_0 / \Delta t$

と与えられる。遅延時間がサンプリング時間間隔 Δt の整数倍で与えられる点もこのフィルタの特徴である。

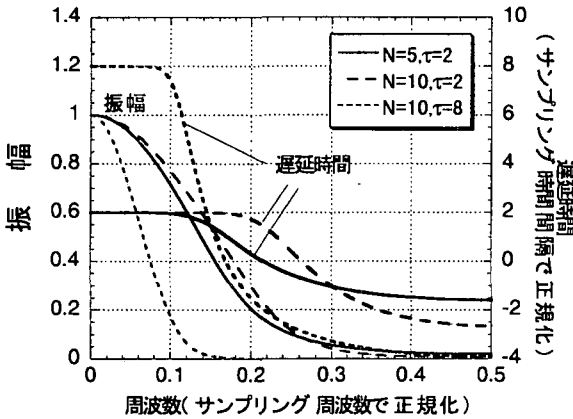


図-3 MFD フィルタの振幅・遅延時間の周波数特性

MFD フィルタの遅延及び振幅の周波数特性の例を図-3 に示す。同図に示されるように、 N, τ を変化させることにより、FIR フィルタの振幅の周波数特性や遅延時間を変化させることができる。

(2) 有理ルジャンドルフィルタ

有理ルジャンドルフィルタは、MFD フィルタに FIR フィルタを重ねることにより作成される IIR フィルタである。FIR フィルタでは、 $a_i = a_{M-i}$ を満たす係数列 $\{a_i\}$ を用いることで遅延が完全に一定値 $(M/2)\Delta t$ をと

るフィルタを実現できる。二つのフィルタを乗じた場合、その遅延時間は両フィルタの遅延時間の和となる。したがって、定遅延の FIR フィルタの係数列 $\{a_i\}$ と定遅延 τ_0 を有する MFD フィルタを表す $\{b_i\}$ を用いて式 (10) で表されるフィルタの遅延時間 τ_{total} は

$$\tau_{total} = \tau_0 + (M/2)\Delta t = (\tau + M/2)\Delta t \quad (20)$$

となり、このフィルタは MFD フィルタと同等の周波数依存性の定遅延性を有する。そこで、この FIR フィルタの振幅を調整することで定遅延・定振幅フィルタが得られる。今、求める伝達関数 $H(z)$ を

$$H(z) = \frac{q(z^{-1})}{p(z^{-1}, \tau)} \quad (21)$$

とおく。ただし、 $p(z^{-1}, \tau)$ は遅延時間 $\tau\Delta t$ の MFD フィルタの分母の多項式であり、 $q(z^{-1})$ は完全な定遅延性を有する FIR フィルタを表す z^{-1} の M 次多項式 (ただし M は偶数) である。フィルタの定振幅性を次式で与える。

$$H(z) \cdot H(z^{-1}) \sim 1 \quad (22)$$

なお、ここで $\sim$ は、 $z = e^{i\omega\Delta t}$ とした時、左右両辺の $\omega=0$ の周りでテイラー展開がある次数以下で一致することを表す記号とする。 $q(z^{-1})$ は、定遅延性を有するから、

$$q(z) = q(z^{-1})z^M \quad (23)$$

を満たす。また、 $p(z, \tau)$ は、定遅延性から

$$\frac{a_0}{p(z^{-1}, \tau)} \sim z^{-\tau} \quad (24)$$

すなわち、

$$\frac{p(z, \tau)}{p(z^{-1}, \tau)} \sim z^{-2\tau} \quad (25)$$

を満たす。式 (22)、(23) 及び (25) より、

$$q(z^{-1}) \sim p(z^{-1}, \tau) z^{-\tau} z^{-M/2} \quad (26)$$

が得られる。これを整理すると、MFD フィルタの遅延が $\tau\Delta t$ である時の定振幅性を与える FIR フィルタは

$$q(z^{-1}) = \frac{1}{N! {}_{2N+2\tau}C_N} \cdot \sum_{k=0}^{M/2} -\tau C_k \tau + N C_k \cdot \frac{k!(2N-2k)!}{(N-k)!} z^{-(k+M/2)} (z-1)^{2k} \quad (27)$$

と与えられる⁶⁾。したがって、 $q(z)$ の各項の係数 a_k は

$$a_k = \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^{M/2} \sum_{i=0}^{2k} \delta_{j-(M/2+k-i)} \alpha_k {}_{2k}C_i (-1)^i \quad (28)$$

ここで、

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{for } i = 0 \\ 0, & \text{for } i \neq 0 \end{cases}$$

$$\alpha_k = -\tau C_k \tau + N C_k \frac{k!(2N-2k)!}{(N-k)!}$$

$${}_N C_M = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N-M+1)\Gamma(M+1)}$$

と与えられる。なお、 $N < 0, M > 0$ の時 ($N' = -N$ として)

$$-N' C_M = (-1)^M N' + M + 1 C_M$$

である。

有理ルジャンドルフィルタの遅延及び振幅の周波数特性の例を図-4に示す。有理ルジャンドルフィルタにおいても、 N, M, τ を変化させることにより、フィルタの振幅の周波数特性や遅延時間を変化させることができる。

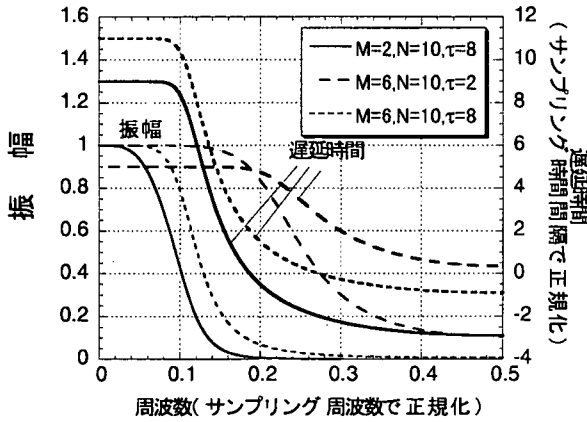


図-4 有理ルジャンドルフィルタの
振幅・遅延時間の周波数特性

3.2 時間積分法

以下では、実際の計算に適用する方法について、簡単な例を対象に述べる。対象とする系の運動方程式として

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{p(t)\} \quad (29)$$

ただし、

$[M], [C], [K]$: それぞれ、質量、減衰、剛性マトリクス

$\{x\}$: 変位ベクトル。なお、時刻 $t = t_n$ における変位は $\{x\}_n$ のように表す。

$\{p(t)\}$: 外力ベクトル

を考える。前述したように、フィルタの遅延時間が $\tau \Delta t$ である時、式 (15) に用いられる関数 f は、 $(\tau+1)\Delta t$ だけ進んだ時刻における $\{x\}$ を評価するように定める必要があるが、これは、単に、 Δt 後の状態を算出する時間積分を $(\tau+1)$ 回繰り返す関数とすればよい。

以下に、時間積分の方法として中央差分法及び線形加速度法を用いる場合について述べる。

(1) 中央差分法

中央差分法では、時刻 $t = t_n$ の状態から、 Δt 後の $t = t_{n+1}$ の状態を評価する式は次式で表される。

$$\begin{aligned} \{x\}_{n+1} = & \left([M] + \frac{1}{2}[C]\Delta t \right)^{-1} \left(\{p(t_n)\}\Delta t \right. \\ & \left. - ([K]\Delta t^2 - 2[M])\{x\}_n \right) \end{aligned}$$

$$-([M] - \frac{1}{2}[C]\Delta t)\{x\}_{n-1}) \quad (30)$$

中央差分法では、 $t = t_{n+1}$ における変位 $\{x\}_{n+1}$ は、時刻 $t = t_n$ 以前における情報のみから算出する。そのため、上式は非線形系の解析にもそのまま適用でき、定式化が平易な手法である。しかし、中央差分法は以下に述べる問題があり DFTI 法には適さない。これらの問題は、時間ステップの更新に用いる式 (30) が過去の 2 時点における状態量の線形和を含むことに起因している。

まず、有理ルジャンドルフィルタのように全極型でない伝達関数を有するフィルタを用いる場合について述べる。対象として、一質点系の自由振動を考える。 x_{n+1} は、ある定数 α, β を用いて $\hat{x}_n, \hat{x}_{n-1}$ の線形和として

$$x_{n+1} = \alpha \hat{x}_n + \beta \hat{x}_{n-1} \quad (31)$$

と表される。したがって、 $\hat{x}_{n+1}$ は、式 (16) を用いて、

$$\begin{aligned} \hat{x}_{n+1} = & \sum_{i=0}^M a_i (\alpha \hat{x}_{n-i} + \beta \hat{x}_{n-1-i}) - \sum_{i=1}^N b_i \hat{x}_{n+1-i} \\ = & a_0 x_{n+1} - \sum_{i=1}^{N'} b'_i \hat{x}_{n+1-i} \end{aligned} \quad (32)$$

と表される。 (N', b'_i) の具体的な値は省略する。) これは、

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + \sum_{i=1}^N b'_i z^{-i}} \quad (33)$$

なる伝達関数を有する IIR フィルタに相当する。したがって、このフィルタが不安定である場合、解析は不安定になる。

例として、質量 $m=1.0$ 、(無減衰時の) 固有周期 $T_0 = 1.0$ 、減衰定数 $h=0.10$ の系を、有理ルジャンドルフィルタ ($M=2, N=4, \tau=1$) を用いて、積分時間間隔 $\Delta t = 0.01$ として解析する場合を考える。この時、式 (33) の極は、 $z = 1.8, 0.20, 0.74, 1.27$ となり、 z 平面上で単位円外に位置する極が 2 つ存在する。したがって、このフィルタは不安定であり、その時刻歴解析は発散する。

全極型の伝達関数を持つ MFD フィルタを用いて行う場合には、 $M = 0$ であるため式 (32) は MFD フィルタの漸化式と同一になり、上のような問題は生じず時刻歴解析は発散しない。ただし、次のような問題がある。

再度、一質点系を対象とする。中央差分法の漸化式 (30) は、 m, c, k を $[M], [C], [K]$ に相当するスカラー値として、

$$x_{n+1} = \alpha x_n - \beta x_{n-1} + f_n \quad (34)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \alpha = & -\frac{k\Delta t^2}{m + c\Delta t/2} \\ \beta = & \frac{m - c\Delta t}{m + c\Delta t/2} \\ f_n = & \frac{p(t_n)\Delta t}{m + c\Delta t/2} \end{aligned}$$

と書けて、これは $\{x_n\}$ が時系列 $\{f_n\}$ に

$$H(z) = \frac{0 + z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}} \quad (35)$$

を伝達関数とするフィルタを施したものであることを示す。この時間積分に MFD フィルタ ($N=4, \tau=1$) を施す。そのフィルタの伝達関数を

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + \sum_{i=1}^4 b_i z^{-i}} \quad (36)$$

とすると、

$$x_{n+1} = (\alpha^2 - \beta)\hat{x}_n - \alpha\beta\hat{x}_{n-1} + \alpha f_n + f_{n+1} \quad (37)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \hat{x}_{n+1} &= a_0 x_{n+1} - \sum_{i=1}^4 b_i \hat{x}_{n+1-i} \\ &= a_0 f_{n+1} + a_0 \alpha f_n - \sum_{i=1}^4 b'_i \hat{x}_{n+1-i} \end{aligned}$$

ただし、

$$b'_1 = b_1 - a_0(\alpha^2 - \beta)$$

$$b'_2 = b_2 + a_0\alpha\beta$$

$$b'_3 = b_3, b'_4 = b_4$$

となり、フィルタリングした後の時系列 $\{\hat{x}_n\}$ のみの漸化式となる。この時、式 (35) に対応する伝達関数は、

$$H(z) = \frac{a_0 + a_0\alpha z^{-1}}{1 - \sum_{i=1}^4 b'_i z^{-i}} \quad (38)$$

となる。式 (35) 及び (38) で表されるフィルタの振幅の周波数特性は、図-5 に示されるように異なるものとなる。(ピークを示す周期はそれぞれ、1.0 及び 0.96 となる。) このように、中央差分法の場合、漸化式の線形性を用いて、フィルタを施した後の時系列 $\{\hat{x}_n\}$ のみの漸化式に変形できて、その結果、解析の対象とする系の応答特性が影響を受けるという問題がある。

以上のような問題点があるため、中央差分法は DFTI 法には適さない。特に、後者の問題は、時刻歴解析に用いた場合の影響が小さく、解析も発散しないため、見落としやすいので注意が必要となる。

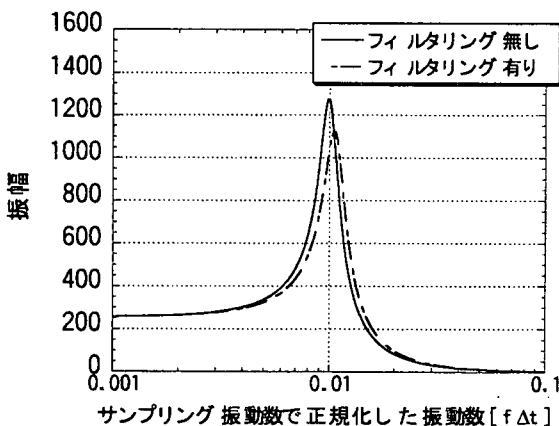


図-5 時間積分法として中央差分法を用いた場合の、フィルタリングの有無による伝達関数の差異

(2) 線形加速度法

線形加速度法では、時刻 $t = t_n$ の状態から、 Δt 後の $t = t_n + 1$ の状態を評価する際に、 $t = t_n + 1$ における外力 $p(t_{n+1})$ を用いる。したがって、非線形系を対象とする場合には、収束計算により解を求める場合が多い。それらの手法を適用することも可能であるが、ここでは、より簡便な酒井らによる手法⁷⁾を用いる。この手法では、まず、荷重伝達法⁸⁾により、復元力 $\{F(x)\}$ を用いて、

$$\{q(t)\} = [K]\{x\} - \{F(x)\} \quad (39)$$

で与えられる調整外力 $\{q(t)\}$ (図-6 参照) を式 (29) の右辺に加えることにより問題を線形化する。そして、 $t = t_n$ における調整外力 $\{q(t_n)\}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \{x\}_{n+1} &= (4[M] + 2[C]\Delta t + [K]\Delta t^2)^{-1} \cdot \\ &\quad \left(\{p(t_{n+1})\}\Delta t^2 \right. \\ &\quad \left. + [M](4\{x\}_n + 4\{\dot{x}\}_n\Delta t + \{\ddot{x}\}_n\Delta t^2) \right. \\ &\quad \left. + [C](2\{x\}_n\Delta t + \{\dot{x}\}_n\Delta t^2) \right) \quad (40) \end{aligned}$$

$$\{q(t_{n+1})\} = [K]\{x\}_{n+1} - \{F(x_{n+1})\} \quad (41)$$

$$\{\Delta q\} = \{q(t_{n+1})\} - \{q(t_n)\} \quad (42)$$

を求め、この $\{\Delta q\}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \{\ddot{x}\}_{n+1} &= -\{\ddot{x}\}_n - \frac{4}{\Delta t}\{\dot{x}\}_n \\ &\quad + \frac{4}{\Delta t^2}(\{x\}_{n+1} - \{x\}_n) \\ &\quad + \left([M] + \frac{1}{2}[C]\Delta t \right)^{-1} \{\Delta q\} \frac{\Delta t}{2} \quad (43) \end{aligned}$$

$$\{\dot{x}\}_{n+1} = -\{\dot{x}\}_n - \frac{2}{\Delta t}(\{x\}_{n+1} - \{x\}_n) \quad (44)$$

$$+ \left([M] + \frac{1}{2}[C]\Delta t \right)^{-1} \{\Delta q\} \quad (45)$$

を求める。線形系を対象とする場合には、 $\{q(t)\} = 0$ 、したがって $\{\Delta q\} = 0$ となる。線形加速度法の場合、MFD フィルタ及び有理ルジャンドルフィルタはいずれも適用可能である。

なお、以上の検討からも明らかなように、DFTI 法の解析手順は関数 f に依存しない。したがって、DFTI 法は、既存の解析法に基づくプログラムにも、時間ステップの更新アルゴリズムに本質的な変更を加えることなく比較的容易に導入できる。

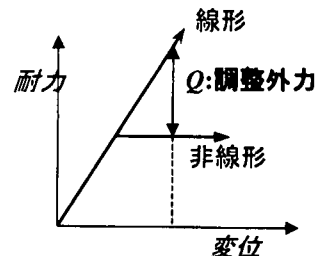


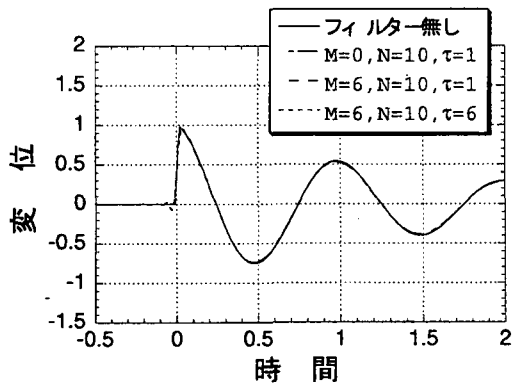
図-6 荷重伝達法における調整外力

3.3 因果性について

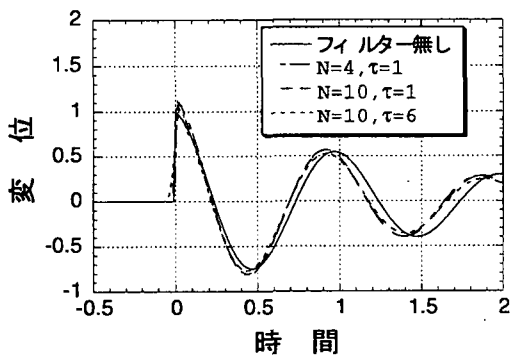
DFTI法は $t = t_{n+1}$ における状態量 $\hat{x}_{n+1}$ の算出に、より遠い未来 $t = t_{n+1} + \tau_0$ における状態量 x_{n+1} を用いるため、非因果的挙動を生じさせる解析手法である。ここでは簡単な試算により、その影響程度を示す。

質量 $m=1.0$ 、(無減衰時の)固有周期 $T_0=1.0$ 、減衰定数 $h=0.10$ の一自由度系に、時刻 $t = 0$ においてインパルスを与えた場合の応答を積分時間間隔 $\Delta t = 0.01$ で計算した。用いたフィルタは、等価線形化手法については、 $N=10, \tau=1$ のMFDフィルタ、 $M=6, N=10, \tau=1$ の有理ルジャンドルフィルタ、及び $M=6, N=10, \tau=6$ の有理ルジャンドルフィルタである。結果を図-7(a)に示す。同図には、比較のため、フィルタを用いない場合のインパルス応答も示した。これらの結果より、非因果的な応答の影響は非常に小さいものであることが分かる。

また、参考として、中央差分法について、 $N=4, \tau=1$ のMFDフィルタ、 $N=10, \tau=1$ のMFDフィルタ及び $N=10, \tau=6$ のMFDフィルタを用いた例を、フィルタを施さなかった場合の結果とともに図-7(b)に示した。



(a) 線形加速度法



(b) 中央差分法

図-7 インパルス応答の因果性に見られるフィルタリングの影響

中央差分法を用いた場合においては、フィルタにより応答が異なっており、また、いずれも、フィルタを施さなかった場合の結果とは一致していない。(なお、 $N=4, \tau=1$ のMFDフィルタを施した場合の応答時刻歴

の周期は0.94になっており、図-5に示される振幅のピークを与える周期と一致している。)このことから中央差分法がDFTI法に適さないことがわかる。

4. 計算例

単純な非線形系を対象とした解析例を示す。対象とする系は、図-8に示す2質点系とする。減衰が無い場合の1次及び2次モードの固有周期は、3.743及び0.053である。また、減衰はRayleigh減衰の形式で与えた。ただし、不安定な系を模擬するため、高周波数領域で負となる減衰を与えることとし、周期3.743及び0.053においてそれぞれ0.01及び-0.01となるように与えた。

解析の積分時間間隔は $\Delta t=0.01$ とした。デジタルフィルタとしては、 $M=6, N=10, \tau=6$ とした有理ルジャンドルフィルタを用いた。このフィルタの周波数特性を図-9に示す。

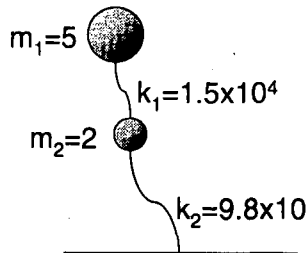


図-8 試算の対象とした2質点系

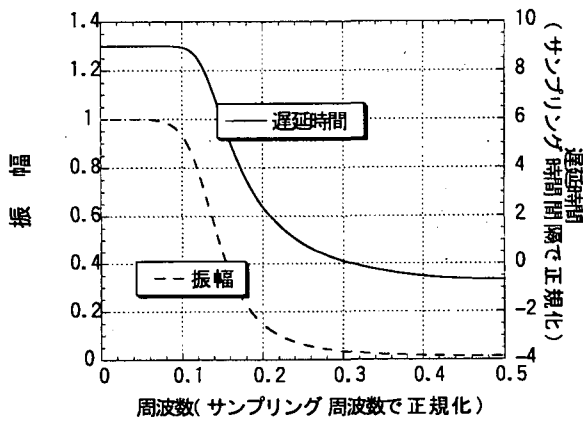


図-9 試算に用いた有理ルジャンドルフィルタの周波数特性

(1) 線形系の計算例

対象とする系に、初期変位 $x_1=-1.0, x_2=1.0$ を与えた場合の自由振動の時刻歴を図-10に示す。同図より、高周波のモードのみが急速に減衰していく様子が分かる。このように、DFTI法は解析において生じた高周波成分を急速に減衰させることにより、低周波のモードの

みを抽出するものである。

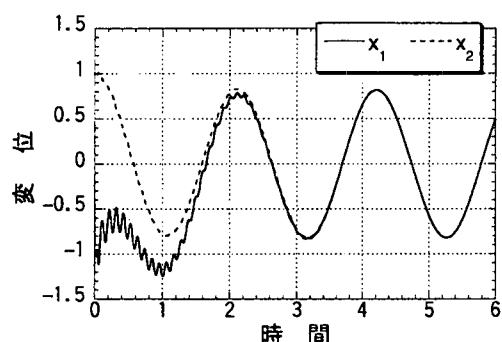
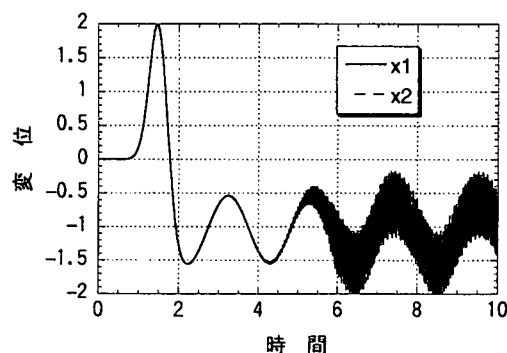


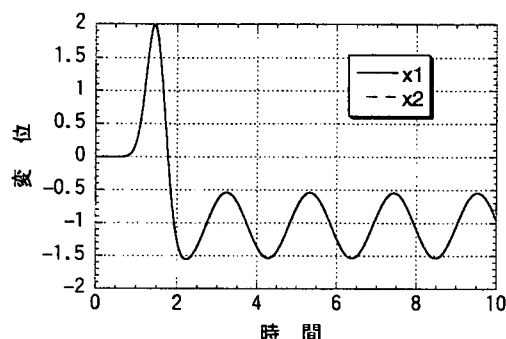
図-10 初期変位を与えた場合の自由振動

(2) 非線形系の計算例

前節と同じ系において、ばね剛性に非線形挙動を仮定した。ばね k_1, k_2 はいずれも、降伏変位 $\delta_{y1}=\delta_{y2}=0.5$ のバイリニア完全弾塑性ばねとした。入力は、主要周期0.5のRicker waveletとした。解析の結果を図-11に示す。同図より、DFTI法によりフィルタリングした解析では、フィルタリングの無い場合に生じている高周波が除去されていること、及び、低振動数のモードは正確に安定的に算出されていることが分かる。



(a) フィルタリングをしなかった場合



(b) 有理ルジャンドルフィルタを施した場合

図-11 フィルタの有無による非線形解析応答時刻歴の差異 (図中で2点の変位はほとんど重なっている。)

5. まとめ

ディジタルフィルタを用いて高周波成分を除去しながら時間積分を行う方法(DFTI法)を提案した。DFTI法は、以下のような特徴を有する。

- 1) 低周波領域に減衰等の影響を与えることなく高周波成分を除去し、解析の安定化をはかることができる。
- 2) 低遅延・定振幅のIIRフィルタを用いることにより、計算時間等を大幅に増大させることなく導入できる。
- 3) 解析の対象とする問題の計算アルゴリズムをほとんど変更せずに取り込むことができる。ただし、現時点では中央差分法には適用できない。
- 4) 非因果性を有するが、その影響は小さい。

今後、より複雑な系を対象とした場合のDFTI法の有効性について検証していく予定である。なお、今後の課題としては、線形加速度法以外の種々の時間積分法への適用性や適用方法についての検討があげられる。また、対象とする問題に最適なディジタルフィルタの設定方法(許容される遅延時間の評価等)についての検討も重要な課題である。

参考文献

- 1) 土木学会編：土木工学における数値解析／流体解析編，サイエンス社，pp.49, 1974.
- 2) R.Vich (富久泰明監訳):Z変換の理論と応用，ブレイン図書出版(株)，1991.
- 3) 式部幹：ディジタルフィルタの設計，東海大学出版会，pp.138-151,1986.
- 4) 三谷政昭：ディジタルフィルタデザイン，昭晃堂，pp.126-142,1987.
- 5) J.Thiran：Recursive digital filters with maximally flat group delay，IEEE Trans.，CT-18，6，pp.659, 1971.
- 6) 佐藤正光：有理ルジャンドルフィルター減衰および遅延平坦ディジタルフィルター，電子通信学会論文誌，Vol J59-A，No.4，pp.327-332, 1976.
- 7) 酒井久和，澤田純男：収束計算を行わない動的非線形FEMのための時間積分法，土木学会論文集 No.507/I-30，pp.137-147, 1995.
- 8) 土岐憲三，三浦房紀：地盤－構造物系の非線形地震応答解析，土木学会論文集，第317号，pp.61-68, 1982.

(1998年4月24日受付)