

高速多重極境界要素法による2次元動弾性問題の解析

Fast Multipole Boundary Element Method in 2D Elastodynamics

福井卓雄*・井上耕一**

Takuo FUKUI and Koichi INOUE

*正会員 工修 福井大学講師 工学部環境設計工学科 (〒910-8507 福井市文京3丁目9-1)

**正会員 工修 大成建設株式会社 関西支店 (〒542 大阪市中央区南船場1丁目14-10)

This paper is concerned with the fast multipole boundary element method (FMBEM) in two dimensional frequency domain elastodynamics. The fast multipole method (FMM) is derived by the Galerkin vector in the elastodynamic field. The elastodynamic field is expressed as the sum of the longitudinal and transverse wave fields, and the Galerkin vector FMM is simply derived from the scalar wave FMM. Multipole expansions of the influence functions are derived to apply the FMM to the boundary element method. A numerical experiment showed that the complexity and the required memory are of $O(N)$. As the example the multiple-hole elastic scattering problem was solved using the FMBEM, and the results show the applicability of the method.

Key Words : boundary element method, fast multipole method, 2D elastodynamics, complexity, required memory, multiple-hole scattering

1. はじめに

本論文では、周波数領域の2次元動弾性問題における高速多重極境界要素法を定式化し、いくつかの数値計算を行なって、その有効性を確認する。

高速多重極境界要素法¹⁾は、境界要素法の弱点である「密行列方程式を解く」計算を、N体問題の解析手法である高速多重極法²⁾を使って高速化し、その計算量を $O(N)$ にする解析手法である。ここでは、2次元動弾性問題における高速多重極法を開発し、境界要素法に応用して解析の高速化を試みる。

高速多重極法はもともとポテンシャル問題について開発されたものである。スカラー波動問題すなわち Helmholtz 方程式を解く問題については Rokhlin³⁾の先進的な研究があり、著者ら^{4),5)}も境界要素法への応用を試みて、高速多重極境界要素法の有効性を確認している。ここでは、動弾性学における Galerkin ベクトル^{6),7)}表現を使って、2次元動弾性問題の高速多重極法を定式化する。これにより、弾性波の伝播が縦波と横波の伝播として物理的に明確にとらえられ、種々の境界要素法への応用が容易となる。2次元動弾性問題では、Chen ら⁸⁾による Nyström の方法を使った積分方程式法の研究もあるが、彼らは弾性場を直接扱っている。

本論文では、まず、2次元動弾性問題の境界要素法を概説し、つぎに、Galerkin ベクトルを使った高速多重極法を導く。さらに、これらをもとに、高速多重極法を境界要素法に応用する方法について述べる。数値解析例として、円孔の散乱問題を解き計算量・記憶容量が $O(N)$ となることを確認する。最後に、多数の空孔が存在する場の散乱問題を解析し手法の適用性を確認する。

2. 2次元動弾性問題の境界要素法

2次元動弾性問題の境界要素法について概説する⁹⁾。

2.1 境界値問題

等方等質な2次元弾性体の面内調和波動問題を考える。角周波数が ω であるとき、Navierの方程式は、変位 u_i および物体力 X_i によって、

$$c_T^2 u_{i,jj} + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji} + \omega^2 u_i + X_i = 0 \quad (1)$$

と表される。ここに、 c_L は縦波、 c_T は横波の位相速度であり、Lamé定数を λ, μ 、質量密度を ρ 、Poisson比を ν とすると

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = c_L \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}} \quad (2)$$

である。応力 σ_{ij} は変位により

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

で与えられる。 δ_{ij} はKroneckerのデルタである。

領域 B とその境界 ∂B における境界値問題は、領域 B 内でNavierの方程式(1)を満足し、その境界 ∂B 上で与えられた境界条件

$$u_i = \hat{u}_i \quad \partial B_1 \text{ 上}, \quad n_j \sigma_{ji} = T_{ij}^n u_j = \hat{s}_i \quad \partial B_2 \text{ 上} \quad (4)$$

を満足する変位 u_i を決定する問題である。ここに、 $\partial B = \partial B_1 + \partial B_2$ であり、 n_i は境界上の外向き単位法線ベクトル、 \hat{u}_i, \hat{s}_i は、それぞれ、 $\partial B_1, \partial B_2$ 上で与えられた関数である。また、 T_{ij}^n は応力ベクトル作用素で、

$$T_{ij}^n u_j = n_j \sigma_{ji} = \lambda n_i u_{k,k} + \mu n_j (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

で定義される。

2.2 境界積分方程式

領域 B が無限で、入射波 \tilde{u}_i が境界 ∂B に入射するときの散乱問題を考えよう。物体力がない場合の境界値問題 (1), (4) の解 u_i は、動弾性学における Somigliana の公式により、

$$C_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) = \tilde{u}_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial B} [G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y})T_{jk}^n u_k(\mathbf{y}) - S_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y})u_j(\mathbf{y})] ds_y \quad (6)$$

を満足する。ここに、 ds_y は点 \mathbf{y} における境界の線素である。また、 C_{ij} は点 \mathbf{x} の位置によって決まる係数で、 $\mathbf{x} \in B$ のとき $C_{ij} = \delta_{ij}$ 、 $\mathbf{x} \in \partial B$ のとき、境界が滑らかであれば、 $C_{ij} = \delta_{ij}/2$ 、 $\mathbf{x} \notin B + \partial B$ のとき $C_{ij} = 0$ となる。 G_{ij} は基本特異解で、点 \mathbf{y} に作用する集中物体力 $X_i^{(j)} = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ による変位

$$G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{i}{4\mu} \left\{ H_0^{(1)}(k_T r) \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} [H_0^{(1)}(k_T r) - H_0^{(1)}(k_L r)] \delta_{ij} \right\} \quad (7)$$

である。ここに、 $k_L = \omega/c_L$ および $k_T = \omega/c_T$ は縦波および横波の波数であり、 $H_0^{(1)}$ は第一種 0 次の Hankel 関数である。 S_{ij} は第二基本特異解で、

$$S_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = T_{jk}^n G_{ki}(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \quad (8)$$

で定義される。ただし、作用素 T_{ij}^n は \mathbf{y} に作用するものとする。

積分公式 (6) は、点 \mathbf{x} が境界上にあるとき、境界値 u_i 、 $T_{ij}^n u_j$ に関する制約条件式となり、境界条件 (4) が与えられれば、未知の境界値に関する積分方程式となる。

2.3 境界要素法

境界積分方程式 (6) を数値的に解くために、境界上の関数 u_i 、 $T_{ij}^n u_j$ に近似

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})u_i^I, \quad T_{ij}^n u_j(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})s_i^I \quad (9)$$

を導入する。これを式 (6) に代入すれば、近似境界積分方程式

$$\sum_{I=1}^N C_{ij}(\mathbf{x})\phi_I(\mathbf{x})u_j^I = \tilde{u}_i(\mathbf{x}) + \sum_{I=1}^N [A_{ij}^I(\mathbf{x})s_j^I - B_{ij}^I(\mathbf{x})u_j^I] \quad (10)$$

を得る。ここに、 A_{ij}^I 、 B_{ij}^I は影響関数で

$$A_{ij}^I(\mathbf{x}) = \int_{\partial B} G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y})\phi_I(\mathbf{y}) ds_y \\ B_{ij}^I(\mathbf{x}) = \int_{\partial B} S_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y})\phi_I(\mathbf{y}) ds_y \quad (11)$$

で定義する。

未知の境界値を決定するために、選点法を使って式 (10) を近似的に満足させる。まず、境界上に選点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ を選ぶ。このとき、 $\phi_I(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}$ とな

るように、近似基底 ϕ_I と選点とを選ぶと便利であるので、ここではそれに従おう。これらの選点上で (10) を満足させると、選点で境界が滑らかであるとき、関係

$$-\sum_{J=1}^N A_{ij}^J(\mathbf{x}_I)s_j^J + \sum_{J=1}^N \left[\frac{1}{2}\delta_{IJ} + B_{ij}^J(\mathbf{x}_I) \right] u_j^J = \tilde{u}_i(\mathbf{x}_I) \quad I = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

を得る。境界条件 (4) と近似 (9) により $2N$ 個の境界値 $\{\hat{u}_i^1, \dots, \hat{u}_i^{N_1}, \hat{s}_i^{N_1+1}, \dots, \hat{s}_i^N\}$ が与えられれば、(12) は残る $2N$ 個の未知境界値 $\{s_i^1, \dots, s_i^{N_1}, u_i^{N_1+1}, \dots, u_i^N\}$ を決定する代数方程式となる。

式 (12) の係数は影響関数 (11) そのものであり、それのもととなる基本特異解 G_{ij} 、 S_{ij} は全空間で値を持つから、解くべき方程式の係数は密行列である。通常の方法でこれを解くと、係数行列を格納するための記憶容量は $O(N^2)$ 、方程式を解くための計算量は $O(N^2) \sim O(N^3)$ となる。したがって、問題の規模が大きくなると、記憶容量・計算量ともに極めて膨大なものになってしまう。次節以降では、記憶容量・計算量が $O(N)$ となるように境界要素法を改善する方法について述べる。

3. 2次元動弾性問題の高速多重極法

3.1 高速多重極法導入の意義

境界積分方程式 (6) の右辺の積分、あるいは、近似形 (10) の右辺の和は、境界上に分布した密度 u_i 、 $T_{ij}^n u_j$ による動弾性ポテンシャル場を評価するものである。式 (12) から導かれる線形方程式を繰返し法で解くとすると、その主要な計算は行列ベクトル積

$$\sum_{J=1}^N A_{ij}^J(\mathbf{x}_I)s_j^J, \quad \sum_{J=1}^N \left[\frac{1}{2}\delta_{IJ} + B_{ij}^J(\mathbf{x}_I) \right] u_j^J \quad (13)$$

の計算であり、これは、 N 個の要素により生成される動弾性ポテンシャル場における N 個の選点上の変位の値を計算することと同じである。このようなポテンシャル場を高速に計算する方法として N 体問題に広く使われている高速多重極法²⁾がある。高速多重極法では、FFT と同様な分割統治法による再帰アルゴリズムを使って、 N 個の質点同士がお互いにおよぼす影響を $O(N)$ の計算で実行することができる。したがって、境界要素法にこれを利用すれば、計算量および記憶容量を $O(N)$ の程度にまで縮小することが可能である。

高速多重極法はポテンシャル場の多重極展開表現を計算の基礎としている。また、高速なアルゴリズムを得るためには、多重極展開間の変換、局所的な展開、多重極展開と局所展開との間の変換などが必要である。したがって、動弾性問題に高速多重極法を適用するためには、動弾性場における多重極展開表現およびその変換公式を準備する必要がある。この節では、2次元の動弾性場における多重極展開とその変換関係を示し、高速多重極アルゴリズムの概要について述べる。

3.2 Galerkin ベクトルによる弾性波動場の表現

(1) Galerkin ベクトル

基本特異解 (7) および第二基本特異解 (8) で表現される場を直接に多重極展開することは一般には困難である。ここでは, Galerkin ベクトル^{6),7)}を用いて等方等質な線形弾性体の波動場を表現することとし, 多重極展開, 局所展開とその変換をすべて Galerkin ベクトルを使って行なうことにする。

縦波と横波に対応する波動作用素を

$$\square_L \equiv \nabla^2 + k_L^2, \quad \square_T \equiv \nabla^2 + k_T^2 \quad (14)$$

で定義する。Galerkin ベクトル F_i は方程式

$$\square_L \square_T F_i = -\frac{1}{1-\nu} X_i \quad (15)$$

を満足する。

Galerkin ベクトル F_i を使って, Navier の方程式 (1) を満足する変位 $u_i(x)$ は

$$2\mu u_i = -F_{i,jj} + 2(1-\nu)\square_L F_i \quad (16)$$

対応する応力 σ_{ij} は

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & -F_{k,kij} - F_{k,kji} \\ & + (1-\nu)\square_L(F_{i,j} + F_{j,i}) + \nu\delta_{ij}\square_T F_{k,k} \end{aligned} \quad (17)$$

で表される。

(2) 基本特異解の Galerkin ベクトル表現

基本特異解に対応する Galerkin ベクトル F_i^G は

$$\square_L \square_T F_i^G(x; y) = -\frac{1}{1-\nu} X_i \delta(x-y)$$

の解である。ここに, X_i は点 y に作用する集中物体力の大きさである。この方程式の解は

$$F_i^G(x; y) = f(x; y) X_i \quad (18)$$

と書ける。ここに,

$$f(x; y) = -\frac{2}{k_T^2} \left[\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_T r) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_L r) \right] \quad (19)$$

であり, $r = |x-y|$ である。 F_i^G を (16) に代入すれば, 変位 $u_i(x) = G_{ij}(x; y) X_j$ が得られる。

第二基本特異解の Galerkin ベクトル F_i^S は, 定義 (8) から導いて, 上の $f(x; y)$ を使って書けば,

$$F_i^S(x; y) = f_{i,j} [\lambda \delta_{ij} n_k U_k + \mu (n_i U_j + n_j U_i)] \quad (20)$$

となる。ここに, U_i は変位の食い違い量であり, n_i は食い違いの起こる面の単位ベクトルである。 F_i^S に対応する変位は $u_i(x) = S_{ij}(x; y) U_j$ となっている。

3.3 多重極展開と変換関係

(1) 多重極展開

この小節では指標の繁雑さを軽減するためにベクトルを太字表記する。

Galerkin ベクトル F^G や F^S の主な構成要素は関数 $f(x; y)$ である。式 (19) からわかるように, f は作用素 (14) の二つの基本特異解 $(i/4)H_0^{(1)}(k_K r)$ ($K = L, T$) の和になっている。すなわち, 波数 k_L, k_T に対応する

二つの波動場の和である。スカラー波動場における多重極展開^{3),5)}についてはよく知られているので, Galerkin ベクトルで弾性波動場を表現することにすれば, 多重極展開も容易に得られる。

2 次元の波動場の多重極展開と変換公式はすべて Graf の加法定理¹⁰⁾から導くことができる。図-1 に示すように, 二点 x, y に対して, y の近くに y_0 をとり, $x-y_0$ および $y-y_0$ の極座標表現を, それぞれ, $(r, \theta), (\rho, \phi)$ とする。 $r > \rho$ であるとき, Graf の加法定理により, 円柱関数 $Z_n(k|x-y|)$ を次のように級数展開することができる。

$$\begin{aligned} Z_n \left(k \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \alpha} \right) \\ = e^{-in\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{n+m}(kr) J_m(k\rho) e^{im\alpha} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに, J_n は n -次の Bessel 関数である。また, 距離は $|x-y| = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \alpha}$ である。角 α は $\alpha = \theta - \phi$, 角 β は

$$\begin{aligned} \rho \sin \alpha &= \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \alpha} \sin \beta \\ r - \rho \cos \alpha &= \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \alpha} \cos \beta \end{aligned}$$

により定まる。

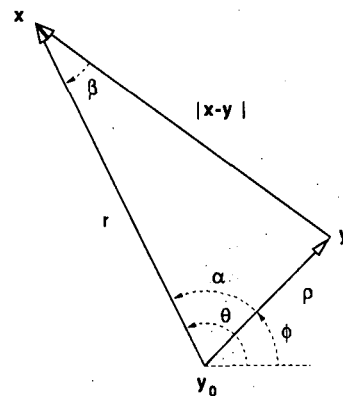


図-1 多重極点における極座標系

$r > \rho$ のとき, Graf の加法定理 (21) を使って基本特異解 (18) を展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[M_n^T H_n^{(1)}(k_T r) e^{in\theta} \right. \\ \left. - M_n^L H_n^{(1)}(k_L r) e^{in\theta} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

係数ベクトル M_n^L, M_n^T (多重極モーメント) は, 関数

$$g_n^K(\rho, \phi) = \frac{2}{k_T^2} J_n(k_K \rho) e^{-in\phi} \quad (K = L, T) \quad (23)$$

を使って

$$M_n^L = -X g_n^L(\rho, \phi), \quad M_n^T = -X g_n^T(\rho, \phi) \quad (24)$$

となる。(22) を Galerkin ベクトル F の多重極展開と呼ぶ。 M_n^L および M_n^T は多重極展開の係数の縦波お

よび横波成分であり、 $y - y_0$ にのみ依存し、点 x の移動には影響されない。

第二基本特異解に対する多重極モーメント M_n^K ($K = L, T$) の極座標成分は、 $g_n^K(\rho, \phi)$ の偏導関数

$$\begin{aligned} g_{\rho n}^K &= \frac{\partial g_n^K}{\partial \rho} = \frac{2k_K}{k_T^2} \left[n \frac{J_n(k_K \rho)}{k_K \rho} - J_{n+1}(k_K \rho) \right] e^{-in\phi} \\ g_{\phi n}^K &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial g_n^K}{\partial \phi} = -\frac{2in k_K}{k_T^2} \frac{J_n(k_K \rho)}{k_K \rho} e^{-in\phi} \end{aligned} \quad (25)$$

を使って

$$\begin{bmatrix} M_{\rho n}^K \\ M_{\phi n}^K \end{bmatrix} = [V_{ij}(\rho, \phi)] \begin{bmatrix} g_{\rho n}^K \\ g_{\phi n}^K \end{bmatrix} \quad (26)$$

と書くことができる。ここに、 $V_{ij}(\rho, \phi)$ は $[\lambda \delta_{ij} n_k U_k + \mu(n_i U_j + n_j U_i)]$ の極座標成分である。

多重極展開 (22) は無限和であるが、数値計算に使う場合には、和を有限項 $\pm p$ で打ち切って $2p + 1$ 個の係数を利用する。スカラー波動場において、打ち切り誤差は、 ρ を収束半径 (外側で収束) とするとき、 $r > \rho$ 、 $p > |k|\rho$ について、

$$\left| u(x) - \frac{i}{4} \sum_{n=-p}^p M_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \right| < c \left(\frac{\rho}{r} \right)^p \quad (27)$$

となることが知られている³⁾。収束半径は $\rho < p/|k|$ でおさえられる。すなわち、波数が大きいときには数値計算により多くの項が必要となる⁴⁾。

(2) 多重極の移動と局所展開

多重極展開 (22) を、別の位置の多重極について再度展開しなおすことができる。新しい多重極点から見た古い多重極点の位置を (ρ, ϕ) として、Graf の加法定理 (21) を (22) に適用すれば、新しい係数 \tilde{M}_n^K は、古い係数 M_n^K から、

$$\tilde{M}_n^K = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m^K J_{n-m}(k_K \rho) e^{-i(n-m)\phi} \quad (28)$$

により得られる (この変換を M2M と呼ぶことにする)。

多重極点から十分に離れた点の波動場を計算するために、波動場 $F(x)$ を点 x_0 のまわりの局所展開

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[L_n^T J_n(k_T r) e^{-in\theta} - L_n^L J_n(k_L r) e^{-in\theta} \right] \quad (29)$$

として表すことにする。ここに、 $r = |x - x_0|$ である。変位や応力は、局所展開 (29) を式 (16), (17) に代入すれば得られる。

局所展開点 x_0 から見た多重極点 y_0 の位置を (ρ, ϕ) として、多重極展開 (22) に Graf の加法定理 (21) を再度適用し、 $J_n(kr) e^{-in\theta}$ について整理すると、多重極展開係数 M_n^K から局所展開係数 L_n^K への変換関係

$$L_n^K = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m M_m^K H_{n+m}^{(1)}(k_K \rho) e^{i(n+m)\phi} \quad (30)$$

が得られる (M2L)。

局所展開の収束半径内に新しい展開点を設け、新しい展開点から見た古い展開点の位置を (ρ, ϕ) とする。Graf の加法定理 (21) を (29) に適用すれば、新しい展開係数 \tilde{L}_n^K と古い係数 L_n^K との変換関係は

$$\tilde{L}_n^K = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} L_m^K J_{m-n}(k_K \rho) e^{-i(m-n)\phi} \quad (31)$$

となる (L2L)。

多重極展開の項数を $\pm p$ で打ち切るときには、以上の変換公式および局所展開における和も同じく $\pm p$ で打ち切る。

3.4 高速多重極法

弾性波動場における多重極展開と変換関係が得られれば、N 個の波源間の相互作用を計算する手順は、ポテンシャル問題における高速多重極法^{1), 2)} とまったく同じように実行できる。

まず、波源の集合に 4 分木構造を導入する。これは、波源全体を含む正方形の空間を根のセルとして、これを 4 等分して子のセルとする。このセルをさらに 4 等分して孫のセルを作る。これを繰り返せば波源を含む空間の 4 分木構造が得られる。セルが一定数以下の波源しか含まないときには、分割を停止して、それを葉のセルとする。高速多重極法のすべての計算はこの 4 分木構造の上で行なう。

計算手順は次のようになる。

1. 葉から根に向かっての計算：葉のセルに含まれるすべての波源について、セルの中心における多重極展開を求め重ね合わせる。次に親のセルに移り、親のセルに含まれるすべての子セルの多重極点を M2M により移動して、親のセルの多重極展開として合成する。この計算を繰り返すことにより、すべてのセルにおいてそのセルの含む波源の影響の総和としての多重極展開を得る。
2. 根から葉に向かっての計算：親のセルの近傍に含まれる同レベルのセルのうち自分の近傍にないセルについて、M2L を使って局所展開を求め重ね合わせる。さらに、親セルに局所展開が存在する場合には、L2L により、局所展開の中心を自分のセルの中心に移動して重ね合わせる。これを繰り返して、葉のセルに至ったときは、局所展開から変位あるいは応力を求める。
3. 近傍の波源の影響の計算：葉のセルの近傍のセルおよび以上の計算から除外されたセルに含まれる波源からの影響を直接に計算して、変位あるいは応力に加える。

近傍としては第二近傍 (セル 2 個分より近い 25 個のセル) を使っている。

このアルゴリズムではすべての計算はセルの数だ

け繰り返される。セルの数は $O(N)$ であるので、計算量は $O(N)$ となる。なお、Rokhlin³⁾は、Nyström の方法を使い、要素数を波数と連動させて考えて、計算量を $O(N^{4/3})$ としているが、要素数と波数とを独立に考えれば、計算量は $O(N)$ となる。

4. 高速多重極境界要素法

4.1 影響関数の多重極展開

境界要素法における行列ベクトル積 (13) は影響関数 (11) の重ね合わせの計算であるから、高速多重極法を利用するためには影響関数の多重極展開が必要である。ここでは、直線一定要素の影響関数の多重極展開を求める。

境界を多角形で近似することとし、各辺 (要素) の上で境界値が一定と仮定する。すなわち、要素 E_J に対して、近似基底が

$$\phi_I(E_J) = \delta_{IJ} \quad (32)$$

であるとする。図-2に示すように、要素長を l 、要素の水平軸からの傾きを ϕ とする。また、多重極点 y_0 は

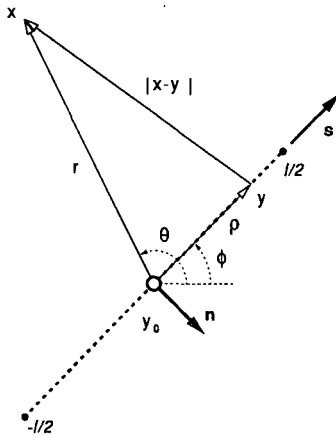


図-2 直線境界要素と多重極点

要素の中点にとることとする。

影響関数 A_{ij}^I に対応する Galerkin ベクトルは

$$\begin{aligned} F_I^A(x) &= X \int_{E_I} f(x; y) ds_y \\ &= -\frac{iX}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[H_n^{(1)}(k_T r) \int_{-l/2}^{l/2} g_n^T(\rho, \phi) ds \right. \\ &\quad \left. - H_n^{(1)}(k_L r) \int_{-l/2}^{l/2} g_n^L(\rho, \phi) ds \right] e^{in\theta} \quad (33) \end{aligned}$$

となる。すなわち、影響関数 A_{ij}^I に対応する多重極モーメント M_n^K は

$$M_n^K = -X \int_{-l/2}^{l/2} g_n^K(\rho, \phi) ds \quad (34)$$

である。この積分は

$$\begin{aligned} &\int_{-l/2}^{l/2} g_n^K(\rho, \phi) ds \\ &= \int_0^{l/2} g_n^K(\rho, \phi) d\rho + \int_0^{l/2} g_n^K(\rho, \phi + \pi) d\rho \\ &= \begin{cases} 0 & (n: \text{奇数}) \\ \frac{4e^{-in\phi}}{k_T^2 k_K} \int_0^{k_K l/2} J_n(x) dx & (n: \text{偶数}) \end{cases} \quad (35) \end{aligned}$$

となり、Bessel 関数の積分で表される。 $n < 0$ の場合には、 M_n^K は $M_{|n|}^K$ の複素共役となる。

同様に、影響関数 B_{ij}^I に対する多重極モーメントも、式 (26) を要素上で積分すれば計算できる。図-2の要素上では、単位法線ベクトルの ρ -成分は 0 であり、 ϕ -成分は s の正負に対して $n_\phi = \mp 1$ であるから、

$$[V_{ij}(\rho, \phi)] = \mp \begin{bmatrix} \lambda U_\phi & \mu U_\rho \\ \mu U_\rho & (\lambda + 2\mu) U_\phi \end{bmatrix} \quad (36)$$

となる。(25) の積分は

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\rho n}^K &= \int_{-l/2}^{l/2} n_\phi g_{\rho n}^K(\rho, \phi) ds \\ &= -\int_0^{l/2} g_{\rho n}^K(\rho, \phi) d\rho + \int_0^{l/2} g_{\rho n}^K(\rho, \phi + \pi) d\rho \\ &= -[g_n^K(\rho, \phi) - g_n^K(\rho, \phi + \pi)]_0^{l/2} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{k_T^2} J_n(k_K l/2) e^{-in\phi} & (n: \text{奇数}) \\ 0 & (n: \text{偶数}) \end{cases} \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\phi n}^K &= \int_{-l/2}^{l/2} n_\phi g_{\phi n}^K(\rho, \phi) ds \\ &= -\int_0^{l/2} g_{\phi n}^K(\rho, \phi) d\rho + \int_0^{l/2} g_{\phi n}^K(\rho, \phi + \pi) d\rho \\ &= \begin{cases} \frac{4ie^{-in\phi}}{k_T^2} \int_0^{k_K l/2} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] dx & (n: \text{奇数}) \\ 0 & (n: \text{偶数}) \end{cases} \quad (38) \end{aligned}$$

であるから、影響関数 B_{ij}^I に対する多重極モーメントの極座標成分は

$$\begin{bmatrix} M_{\rho n}^K \\ M_{\phi n}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda U_\phi & \mu U_\rho \\ \mu U_\rho & (\lambda + 2\mu) U_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{\rho n}^K \\ \tilde{g}_{\phi n}^K \end{bmatrix} \quad (39)$$

となる。

4.2 高速多重極境界要素法の計算手順

境界要素法の離散化関係式 (12) は、行列表記すると、

$$-As + Bu = \tilde{u} \quad (40)$$

である。いま、境界値 (\hat{u}_1, \hat{s}_2) が与えられ、 (s_1, u_2) が未知であるとする、代数方程式

$$\begin{bmatrix} -A_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \tilde{u} - \begin{bmatrix} B_1 & -A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{s}_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

が得られる。ここに、 A_1, B_1 は変位が与えられている境界の影響係数であり、 A_2, B_2 は応力が与えられている境界の影響係数である。

通常の境界要素法では係数行列 $[-A_1, B_2]$ を計算し、右辺のベクトルを計算して方程式を作り、それを解いて未知の境界値 (s_1, u_2) を求める。一方、高速多重極法を利用する場合には行列ベクトル積は

$$\begin{aligned} \sum_J^N A_{IJ} s_J &= \sum_J A_{IJ}^{\text{near}} s_J + \sum_K L_{IK}^{\text{far}} \sum_{J \in \text{Cell } K} M_{KJ}^A s_J \\ \sum_J^N B_{IJ} u_J &= \sum_J B_{IJ}^{\text{near}} u_J + \sum_K L_{IK}^{\text{far}} \sum_{J \in \text{Cell } K} M_{KJ}^B u_J \end{aligned} \quad (42)$$

の形で計算される。ここに、作用素 M_{KJ}^A, M_{KJ}^B はすべてのセルの多重極展開を計算する過程を表し、作用素 L_{IK}^{far} は局所展開を使って選点の変位の値を計算する過程を表している。 L_{IK}^{far} は A, B に依存しない。それぞれの作用素の係数を記憶しておいて使うことはしないので、行列ベクトル積は通常の行列計算とは別の一つの計算過程として処理される。したがって、高速多重極境界要素法の計算手順は次のようになる。

1. 式 (41) の右辺の行列ベクトル積を高速多重極法で計算してベクトルを求める。
 2. 方程式を繰り返し解法で解く。この計算の中で、左辺の行列ベクトル積を高速多重極法で計算する。
- 手順は単純であり、係数行列は計算しない。計算の過程では、多重極の係数と局所展開の係数を一時的に記憶しておくだけで良い。これらの係数は木の構造の上でだけ保持されるから、必要な記憶用量も $O(N)$ となる。

方程式の繰り返し解法には、BiCGSTAB 法を複素行列用に修正したものを用いた⁵⁾。

5. 数値解析例

5.1 計算時間と記憶容量

解析効率を確認するために、円形空洞に縦波の平面波 $u_1 = \exp(ik_L x_1)$ が入射したときの散乱解析を、要素分割数 $N = 2,000 \sim 50,000$ について行なった。波数は円の半径 a に対して $k_L a = 0.913, k_T a = 1.581$ とした。打ち切り項数は文献^{4),5)}の結果を踏まえて $p = 36$ とした。20 回程度の繰り返しで収束している。数値解は通常の境界要素法による解と比較して計算が正しく行なわれていることを確認した。計算にはワークステーション(主記憶 256MB)を用いて、すべての計算を主記憶上で行なった。方程式を BiCGSTAB で解く場合の 1 回の繰り返しに要した計算時間と計算に必要な総記憶容量を要素数に対してプロットしたものを図-3、図-4 に示す。図には参考のために $O(N^2)$ と $O(N)$ の線も示している。高速多重極境界要素法の計算量および記憶容量が $O(N)$ の程度になっていることが図から

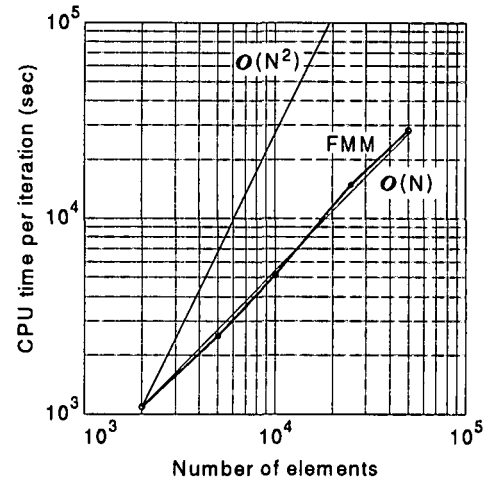


図-3 BiCGSTAB の 1 回の繰返しあたりの計算時間

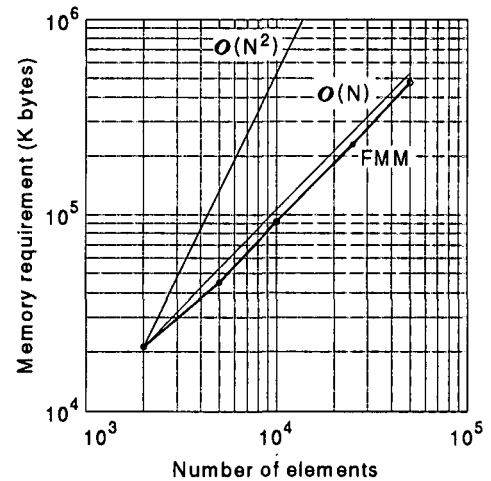


図-4 計算に必要なとした記憶容量

明らかである。直接解法の場合を示していないのは、グラフに示した範囲の要素数では係数行列が主記憶に格納しきれないので、比較が無意味になるからである。

5.2 多数の空孔による散乱の解析

自由度の大きい問題の例として、 10×10 個の円形空洞が配列されている弾性体の場に縦波平面波が入射したときの散乱解析を行なった。空孔の半径は a で、隣接する空孔の間隔は $3a$ とした。それぞれの空孔は 64 個の境界要素で近似した。総要素数は $N = 6,400$ である。弾性体の Poisson 比は $\nu = 0.25$ 、波数は $k_L a = 0.0685, k_T a = 0.1186$ とした。領域の全幅に対する無次元波数は $32k_T a$ となるので、多重極展開の打ち切り項数は $p = 80$ としている。また、セルに含まれる要素数が 8 個以下のときそれを葉のセルとしている。同様にして、円形空洞群の中に半径 $3a$ および $6a$ の大きな空洞が存

在する場合の散乱解析も行なった。中心の空孔の要素数は、半径が $3a$ のとき 192 (総要素数 6,336), 半径が $6a$ のとき 384 (総要素数 5,760) としている。

3種類の解析について、計算の各段階における計算時間をまとめたものを表-1に示す。木構造を作成する

表-1 計算段階における計算時間: 要素数, 繰り返し回数を除いて 単位 秒

| 要素数 | 6,400 | 6,336 | 5,760 |
|---------|---------|---------|---------|
| 木構造作成 | 1 | 1 | 1 |
| 右辺の計算 | 5,530 | 5,400 | 4,615 |
| 1回の繰り返し | 13,507 | 13,193 | 11,325 |
| 繰り返し回数 | 35 | 38 | 39 |
| 総計算時間 | 472,739 | 501,336 | 441,683 |

ための時間は極めて短い。BiCGSTAB では1回の繰り返しに行列ベクトル積を2度計算するので、1回の繰り返しにかかる時間は右辺のベクトルの計算時間の約2倍になっている。繰り返し回数は境界の形状が複雑になると、やや増加するようである。 p の値が大きいため計算時間はかなり長くなっている。

図-5, 6, 7 に空孔境界における変位の実部の分布を示す。入射平面波は $\tilde{u}_1 = \exp(ik_L x_1)$ で、図の左側から入射している。空孔群の中心を原点としているので、この場合には、入射波の最大値が中央にあるときの変位分布を示している。空孔群の中では波の位相が少しずつれており、左右の空孔の変位の大きさに違いが見られる。中央に大きな空孔が存在する場合には、その後方に波が伝わりにくくなっており、小さな空孔の変位が小さくなっている。この傾向は中央の空孔が大きいほど強く現れている。また、小さな空孔は中央の空孔の動きに引きずられた動きをしている。図-8, 9, 10 に空孔境界における変位の虚部の分布を示す。この場合には入射平面波の変位は中央で0である。この場合にも、実部のときと同様に、空孔中を伝わる波の位相は少しずつれており、変位が0となる位置が少し右に偏っている。中央に大きな空孔が存在する場合の挙動も実部のときと同様である。中央空孔の後方への波のまわり込みがかなり制限されている。さらに、この場合には、中央空孔前方の変位が大きくなっている。これは、大きな空孔による反射波の影響であろう。

参考のために、周囲に小さな空孔のない場合として、半径 $6a$ の空孔に同じ入射波を入れたときの境界の変位を図-11に示す。空孔群がある場合の図-7, 10では空孔の後方の変位が小さくなっている。中央の空孔が周囲の小空孔群に影響を与えると同時に、空孔群の存在が回折波の伝播を抑えていることがわかる。

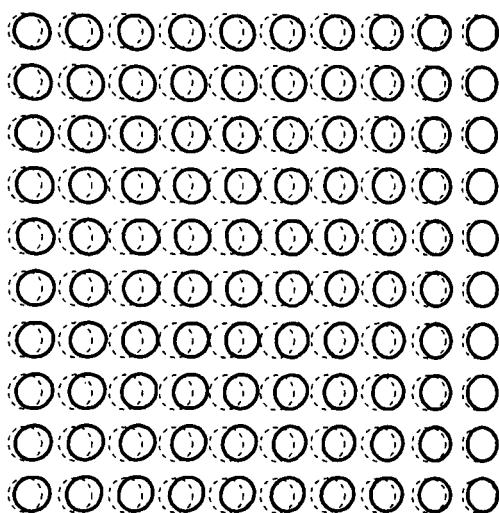


図-5 10 × 10 に配列された空孔に縦波平面波が入射したときの空孔境界の変位 (実部) [実線: 変位後の境界]

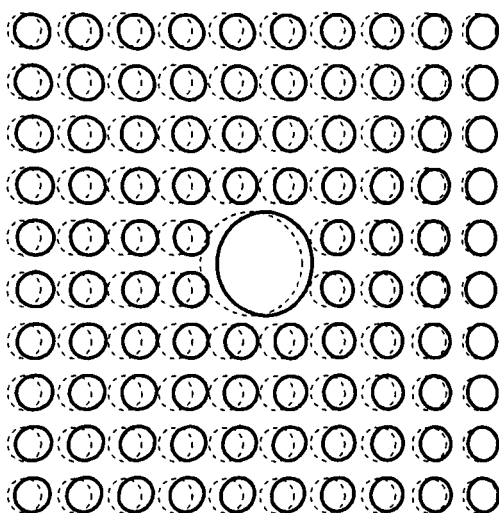


図-6 10 × 10 の空孔群 (半径 a) の中央に半径 $3a$ の空孔がある場合の空孔境界の変位 (実部)

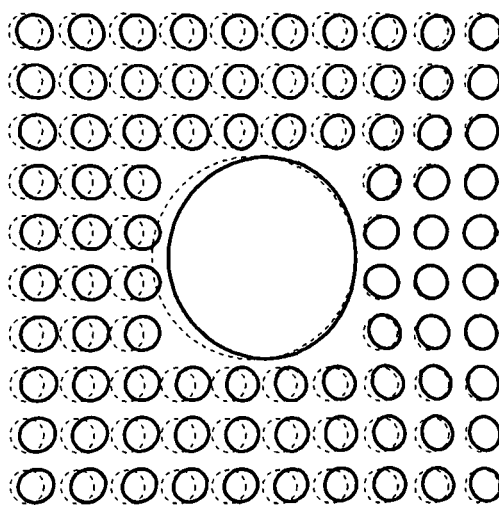


図-7 10 × 10 の空孔群 (半径 a) の中央に半径 $6a$ の空孔がある場合の空孔境界の変位 (実部)

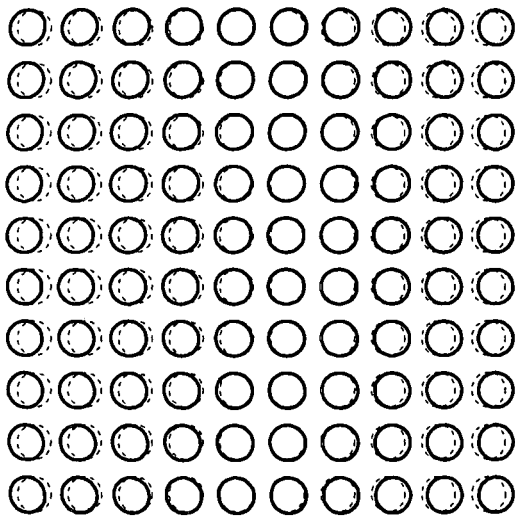


図-8 10 × 10 に配列された空孔に縦波平面波が入射したときの空孔境界の変位 (虚部) [実線：変位後の境界]

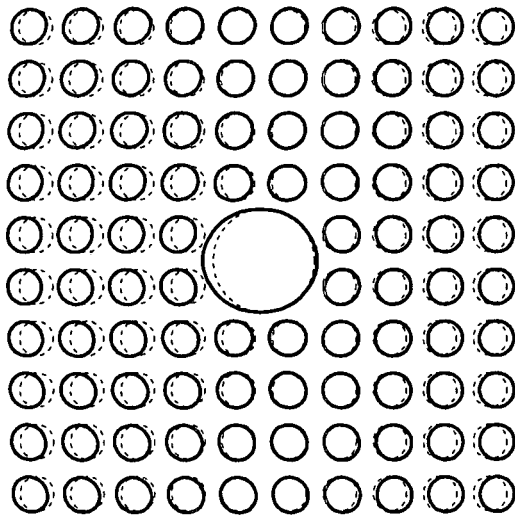


図-9 10 × 10 の空孔群 (半径 a) の中央に半径 $3a$ の空孔がある場合の空孔境界の変位 (虚部)

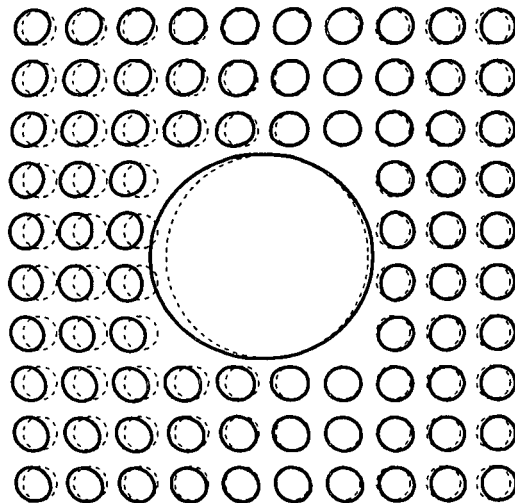


図-10 10 × 10 の空孔群 (半径 a) の中央に半径 $6a$ の空孔がある場合の空孔境界の変位 (虚部)

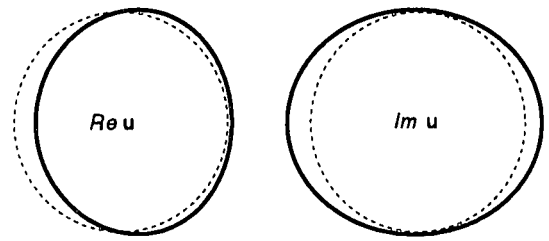


図-11 半径 $6a$ の空孔に縦波平面波が入射したときの空孔境界の変位 [実線：変位後の境界]

6. おわりに

2次元の周波数領域動弾性問題の高速多重極法を開発し、それを境界要素法に 응용して、境界要素法解析を高速化することを試みた。

高速多重極法の定式化にあたっては、動弾性問題における Galerkin ベクトルの多重極展開を利用した。これによって、縦波および横波についてスカラー波動問題の高速多重極法とまったく同じ形で多重極展開および局所展開とそれらの変換関係を得ることができた。数値実験により、この解法の計算量および記憶容量が $O(N)$ になることを確認した。また、応用例として、多数の空孔が分布する場の弾性散乱問題を解析し、手法の適用性を確認した。

参考文献

- 1) 福井卓雄, 服部純一, 土居野優: 高速多重極法の境界要素法解析への応用, 構造工学論文集, 43A, pp. 373-382, 1997.
- 2) Greengard, L.: A short course on fast multipole methods, *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July, 1996.*
- 3) Rokhlin, V.: Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions, *J. Computational Physics*, 86, pp. 414-439, 1990.
- 4) 福井卓雄, 勝本順三: 高速多重極境界要素法による2次元散乱問題の解析, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 7, pp. 47-52, 1997.
- 5) 福井卓雄, 勝本順三: 2次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用, 境界要素法論文集, 14, pp. 81-86, 1997.
- 6) ファン, Y. C. (大橋義夫・村上澄男・神谷紀生 共訳): 固体の力学/理論, 培風館, 1970.
- 7) Gurtin, M.A.: The linear theory of elasticity, in *Handbuch der Physik, Band IVa/2*, Springer, 1972.
- 8) Chen, Y.H., W.C. Chew and S.Zeroug: Fast multipole method as an efficient solver for 2D elastic wave surface integral equations, *Computational Mechanics*, 20, pp. 495-506, 1997.
- 9) 境界要素法研究会編: 境界要素法の理論と応用, 5. 動弾性問題, コロナ社, 1986.
- 10) Abramowitz, M. and I.A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1965.

(1998年4月24日受付)