

多重極積分方程式法を用いた 3 次元静弾性クラック問題の解析

Analysis of Three Dimensional Elastostatic Crack Problems with Fast Multipole Boundary Integral Equation Method

吉田研一*, 西村直志**, 小林昭一***

Ken-ichi YOSHIDA, Naoshi NISHIMURA and Shoichi KOBAYASHI

*学生会員 工修 京都大学工学研究科環境地球工学専攻

**正会員 工博 助教授 京都大学工学研究科環境地球工学専攻

***フェロー 工博 教授 京都大学工学研究科環境地球工学専攻

FMM(Fast Mutlipole Method) has been developed as a technique to reduce the computational time and memory requirements in solving big sized multibody problems. This paper applies FMM to elastostatic crack problems in 3D, discretizing BIE (boundary integral equation) with piecewise constant shape functions. The resulting algebraic equation is solved with GMRES (generalized minimun residual method). It is shown that FMM is more efficient than the conventional method.

Key Words : FMM, BIE, GMRES

1. 序

多重極法は未知数の多い問題に有利な数値計算の手法のひとつとして、積分方程式や、多体問題に関連して Rokhlin¹⁾、Greengard²⁾らによって研究され、発達してきたものであり、最近の積分方程式に関連する研究としては、速水ら³⁾、福井ら^{4),5)}、西村ら⁶⁾等がある。

従来の境界積分方程式法では n 個の要素に対して、それらの相互の影響を計算する時に $O(n^2)$ の計算量が必要となり、直接法によって代数方程式を解くと $O(n^3)$ の計算量が必要である。一方、多重極法では要素相互の影響を計算する時に、近傍の要素に対しては直接計算を用いるが、離れた要素からの影響は多重極モーメント、展開係数などを用いて計算する。これを反復法による線形方程式の解法と結び付けると、反復一回あたりの計算量は $O(n)$ になる。このため、多重極法は大規模問題の解法として有望であると考えられる。

本論文は、3 次元 Laplace 方程式のクラック問題を扱った前報⁶⁾に引続き、3 次元無限領域における静弾性クラック問題への多重極法の拡張を試み、その適用性を検証する事を目的としている。現在、3 次元静弾性問題における高速解法の研究としては Hayami & Sauter⁷⁾のパネルクラスタリングに関するものが知られているが、多重極法の完全な定式化は著者の知る限りまだ発表されていない¹⁾。そこで本論文では、まず 3 次元静弾性問題における多重極積分方程式法の定式化を検討し、

基本解の Galerkin ベクトル表示に基づいた解法を示す。次に、得られた定式化をクラック問題に適用する。クラックの積分方程式は超特異性を有するが、本論文ではその取扱として、正則化を用いた方法と、用いない方法を試みる。前者は関連する全ての積分が解析的に行なえるのが利点であり、後者は数値計算量が減少する特徴がある。数値解法としては選点法、形状関数には区間一定要素を用いる。代数方程式の解法としては反復法の GMRES 法 (generalized minimal residual method) を用いている。数値実験の結果、未知数が数千の問題では従来法より多重極法が高速であること、モーメントの積分に解析積分を用いるよりも数値積分を用いた方が効率がよいことなどが結論される。

2. 定式化

無限領域 $D = R^3$ にクラック S が存在している場合を取り扱う。ここに、クラックとは、自分自身と交わらない、縁 ∂S を有する、一般には複数の滑らかな曲面である。静弾性クラック問題は次のように定式化される。

支配方程式

$$\Delta^* u = 0 \quad \text{in } R^3$$

境界条件

$$t^\pm = 0 \quad \text{on } S$$

$$\phi = 0 \quad \text{on } \partial S$$

$$u(x) \rightarrow u^\infty(x) \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty$$

ここに、 Δ_{ik}^* は Navier の作用素で、弾性定数テンソル $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ によって $\Delta_{ik}^* =$

¹ 著者らは、本論文初稿投稿後、3 次元静弾性問題の通常の (クラックでない) 境界値問題の多重極法に関する Rodin らの投稿中の論文⁸⁾の存在を知った。彼らの定式化では、モーメントの数が、一重層で 4 種類、二重層で 12 種類となっている。本論文の正則化を用いない定式化は二重層で 4 種類のモーメントを用いるので、Rodin らの定式化とは異なっている。

$C_{ijkl}\delta_j\delta_l$ と定義される。 (λ, μ) は Lamé 定数、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。また、上つきの $+$ ($-$) はクラックの単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の正(負)の向きからの極限値を意味し、 t はトラクションであって、変位 $\mathbf{u}$ によって $t_i = C_{ijkl}u_{k,l}n_j$ と書ける。更に、 ϕ はクラック上での $\mathbf{u}$ の不連続量、すなわち開口変位であり、

$$\phi := \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$$

と表され、 $\mathbf{u}^\infty$ はクラックが存在しない時の解である。

この問題の解の変位に関する積分表示は次のようになる。

$$u_i(x) = u_i^\infty(x) + \int_S C_{jkn\ell} \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{ip}(x-y) n_k(y) \phi_j(y) dS_y \quad (1)$$

ここに、 Γ_{ij} は弾性学の基本解であり、次のように書ける。

$$\Gamma_{ij}(x-y) = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\delta_{ij} \partial_i^x \partial_j^x - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \partial_i^x \partial_j^x \right) |x-y| \quad (2)$$

また、 ∂_i^x は x_i に関する偏微分を表す。式(1)を微分して領域内の点 x をクラック上に極限移行し、境界条件を考慮すると、開口変位に関する超特異積分方程式

$$t_a^\infty(x) = -\text{p.f.} \int_S n_b(x) C_{ablm} C_{jkn\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial y_n} \Gamma_{mp}(x-y) \times n_k(y) \phi_j(y) dS_y \quad x \in S \quad (3)$$

が得られる。ここに、p.f. は発散積分の有限部分を意味し、 t^∞ は $\mathbf{u}^\infty$ に対応するトラクションである。さらに、上式にいわゆる正則化⁹⁾を用いて次のように変形することが出来る。

$$t_a^\infty = n_b(x) C_{ablm} \text{v.p.} \int_S e_{rs\ell} C_{pnjs} \Gamma_{mp,n} \times e_{rik} \phi_j n_k dS_y \quad (4)$$

ここに、 e_{ijk} は交代記号、 $_{,i}$ は $\partial/\partial y_i$ 、v.p. は Cauchy の主値を意味する。以上がクラック問題における積分方程式である。

3. 基本解の展開

以下数節にわたり、7.多重極法のアルゴリズムで述べる3次元静弾性クラック問題の積分方程式における多重極法の記述に必要な諸式を誘導する。本論文では超特異積分方程式(3)、及び正則化された積分方程式(4)を対象とするが、以下では繰り返しを避けるため、主として正則化された積分方程式(4)に基づく多重極法について述べる。

多重極法の出発点は基本解に対する変数分離形の展開を求めることである。静弾性学の基本解の多重極展開を行なうために、基本解の Galerkin ベクトル表示である式(2)に注目すると、項 $|x-y|$ を変数分離型に展

開しておけば、後は微分によって自然に基本解の展開が得られることが予想される。以上の考察により、まず $|x-y|$ の展開について考える。Epton らは¹⁰⁾ Helmholtz 方程式における基本解の展開について議論しているが、彼らの結果を波数 k の冪に展開し、その係数を計算することによって次の $|x-y|$ の展開式が導出される。

$$|x-y| = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=-N}^N \left(\frac{S_{N,M}(\vec{Ox}) \overline{U_{N,M}(\vec{Oy})}}{2N+3} - \frac{T_{N,M}(\vec{Ox}) \overline{R_{N,M}(\vec{Oy})}}{2N-1} \right) \quad (|Ox| > |Oy|) \quad (5)$$

ここに $\bar{a}$ は a の複素共役を意味し、 $R_{N,M}$ 、 $S_{N,M}$ 、 $U_{N,M}$ 、 $T_{N,M}$ は原点 O から見た点 x の極座標を (r, θ, ϕ) とすると、ルジャンドル陪関数 P_n^m を用いて

$$\begin{aligned} R_{N,M}(\vec{Ox}) &= \frac{1}{(N+M)!} P_N^M(\cos\theta) e^{iM\phi} r^N \\ S_{N,M}(\vec{Ox}) &= (N-M)! P_N^M(\cos\theta) e^{iM\phi} \frac{1}{r^{N+1}} \\ U_{N,M}(\vec{Ox}) &= r^2 R_{N,M}(\vec{Ox}) \\ T_{N,M}(\vec{Ox}) &= r^2 S_{N,M}(\vec{Ox}) \end{aligned}$$

と表せる。

さらに、 $R_{N,M}$ 、 $S_{N,M}$ には以下の関係式がある。

$$\begin{aligned} S_{N,M}(\vec{y\vec{x}}) &= \sum_{N'=0}^{\infty} \sum_{M'=-N'}^{N'} \overline{R_{N',M'}(\vec{Oy})} S_{N+N',M+M'}(\vec{Ox}) \quad (|Oy| < |Ox|) \\ R_{N,M}(\vec{y\vec{x}}) &= \sum_{N'=0}^N \sum_{M'=-N'}^{N'} R_{N',M'}(\vec{y\vec{O}}) \overline{R_{N-N',M-M'}(\vec{Ox})} \end{aligned} \quad (6)$$

(任意の $\vec{Ox}$ 、 $\vec{Oy}$ について成り立つ) (7)

以上の諸式と球関数に関する2、3の公式を用いて、式(2)の基本解は

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(x-y) &= \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=-N}^N \left(F_{ij,N,M}^S(\vec{Ox}) \overline{R_{N,M}(\vec{Oy})} + G_{i,N,M}^S(\vec{Ox}) (\vec{Oy})_j \overline{R_{N,M}(\vec{Oy})} \right) \quad (8) \end{aligned}$$

と書かれることが分かる。ここに $F_{ij,N,M}^S$ 、 $G_{i,N,M}^S$ は

$$F_{ij,N,M}^S(\vec{Ox}) = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} \delta_{ij} S_{N,M}(\vec{Ox}) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} (\vec{Ox})_j \partial_i^x S_{N,M}(\vec{Ox}) \quad (9)$$

$$G_{i,N,M}^S(\vec{Ox}) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \partial_i^x S_{N,M}(\vec{Ox}) \quad (10)$$

と定義される関数である。これらは Neuber-Papkovich の関数で表示されることを示すことができ、従って、静弾性学の解である。

4. 多重極展開と多重極モーメント

今、開口変位 ϕ が既知であるとする。この時クラック上の点 x において式 (4) の積分を評価することを考える。この際、基本解が x において特異性を有することを考慮すれば、点 x の近傍からの寄与は精密に評価されなければならないことが想像されるが、 x から離れた S の部分 S_0 からの式 (4) の積分への寄与は、ひとまとめにして評価しても良いものと考えられる。従って、 x は S_0 から十分遠く、 $|Ox| > |Oy|$ ($y \in S_0$) であるとして式 (8) を使うと、式 (4) の積分は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} e_{rsi} C_{pnjs} \Gamma_{mp,n} e_{rik} \phi_{j,i} n_k dS_y \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=-N}^N (F_{mp,N,M}^S(\vec{Ox}) \overline{M_{lp,N,M}^1(O)} \\ &+ G_{m,N,M}^S(\vec{Ox}) \overline{M_{lp,N,M}^2(O)}) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 M^1, M^2 は多重極モーメントであり、以下のように表される。

$$\begin{aligned} M_{lp,N,M}^1(O) &= \int_{S_0} e_{rsi} C_{pnjs} \frac{\partial}{\partial y_n} R_{N,M}(\vec{Oy}) e_{rik} \phi_{j,i} n_k dS_y \quad (12) \\ M_{lp,N,M}^2(O) &= \int_{S_0} e_{rsi} C_{pnjs} \frac{\partial}{\partial y_n} ((\vec{Oy})_p R_{N,M}(\vec{Oy})) e_{rik} \phi_{j,i} n_k dS_y \quad (13) \end{aligned}$$

次に、多重極モーメントを評価する際の原点を O から O' に移動した時の、多重極モーメントを変換する式を導出する (図-1)。式 (7) と式 (12)、式 (13) より次

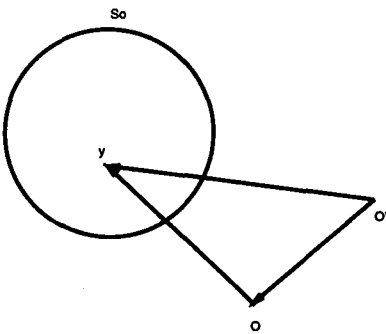


図-1 多重極モーメントの原点移動

の多重極モーメントの原点移動の式が得られる。

$$\begin{aligned} M_{lp,N,M}^1(O') &= \sum_{N'=0}^N \sum_{M'=-N'}^{N'} R_{N',M'}(\vec{O'O}) M_{lp,N-N',M-M'}^1(O) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{lp,N,M}^2(O') &= \sum_{N'=0}^N \sum_{M'=-N'}^{N'} R_{N',M'}(\vec{O'O}) (M_{lp,N-N',M-M'}^2(O) \\ &- (\vec{OO'})_p M_{lp,N-N',M-M'}^1(O)) \end{aligned} \quad (15)$$

次に多重極モーメントの具体的な計算方法について論ずる。本論文では、クラックを三角形の平面要素で離散化し、開口変位に区分一定要素を用いる。区分一定要素を用いることにより、式 (4) の面積分は次のように線積分に変換することが出来る。

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} e_{rsi} C_{pnjs} \Gamma_{mp,n} e_{rik} \phi_{j,i} n_k dS_y \\ &= \oint_{S_0} e_{rsi} C_{pnjs} \Gamma_{mp,n} dy_r \phi_j \end{aligned}$$

更に、クラックの部分 S_0 が平面要素 S_i の集まりであるとする、

$$\begin{aligned} M_{lp,N,M}^1(O) &= \sum_i \oint_{S_i} e_{rsi} C_{pnjs} \frac{\partial}{\partial y_n} R_{N,M}(\vec{Oy}) dy_r \phi_j^i \quad (16) \\ M_{lp,N,M}^2(O) &= \sum_i \oint_{S_i} e_{rsi} C_{pnjs} \frac{\partial}{\partial y_n} ((\vec{Oy})_p R_{N,M}(\vec{Oy})) dy_r \phi_j^i \quad (17) \end{aligned}$$

となる。ここに、 ϕ_j^i は S_i での開口変位 ϕ の j 成分を意味する。ここで、留意すべきことは、 $R_{N,M}(\vec{Oy})$ が $(\vec{Oy})_i$ の N 次斉次多項式で表されるということである。これは定義からも得られるが、後述の $R_{N,M}$ の計算アルゴリズムから自明となる。このことから、 $M^1(O), M^2(O)$ に含まれている積分は次のように解析的に計算することが出来る。平面 L 角形要素 S_i が頂点 $P_I (I=1, 2, \dots, L)$ ($P_{L+1} = P_1$) を有しているとして (図-2)、式 (7)、式 (16) より、 M^1 に含まれる積分は

$$\begin{aligned} & \oint_{S_i} e_{rsi} C_{pnjs} \frac{\partial}{\partial y_n} R_{N,M}(\vec{Oy}) dy_r = \\ & \sum_I \sum_{N'=0}^N \sum_{M'=-N'}^{N'} R_{N-N',M-M'}(\vec{OP_I}) e_{rsi} C_{pnjs} \\ & \times \frac{1}{N'} \frac{\partial}{\partial y_n} R_{N',M'}(\vec{P_I P_{I+1}}) (\vec{P_I P_{I+1}})_r \end{aligned} \quad (18)$$

となる。同様に、 M^2 に含まれる積分は、式 (17) より、

$$\oint_{S_i} e_{rsi} C_{pnjs} \frac{\partial}{\partial y_n} ((\vec{Oy})_p R_{N,M}(\vec{Oy})) dy_r =$$

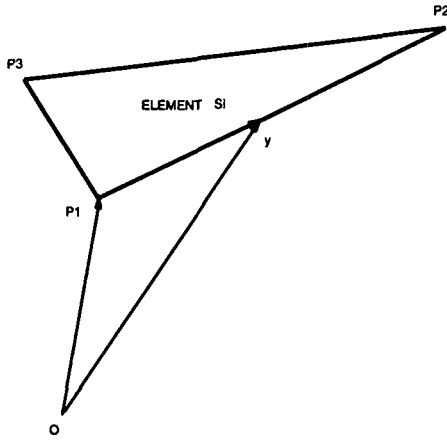


図-2 多重極モーメントの計算における線積分

$$\sum_I \sum_{N'=0}^N \sum_{M'=-N'}^{N'} R_{N-N', M-M'}(\overrightarrow{OP_I}) e_{rsi} C_{pnsj} \left(\frac{1}{N'+1} \delta_{np} \frac{\partial}{\partial y_n} R_{N', M'}(\overrightarrow{P_I P_{I+1}}) + \frac{1}{N'+1} (\overrightarrow{P_I P_{I+1}})_p R_{N', M'}(\overrightarrow{P_I P_{I+1}}) + \frac{1}{N'} (\overrightarrow{OP_I})_p \frac{\partial}{\partial y_n} R_{N', M'}(\overrightarrow{P_I P_{I+1}}) \right) \times (\overrightarrow{P_I P_{I+1}})_r \quad (19)$$

となる。 $\sum_I$ は各々の辺 $P_I P_{I+1}$ での線積分の和を意味する。

なお、後で述べるように、実際の多重極法の運用においてはモーメント $M^{1,2}$ を厳密に計算することは必ずしも必要ではなく、式(16)や式(17)の積分を数値積分によって評価する方が効率が良い場合もある。

5. 展開係数

積分方程式(4)を選点法によって解く場合、 S 上の多くの点 x で式(4)に含まれる積分を評価しなければならない。しかし、これらを個々の x について直接評価したのではあまり計算効率が良くない。そこで、ある点 x_0 の近傍の点 x については、 x_0 から遠くはなれた S の部分 S_0 からの式(4)への寄与を、点 x_0 における何らかの級数展開の係数として評価することを考える。具体的には、 $|\overrightarrow{Ox_0}| > |\overrightarrow{x_0 x}|$ となる点 x の近傍 x_0 を考えると(図-3)、式(6)より、次式を得る。

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=-N}^N \left(F_{mp, N, M}^S(\overrightarrow{Ox}) \overrightarrow{M}_{lp, N, M}^1(O) + G_{m, N, M}^S(\overrightarrow{Ox}) \overrightarrow{M}_{lp, N, M}^2(O) \right) = \sum_{N'=0}^{\infty} \sum_{M'=-N'}^{N'} \left(F_{mp, N', M'}^R(\overrightarrow{x_0 x}) b_{lp, N', M'}^1(x_0) \right)$$

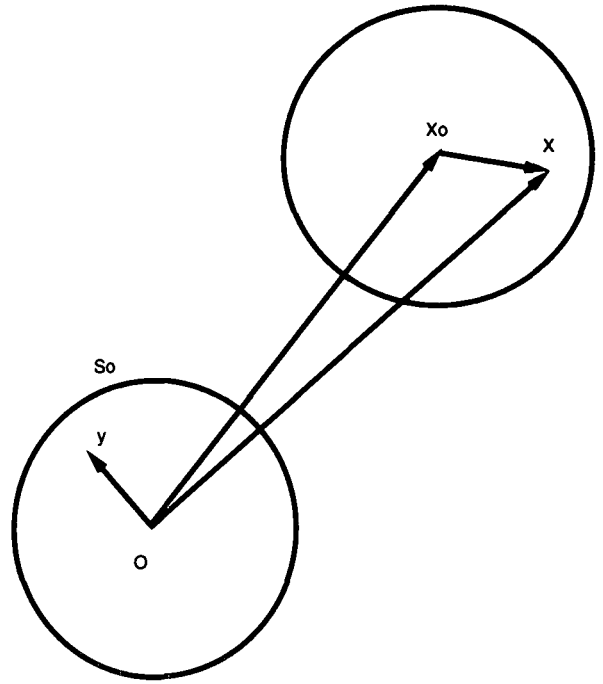


図-3 展開係数の計算

$$+ G_{m, N', M'}^R b_{lp, N', M'}^2(x_0)) \quad (20)$$

ここに、

$$b_{lp, N', M'}^1(x_0) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=-N}^N (-1)^{N'} \overrightarrow{S}_{N+N', M+M'}(\overrightarrow{Ox_0}) \overrightarrow{M}_{lp, N, M}^1(O) \quad (21)$$

$$b_{lp, N', M'}^2(x_0) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=-N}^N (-1)^{N'} \overrightarrow{S}_{N+N', M+M'}(\overrightarrow{Ox_0}) \times (\overrightarrow{M}_{lp, N, M}^2(O) - (\overrightarrow{Ox_0})_p \overrightarrow{M}_{lp, N, M}^1(O)) \quad (22)$$

となり、 $b_{lp, N', M'}^1(x_0)$, $b_{lp, N', M'}^2(x_0)$ を x_0 を展開中心とした展開係数と呼ぶ。また、 F^R , G^R などは式(9)、式(10)において S を R に置き換えたものである。

次に、展開中心を x_0 から x_1 に移動した時の展開係数の変換式を求める(図-4)。式(7)より x_1 を展開中心とした展開係数 $b^1(x_1)$, $b^2(x_1)$ は $b^1(x_0)$, $b^2(x_0)$ を用いて以下のように表せる。

$$b_{lp, N'', M''}^1(x_1) = \sum_{N'=N''}^{\infty} \sum_{M'=-N'}^{N'} R_{N'-N'', M'-M''}(\overrightarrow{x_0 x_1}) b_{lp, N', M'}^1(x_0) \quad (23)$$

$$b_{lp, N'', M''}^2(x_1) = \sum_{N'=N''}^{\infty} \sum_{M'=-N'}^{N'} R_{N'-N'', M'-M''}(\overrightarrow{x_0 x_1}) \times (b_{lp, N', M'}^2(x_0) - (\overrightarrow{x_0 x_1})_p b_{lp, N', M'}^1(x_0)) \quad (24)$$

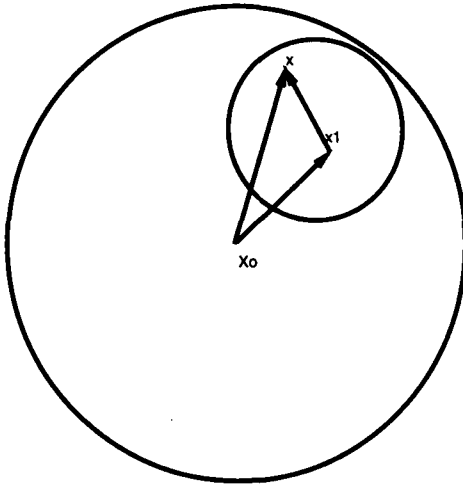


図-4 展開中心の移動

式 (23)、式 (24) が展開係数の移動公式である。

以上で正則化された積分方程式に基づく多重極法のアルゴリズムに必要な式はすべて揃ったことになる。

6. 正則化を用いない定式化

今までに述べてきた多重極法は正則化された積分方程式に基づくものである。この場合、区分一定近似を用いると、関連する全ての積分は解析的に評価された。しかし、部分積分を用いて微分を核関数から開口変位に移しているため、核関数の遠方での減衰のオーダーは正則化しない場合に比べて1オーダー小さくなっている。これは多重極法が本質的に遠くの potential を評価するものであることを考えると、必ずしも有利なことではない。それゆえ、正則化しない積分方程式に基づく多重極法を展開することには意義があると考えられる。ただし、この場合数値積分の使用が前提となるので、精度の検討が必要となる。

正則化を用いない定式化では、式 (3) に式 (8) を用いる。これまでに述べてきた方法を適用すると次の諸式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \text{p.f.} \int_S \frac{\partial}{\partial x_l} C_{jkn p} \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{mp}(x-y) n_k(y) \phi_j(y) dS_y \\
 &= \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=-N}^N (\partial_l^x F_{mp,N,M}^S(\vec{Ox}) \overline{\tilde{M}_{p,N,M}^1(O)} \\
 & \quad + \partial_l^x G_{m,N,M}^S(\vec{Ox}) \overline{\tilde{M}_{N,M}^2(O)}) \quad (25) \\
 & \tilde{M}_{p,N,M}^1(O) = \int_{S_0} C_{jkn p} \frac{\partial}{\partial y_n} R_{N,M}(\vec{Oy}) \phi_j n_k dS_y \\
 & \tilde{M}_{N,M}^2(O) = \\
 & \quad \int_{S_0} C_{jkn p} \frac{\partial}{\partial y_n} ((\vec{Oy})_p R_{N,M}(\vec{Oy})) \phi_j n_k dS_y
 \end{aligned}$$

正則化された場合と同様、展開係数や種々の移動公式

も容易に書き下すことができるが、自明であるのでここでは省略する。

7. 多重極法のアルゴリズム

本節では多重極法のアルゴリズムについて述べる。

クラック問題における多重極法は、開口変位 ϕ が S 上で与えられた時、式 (4) に現れる積分を S 上の多くの点で高速に求める方法である。その手順は以下の通りである。

1. (要素分割) 対象領域となるクラック S を、通常の境界要素法の要領で要素分割する。
2. (ツリー構造の決定) クラック S に外接する立方体を考える。これを level 0 の cell とする。この立方体の各辺を2等分して、立方体を8個の部分立方体に分割する。このうち境界要素を含む立方体を level 1 の cell と呼ぶ。以下同様に level i の cell を8分割して level $i+1$ の cell を作る。また、level i の cell C が level $i+1$ の cell C' を含む時、 C は C' の親 cell、cell C' は cell C の子 cell と呼ぶ。cell の分割の際には、境界要素を含まないものはそれ以上の分割をやめ、cell の含む境界要素数が予め決めた数よりも多い場合はその cell をさらに分割する。子 cell を持たない cell のことを leaf と呼ぶ。
3. (多重極モーメントの計算) まず leaf である cell において、その中心回りの多重極モーメントを式 (16)、式 (17) で計算する。次に level 数をひとつづつ減少させながら多重極モーメントを cell の中心に関して求める。すなわち、leaf でない cell C において、子 cell の多重極モーメントを子 cell の中心から、cell C の中心へ式 (14)、式 (15) によって移し、cell C が含む全ての子 cell について足し合わせる。この操作を level 2 の cell に到達するまで行ない、全ての level の全ての cell の多重極モーメントを計算する。
4. (展開係数の計算) まず、level 2 の cell から level 数をひとつづつ増加させながら cell の中心での展開係数を計算していく。level i の cell C での展開係数は、 C にやや近い cell からの寄与と、それより遠い cell からの影響に分けて計算する。前者は、 C の親 cell と隣接している level $i-1$ の cell に含まれる level i の cell 全体から、 C に隣接している level i の cell を除いたものに対して式 (21)、式 (22) から計算したものである。また、後者は C の親 cell の展開係数を、その展開中心を親 cell のものから cell C の中心に式 (23)、および式 (24) を使って移動したものをたしあわせて求める。
5. (積分の評価) 式 (4) の積分の評価は、最終的には求めた展開係数から式 (20) によって計算される値

と cell C に隣接する cell からの影響を従来法で直接積分したものの和として評価される。

以上のように、多重極法は、開口変位が与えられた時、式 (4) 右辺の積分を S 上の多くの点で計算する。しかし、積分方程式法においては開口変位は未知である。一方、繰返し型の線形方程式の解法の多くでは、各繰返しステップにおいて必要な操作は係数行列に解の候補ベクトルを掛けたものを計算することである。従って、そのような線形方程式の解法に多重極法を組み合わせることによって比較的小さな計算機でも超大型の境界値問題を解くことが可能になる。

8. ルジャンドル陪関数を含んだ項の計算

今まで述べてきた計算法は n 個の境界要素を用いた場合、与えられた ϕ について式 (4) の計算を行なうのに $O(n)$ の計算量を有することが分かる。ここに n は要素数である。しかし、この手法を実用的に使うためにはルジャンドル陪関数を含んだ表式を、高速に計算できることが必要である。以下では、そのために本論文で用いた計算アルゴリズムを示す。この方法の特徴はルジャンドル陪関数を計算して r の冪や $e^{iM\phi}$ を乗ずるのではなく、直接 $R_{N,M}, S_{N,M}$ 等を計算することにある。

8.1 $R_{N,M}, S_{N,M}$ の計算

まず、次のルジャンドル陪関数に関する漸化式は有名である^{11), 12)}。

$$(N-M+1)P_{N+1}^M(x) - (2N+1)xP_N^M(x) + (N+M)P_{N-1}^M(x) = 0 \quad (26)$$

$$xP_N^M(x) - P_{N+1}^M(x) + (N+M)\sqrt{1-x^2}P_{N-1}^{M-1}(x) = 0 \quad (27)$$

式 (27) の両辺に $r^{N+1}e^{iM\phi}$ を乗じ、 $M = N+1$ としてルジャンドル陪関数の性質 $P_N^M(x) = 0 (|M| > N)$ を用いると、

$$R_{N+1,N+1} = \frac{x_1 + ix_2}{2(N+1)} R_{N,N} \quad (28)$$

を得る。また、式 (26) の両辺に $r^{N+1}e^{iM\phi}$ を乗ずると

$$(N+M+1)(N+1-M)R_{N+1,M-} - (2N+1)x_3R_{N,M} + r^2R_{N-1,M} = 0 (N \geq M) \quad (29)$$

が得られる。式 (28)、式 (29) を用いると、結局 $R_{N,M}$ ($M \geq 0$) を計算するアルゴリズムは以下になる。

1. $R_{0,0} = 1$
2. 式 (28) より $N = 1, 2, \dots, P$ に対して $R_{N,N}$ を計算する。
3. M を固定し、式 (29) より、 $N = M, M+1, \dots, P$ に対して $R_{N,M}$ を順次計算していく。

ここに、 P は式 (11) の無限和を有限個で打ち切った時の上限である。前述のように、このアルゴリズムより $R_{N,M}$ が x_i の N 次の齊次多項式であることが容易にわかる。

$S_{N,M}$ の計算についても $R_{N,M}$ の場合と同様に以下のアルゴリズムが導かれる。

$$S_{0,0} = \frac{1}{r}$$

$$S_{N+1,N+1} = \frac{(2N+1)(x_1 + ix_2)}{r^2} S_{N,N}(x)$$

$$r^2 S_{N+1,M} - (2N+1)x_3 S_{N,M} + (N+M)(N-M)S_{N-1,M} = 0$$

また、負の M に対しては

$$R_{N,-M}(\vec{Oy}) = (-1)^M \overline{R_{N,M}(\vec{Oy})} \quad (M \geq 0)$$

$$S_{N,-M}(\vec{Ox}) = (-1)^M \overline{S_{N,M}(\vec{Ox})} \quad (M \geq 0)$$

を用いる。

8.2 $(\partial/\partial x_i)R_{N,M}, (\partial/\partial x_i)S_{N,M}$ の計算

$R_{N,M}, S_{N,M}$ を直交直線座標で偏微分したものは次の関係を満たすので、 $R_{N,M}, S_{N,M}$ の微分の計算は容易である。

$$\frac{\partial}{\partial x_1} R_{N,M} = \frac{1}{2}(R_{N-1,M-1} - R_{N-1,M+1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} R_{N,M} = \frac{i}{2}(R_{N-1,M-1} + R_{N-1,M+1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} R_{N,M} = R_{N-1,M}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} S_{N,M} = \frac{1}{2}(S_{N+1,M-1} - S_{N+1,M+1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} S_{N,M} = \frac{i}{2}(S_{N+1,M+1} + S_{N+1,M-1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} S_{N,M} = -S_{N+1,M}$$

9. 数値解析例

9.1 解析条件、解析法

数値解析は、単一の、半径 a の円形平面クラックで行なった。法線方向を x_3 として、境界条件は $t_\infty = (0, 0, t_0)$ 、弾性定数は $\mu = \lambda$ としている。ここに t_0 は定数である。また、多重極モーメントや展開係数に関する無限和は有限個 $P = 10$ で打ち切り (従来法との精度比較により打ち切り項数を定めた前報⁶⁾ に倣った)、leaf の中に含まれる境界要素の数は 100 個以下とした。多重極法の定式化としては正規化を行なうものを行なわないものを試みた。前者においてはモーメントの計算方法として式 (18)、式 (19) による解析的なものと、式 (16)、(17) を各辺毎に 1 点積分で数値積分したものを採用した。数値積分の次数は要素毎にモーメントを正確に求めるには明らかに低過ぎるが、leaf 毎に境界要素を 100 要素程度含むので、cell 毎のモー

ントの精度としては十分と考えられる。同様な理由で、正則化を行わない式(25)による定式化でも、モーメントの積分に必要な面積積分においては、境界要素当たり積分点1点の数値積分を用いている。なお数値計算の方法としては線形方程式の解法として前処理付きGMRESを用いた。前処理行列は速水ら³⁾に倣い、leafに対応するブロック対角行列の逆を用いた。また、従来法の線形方程式の解法にはCrout法を用いた。数値計算にはDEC-ALPHA533MHzをcpuとし、512MBのRAMを有するDEC互換機を利用した。

9.2 計算結果

図-5は要素数1912個(未知数5736)のメッシュの様子である。図-6は従来法と多重極法での計算時間をプロットしたものである。図-6では'conv'が従来法で'fmm-a'がモーメントを解析的に積分した正則化を用いた多重極法、'fmm-l'がモーメントを数値積分した正則化を用いた多重極法、'fmm-s'が正則化を用いない多重極法である。図からわかるように未知数の数が700のあたりで最も速い'fmm-s'の多重極法が従来法に追いついている。また、数値積分した'fmm-l'や'fmm-s'の方が'fmm-a'より速いことも分かる。実際'fmm-l'では'fmm-a'よりかなり計算量が減り、'fmm-a'や'fmm-l'の多重極モーメントが $3 \times 3 + 3 = 12$ 種類であるのに対し、'fmm-s'では $3 + 1 = 4$ 種類になる。図-7は、未知数2664のメッシュを用いて得られた、3通りの多重極法の解と従来法の解の差をプロットしたものであり、図中のerrは'fmm-a'、'fmm-l'、'fmm-s'の各多重極法の解の従来法の解に対する相対誤差の値である。従来法の精度と比較して、各種多重極法の解の精度には、実用上問題になる差は見られない。

10. 結言

本論文では3次元静弾性クラック問題における高速多重極法の定式化を示し、その有効性を結論することが出来たと考える。特にモーメントを数値積分で評価する方法は計算効率が良いことが結論された。本研究ではGMRES法において収束を速める(繰り返しの数を減らす)ために、Laplace方程式の通常の境界値問題やクラック問題に関する研究で用いられたleafに対応するブロック対角行列の逆で前処理をする方法を適用した。本研究で扱ったような単純な問題ではこの前処理法で計算効率が向上したが、一方、境界形状が複雑な場合や、Galerkin法の場合などでは必ずしも有用でないことが見出されており、現在、より適用性の高い前処理法を模索中である。また、積分の評価を変えただけでかなりの高速化が実現されたので、精度の問題を考慮しつつ、定式化や積分の評価について更に検討する事は大いに価値があると思われる。例えば、3次

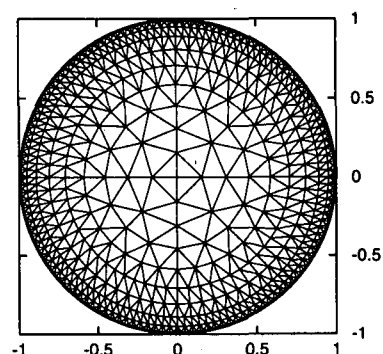


図-5 メッシュ

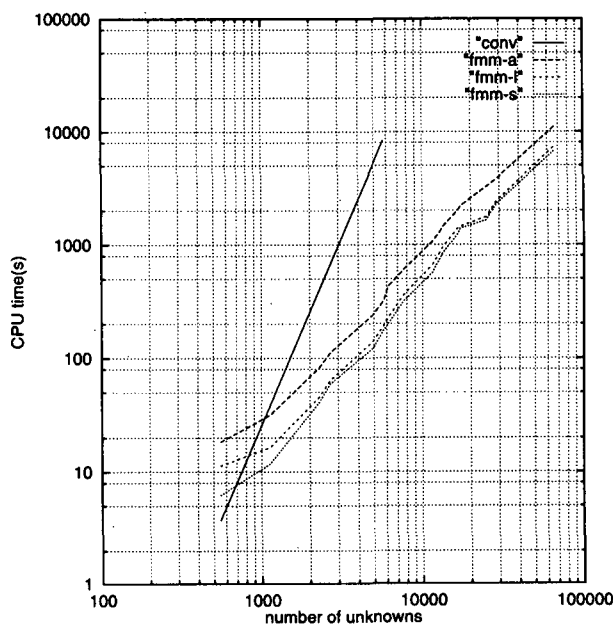


図-6 未知数の数と CPU time (s)

元問題であることを考えれば、直観的にはモーメントの種類は12個(正則化した場合)、ないしは4個(正則化しない場合)から、9個ないしは3個にまで減らせるものと予想されるが、現在のところそのような定式化は得られていない。これは従来、解析的な研究において4個のNeuber-Papkovichの関数をPoisson比の値に係わらず見通し良く3個に減らすことが困難であったことと同じ理由によるものと推定されるが、現在の定式化には改良の余地があることを示唆している可能

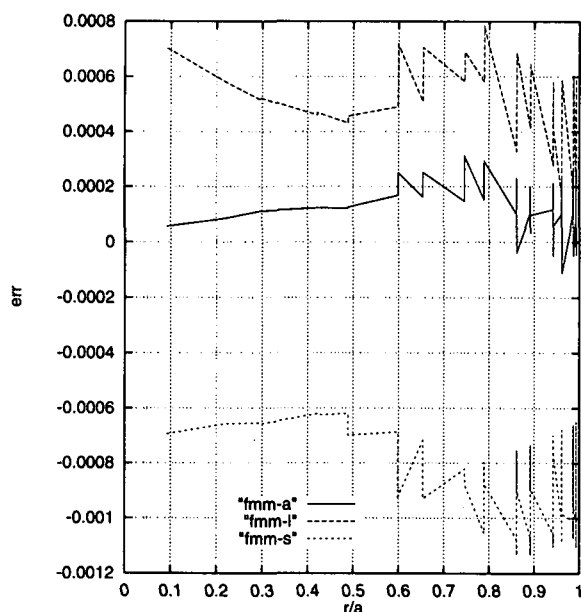


図-7 従来法の解に対する多重極法の解の精度

性もあると考えている。

参考文献

1) V. Rokhlin: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, J. Comp. Phys., 60 (1985), pp.187-207.

2) L. Greengard: The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems, The MIT Press, 1987.
 3) 西田徹志, 速水謙: 高速多重極展開法による3次元境界要素法的高速化, 計算工学講演論文集, 1(1996), pp.315-318.
 4) 福井卓雄, 服部純一: 多重極展開法による境界要素法の効率化, 計算工学講演論文集, 1(1996), pp.319-322.
 5) 福井卓雄, 持田哲郎, 井上耕一: 高速多重極境界要素法によるクラック群の進展解析, BTEC 論文集, 7(1997), pp.25-30.
 6) 西村直志, 吉田研一, 小林昭一: 多重極積分方程式法による3次元クラック問題の解析について, 境界要素法論文集, 14(1997), pp.37-41.
 7) K. Hayami and S.A. Sauter: Application of the panel clustering method to the three-dimensional elastostatic problem, Boundary Elements XIX (Eds. M. Marchetti et al.), pp.625-634, Comp. Mech. Publ., 1997.
 8) Y. Fu, K.J. Klimkowski, G.J. Rodin, E. Berger, J.C. Browne, J.K. Singer, R.A. van de Geijin, and K.S. Vermaganti: A fast solution method for three-dimensional many-particle problems of linear elasticity, To appear in Int. J. Numer. Meth. Eng. (1998).
 9) M. Tanaka, V. Sladek and J. Sladek: Regularization techniques applied to boundary element methods, Appl. Mech. Reviews, 47 (1994), pp.457-499.
 10) M.A. Epton and B. Dembart: Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations, SIAM J. Sci. Comput. 16 (1995) pp.865-897.
 11) M. Abramowitz and I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, Dover, 1970.
 12) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 数学公式 I,III 岩波書店 1960

(1998 年 4 月 24 日 受付)