

空間固定三軸回りの回転自由度を用いた空間梁解析

Spatial Beam Analysis using Degree of Rotational Freedom about 3 axes of Rectangular Cartesian Coordinates

後藤 文彦*・小林 裕**・斉木 功***・岩熊 哲夫****

GOTOU Humihiko, KOBAYASI Hiroshi, SAIKI Isao, IWAKUMA Tetsuo

*正会員 博(工) 東北大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻(〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉)

**正会員 鹿島建設(株)東北支店(宮城県仙台市青葉区二日町1-27)

***正会員 修(工) 東北大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻

****正会員 Ph. D. 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻

In finite displacement problems for which to define potential functional is difficult, stiffness equation is generally derived from virtual work equation. In such case infinitesimal rotational angles about three axes of rectangular Cartesian coordinates can be used as degree of rotational freedom. The rotational angles are useful to analyze structures subjected to moments about three axes at one node but may make tangent stiffness matrix not symmetric. In this paper accuracy of the formulation is discussed.

Key Words : *finite displacement, rotational pseudovector, Eulerian angles, symmetry of tangent stiffness matrix*

1. まえがき

回転の大きさに制約を設けない空間梁の有限変位解析では、回転変位を線形空間上の線形独立な成分として表すことはできないため、何等かの交換不可能な回転群として表すのが普通だが、この回転群を含む多様体上でポテンシャル汎関数を定義することは一般に難しい。そこで、全ポテンシャルエネルギーの第一変分すなわち仮想仕事式から出発して定式化を導くことが多い。

さて、空間に固定した全体座標系で定義した内力仮想仕事にひずみ変位関係を代入して剛性方程式を導くためには、有限な変位場を変位の関数として与えなければならない。有限な変位場を表す回転変位成分には、通常、独立三成分で表される回転群：軸性ベクトル(回転擬ベクトル^{1),2),3),4),5)}やロドリゲス変数^{6),1)}やオイラー角^{6),7),8)}、または従属な九成分で表される方向余弦^{9),10)}が用いられるが、いずれの回転変位成分を用いても変位場は複雑な式となる。その変位場から得られた煩雑なひずみ-変位関係を直接、内力仮想仕事に代入して有限要素法の定式化をすることは一般に困難である。そのため、移動座標などにより剛体的な変位成分を除去し、局所座標系で微小変形を仮定した線形剛性方程式を全体座標系と関係づける手法を用いるのが普通である。

この局所座標系の変位ベクトルを全体座標系成分に変換するには、回転変位成分の関数で与えられる座標変換を用いることができる。一方、局所座標系の外力ベクトルを全体座標系の外力ベクトルに変換するための関係式は、例えば、局所座標系における外力仮想仕事と全体座

標系における外力仮想仕事とを等置することにより得られる。

二次元問題の場合、このような方法で仮想仕事の式を考慮して定式化を行えば、対称な接線剛性行列が得られ、ポテンシャルの存在が保証されることが報告されている^{11),12),13)}。一方、三次元問題の場合、同じように仮想仕事の式を考慮しても、必ずしも対称な接線剛性行列が得られるとは限らない。回転自由度に有限回転を表すいずれかの回転群を用いた場合、通常の微分操作で基本剛性行列からは対称な接線行列が得られるものの、幾何剛性行列からは非対称な接線行列しか得られないことが報告されている^{14),4),5)}(尤もこの場合も、つり合い状態では対称となることが報告されている¹⁵⁾)。これについては、線形空間とはみなせない多様体上で定義されるポテンシャルを、通常の微分操作で二回微分すると非対称な接線行列が得られるが、一回の微分操作を共変微分に置き換えると不つり合い状態でも対称な接線行列が得られるという考察もある^{14),16)}。また、セミタンジェンシャル軸の導入により、回転群の交換を可能にすることで接線行列が対称になるという考察もある^{4),5)}(今回は、このような交換不可能な回転群に起因する幾何剛性行列の接線行列の対称性についての議論は行わない)。

一方、前述の手法のひとつとして、全体座標系と局所座標系での外力仮想仕事の関係を考慮して局所座標系の剛性方程式を定式化する場合、仮想変位は微小なので、微小でしか存在しない空間固定三軸回りの回転角を回転自由度に用いることもできる。この回転自由度に対応する外力モーメントは、通常の空間固定三軸回りの成分で

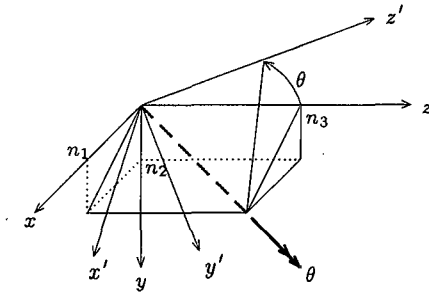


図-1 主軸角

与えることができるため、一節点に二軸曲げやねじりを同時に受けるような構造系の解析には有利である。ただ微量としてしか存在しない空間固定三軸回りの回転変位を用いて有限変位問題の外力ポテンシャルを定義することはできないので、基本剛性行列の接線行列すら対称になる保証はない。この手法を用いた既往の研究では、基本剛性行列の接線行列が対称になったとする例⁷⁾もあるが、対称にならなかったとする例^{2),3)}もある。

そこで本論文では、仮想仕事を用いて回転自由度の異なるいくつかの基本剛性方程式を導き、空間固定三軸回りの回転自由度を用いた定式化の接線行列の対称性と、それが数値解析の精度に影響を与えるかどうかについて検討する。

2. 回転の記述方法

空間固定座標系の点 (x, y, z) が、回転移動する別の座標系において (x', y', z') と表される時、この関係を座標変換行列 T を用いて

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = T^T \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

と表す。まず、座標変換行列 T を主軸角を用いて表す。図-1のように、 (x, y, z) 座標系を回転主軸 (n_1, n_2, n_3) の回りに角度 θ だけ回転すると (x', y', z') 座標系に重なるものとする。このとき

$$(\varphi, \chi, \psi) = (n_1\theta, n_2\theta, n_3\theta) \quad (2)$$

で定義される三変数を回転擬ベクトル^{6),1)}と呼び、

$$(\xi, \eta, \zeta) = (n_1 \tan \frac{\theta}{2}, n_2 \tan \frac{\theta}{2}, n_3 \tan \frac{\theta}{2}) \quad (3)$$

で定義される三変数をロドリゲス変数と呼んでいる⁶⁾。座標変換行列 T は回転擬ベクトル (φ, χ, ψ) を用いると次式で与えられる。

$$T^P(\varphi, \chi, \psi) = \begin{bmatrix} 1 - \{1 - (\frac{\varphi}{\theta})^2\}C & \frac{\varphi\chi}{\theta^2}C - \frac{\varphi}{\theta}S & \frac{\varphi\psi}{\theta^2}C + \frac{\chi}{\theta}S \\ \frac{\varphi\chi}{\theta^2}C + \frac{\varphi}{\theta}S & 1 - \{1 - (\frac{\chi}{\theta})^2\}C & \frac{\psi\chi}{\theta^2}C - \frac{\varphi}{\theta}S \\ \frac{\varphi\psi}{\theta^2}C - \frac{\chi}{\theta}S & \frac{\psi\chi}{\theta^2}C + \frac{\varphi}{\theta}S & 1 - \{1 - (\frac{\psi}{\theta})^2\}C \end{bmatrix} \quad (4)$$

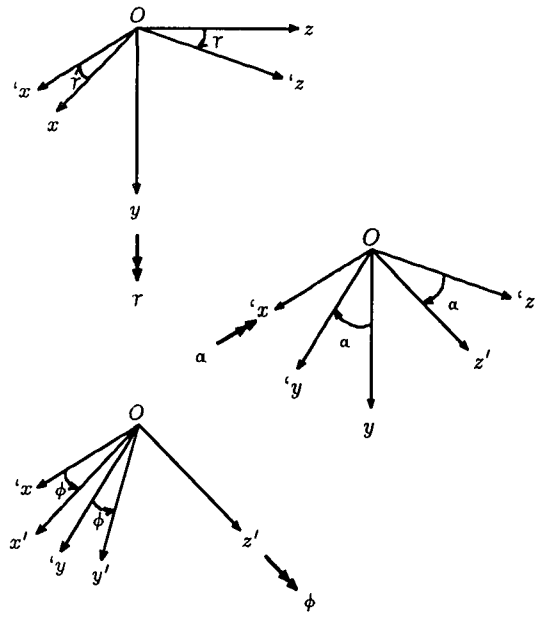


図-2 オイラー角

$$C = 1 - \cos \theta, \quad S = \sin \theta \\ \theta = \sqrt{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2}$$

また、座標変換行列 T はロドリゲス変数 (ξ, η, ζ) を用いると次式で与えられる。

$$T^R(\xi, \eta, \zeta) = \quad (5)$$

$$A \begin{bmatrix} 1 + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 & 2(\xi\eta - \zeta) & 2(\xi\zeta + \eta) \\ 2(\xi\eta + \zeta) & 1 - \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 & 2(\eta\zeta - \xi) \\ 2(\xi\zeta - \eta) & 2(\eta\zeta + \xi) & 1 - \xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

次に、図-2に示すように、 γ, α, ϕ の順に定義したオイラー角 (α, γ, ϕ) で座標変換行列 T を表すと

$$T^E(\alpha, \gamma, \phi) = \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \gamma & -\sin \phi \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \phi \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \phi \sin \alpha \sin \gamma & \\ \sin \phi \cos \alpha & \cos \phi \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\cos \phi \sin \gamma & \sin \phi \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \\ -\sin \phi \sin \alpha \cos \gamma & -\cos \phi \sin \alpha \cos \gamma & \end{bmatrix}$$

となる。

3. 空間固定三軸回りの微小回転角

前節で定義した三種類の回転成分は、梁などの回転自由度として扱う場合、仕事の上でそれぞれに対応するモーメント成分が通常の空間固定三軸回りの成分にはならない。剛体変位除去の手法に基づく梁の有限変位解析の定式化では、節点変位自由度は二節点間の相対変位

として扱われるため、その大きさは要素長が小さい限り微小とみなせる。この場合、その微小な相対回転角成分を、空間固定三軸回りの微小回転角で表すと便利なことがある。そこで三種類の三変数の相対回転角について、その空間固定三軸回り成分との関係をそれぞれについて求める。まず、図-3のように (x, y, z) 座標系で、 z -軸に横たわる梁を考える。この梁の一端を節点1とし、他端を節点2とする。 (x, y, z) 座標系の単位直角基底ベクトルを (i_x, i_y, i_z) とし、梁の変形とともに回転する埋め込み座標の基底ベクトルを両節点で正規直交化したものをそれぞれ (i_{x1}, i_{y1}, i_{z1}) , (i_{x2}, i_{y2}, i_{z2}) とする⁹⁾。この時、両端の埋め込み座標の間の相対回転量が微小であれば、それらの基底ベクトルの間には、幾何学的考察により、以下のような関係が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta_{z1}^2 & -\Delta\theta_{y1}^2 \\ -\Delta\theta_{z1}^2 & 1 & \Delta\theta_{x1}^2 \\ \Delta\theta_{y1}^2 & -\Delta\theta_{x1}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここに、 $\Delta\theta_{x1}^2, \Delta\theta_{y1}^2, \Delta\theta_{z1}^2$ は節点2の節点1に対する相対回転角で、変形後の節点1の埋め込み座標系 (x_1, y_1, z_1) 三軸回りの成分である。

ところで、この変形後の両節点における基底ベクトルと固定座標系の基底ベクトルとの関係は、座標変換行列 T を用いて関係付けることができる。例えば、ロドリゲス変数を用いた場合は、以下のように表される。

$$\begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} = T^T(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = T^T(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここに、添え字1, 2はそれぞれ、節点1, 2での値であることを示す。この二式より以下の関係が導かれる⁷⁾。

$$\begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = T^T(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) T(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

今、 $T^T(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ を $T^T(\xi_1 + \Delta\xi_1, \eta_1 + \Delta\eta_1, \zeta_1 + \Delta\zeta_1)$ とおいて、テーラー展開すると、

$$\begin{aligned} T^T(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) &\simeq T^T(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \\ &+ \frac{\partial T^T}{\partial \xi_1} \Delta\xi_1 + \frac{\partial T^T}{\partial \eta_1} \Delta\eta_1 + \frac{\partial T^T}{\partial \zeta_1} \Delta\zeta_1 \\ &= T^T(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + \Delta T^T(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。これを式(10)に代入すると次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} \simeq [I + [\Delta T^T] T] \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

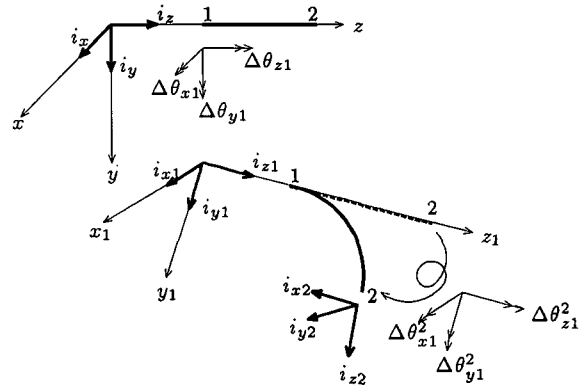


図-3 基底ベクトル

ここで、 I は 3×3 の単位行列である。

式(7)と式(12)の行列の非対角項成分同志を等置することにより、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{x1}^2 \\ \Delta\theta_{y1}^2 \\ \Delta\theta_{z1}^2 \end{Bmatrix} \simeq 2A \begin{bmatrix} 1 & \zeta_1 & -\eta_1 \\ -\zeta_1 & 1 & \xi_1 \\ \eta_1 & -\xi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\xi_1 \\ \Delta\eta_1 \\ \Delta\zeta_1 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここで $(\Delta\xi_1, \Delta\eta_1, \Delta\zeta_1)$ は空間固定座標系の成分であるが、 $(\Delta\theta_{x1}^2, \Delta\theta_{y1}^2, \Delta\theta_{z1}^2)$ は局所系の成分なので、

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{x1}^2 \\ \Delta\theta_{y1}^2 \\ \Delta\theta_{z1}^2 \end{Bmatrix} = T^T(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{x1} \\ \Delta\theta_{y1} \\ \Delta\theta_{z1} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

の関係を用いて空間固定座標系の成分に書き換えると以下ようになる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{x1} \\ \Delta\theta_{y1} \\ \Delta\theta_{z1} \end{Bmatrix} \simeq 2A \begin{bmatrix} 1 & -\zeta_1 & \eta_1 \\ \zeta_1 & 1 & -\xi_1 \\ -\eta_1 & \xi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\xi_1 \\ \Delta\eta_1 \\ \Delta\zeta_1 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

この逆関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi_1 \\ \Delta\eta_1 \\ \Delta\zeta_1 \end{Bmatrix} \simeq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi_1^2 + 1 & \xi_1 \eta_1 + \zeta_1 & \xi_1 \zeta_1 - \eta_1 \\ \xi_1 \eta_1 - \zeta_1 & \eta_1^2 + 1 & \eta_1 \zeta_1 + \xi_1 \\ \xi_1 \zeta_1 + \eta_1 & \eta_1 \zeta_1 - \xi_1 & \zeta_1^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_{x1} \\ \Delta\theta_{y1} \\ \Delta\theta_{z1} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

さて、回転擬ベクトル (φ, χ, ψ) についても式(8)以下の同じ操作をすれば、式(15)に相当する関係式を導くことができ、次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{x1} \\ \Delta\theta_{y1} \\ \Delta\theta_{z1} \end{Bmatrix} \simeq e^P \begin{Bmatrix} \Delta\varphi_1 \\ \Delta\chi_1 \\ \Delta\psi_1 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここに e^P は 3×3 の行列で、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} e_{11}^P &= \frac{\varphi_1^2}{\theta^2} + \frac{(\chi_1^2 + \psi_1^2) \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \\ e_{12}^P &= \frac{\chi_1 \varphi_1}{\theta^2} + \frac{(\psi_1 - \psi_1) \cos \theta}{2(1 - \cos \theta)} - \frac{\chi_1 \varphi_1 \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \\ e_{13}^P &= \frac{\varphi_1 \psi_1}{\theta^2} - \frac{(\chi_1 - \chi_1 \cos \theta)}{2(1 - \cos \theta)} - \frac{\varphi_1 \psi_1 \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{21}^P &= \frac{\chi_1 \varphi_1}{\theta^2} - \frac{(\psi_1 - \psi_1 \cos \theta)}{2(1 - \cos \theta)} - \frac{\chi_1 \varphi_1 \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \\
e_{22}^P &= \frac{\chi_1^2}{\theta^2} + \frac{(\varphi_1^2 + \psi_1^2) \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \\
e_{23}^P &= \frac{\chi_1 \psi_1}{\theta^2} + \frac{(\varphi_1 - \varphi_1 \cos \theta)}{2(1 - \cos \theta)} - \frac{\chi_1 \psi_1 \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \\
e_{31}^P &= \frac{\varphi_1 \psi_1}{\theta^2} + \frac{(\chi_1 - \chi_1 \cos \theta)}{2(1 - \cos \theta)} - \frac{\varphi_1 \psi_1 \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \\
e_{32}^P &= \frac{\chi_1 \psi_1}{\theta^2} - \frac{(\varphi_1 - \varphi_1 \cos \theta)}{2(1 - \cos \theta)} - \frac{\chi_1 \psi_1 \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \\
e_{33}^P &= \frac{\psi_1^2}{\theta^2} + \frac{(\chi_1^2 + \varphi_1^2) \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)}
\end{aligned}$$

また式 (17) の逆関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varphi_1 \\ \Delta \chi_1 \\ \Delta \psi_1 \end{Bmatrix} \simeq E^P \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{x1} \\ \Delta \theta_{y1} \\ \Delta \theta_{z1} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここに E^P は 3×3 の行列で、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
E_{11}^P &= \frac{\varphi_1^2}{\theta^2} + \frac{(\chi_1^2 + \psi_1^2) \sin \theta}{\theta^3} \\
E_{12}^P &= \frac{\chi_1 \varphi_1 - \psi_1 + \psi_1 \cos \theta}{\theta^2} - \frac{\chi_1 \varphi_1 \sin \theta}{\theta^3} \\
E_{13}^P &= \frac{\chi_1 + \varphi_1 \psi_1 - \chi_1 \cos \theta}{\theta^2} - \frac{\varphi_1 \psi_1 \sin \theta}{\theta^3} \\
E_{21}^P &= \frac{\chi_1 \varphi_1 + \psi_1 - \psi_1 \cos \theta}{\theta^2} - \frac{\chi_1 \varphi_1 \sin \theta}{\theta^3} \\
E_{22}^P &= \frac{\chi_1^2}{\theta^2} + \frac{(\varphi_1^2 + \psi_1^2) \sin \theta}{\theta^3} \\
E_{23}^P &= \frac{-\varphi_1 + \chi_1 \psi_1 + \varphi_1 \cos \theta}{\theta^2} - \frac{\chi_1 \psi_1 \sin \theta}{\theta^3} \\
E_{31}^P &= \frac{-\chi_1 + \varphi_1 \psi_1 + \chi_1 \cos \theta}{\theta^2} - \frac{\varphi_1 \psi_1 \sin \theta}{\theta^3} \\
E_{32}^P &= \frac{\varphi_1 + \chi_1 \psi_1 - \varphi_1 \cos \theta}{\theta^2} - \frac{\chi_1 \psi_1 \sin \theta}{\theta^3} \\
E_{33}^P &= \frac{\psi_1^2}{\theta^2} + \frac{(\chi_1^2 + \varphi_1^2) \sin \theta}{\theta^3}
\end{aligned}$$

一方、オイラー角 (α, γ, ϕ) についても式 (8) 以下の同じ操作をするか⁷⁾、または幾何学的考察により⁸⁾式 (15)、(16) に相当する双対関係式を以下のように導くことができる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{Bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -\cos \gamma & 0 & \sin \gamma \cos \alpha \\ 0 & 1 & \sin \alpha \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \gamma \\ \Delta \phi \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \gamma \\ \Delta \phi \end{Bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -\cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ -\sin \gamma \tan \alpha & 1 & -\cos \gamma \tan \alpha \\ \sin \gamma / \cos \alpha & 0 & \cos \gamma / \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{Bmatrix} \quad (20)$$

4. 節点相対変位

変位は有限だが、ひずみは微小である直線梁要素を考える。前節の梁の両端の節点変位ベクトルを、並進変位を含めてまず次式のように表す。

$$\bar{d} \equiv [\bar{d}_1^T \quad \bar{d}_2^T]^T \quad (21)$$

$$\bar{d}_i \equiv [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]^T \quad (i=1, 2)$$

ここに u_i, v_i, w_i は x, y, z -軸方向の並進変位であり、 $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ は x, y, z -軸右ねじ回りの回転角である。但し、 $(\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$ は有限な値としては線形ベクトル量ではないが、ここではそれを形式的に用いておき、最終的な定式化の中では、微小回転角として扱える。二節点間の相対回転角を得る目的でのみ用いる。次に、同じ節点変位ベクトルを、有限回転を表せるように回転擬ベクトル、ロドリゲス変数、オイラー角を用いた場合について、それぞれ上付添え字 P, R, E を用いて次式のように定義する。

$$d^P \equiv [d_1^{PT} \quad d_2^{PT}]^T \quad (22)$$

$$d_i^P \equiv [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_i \quad \chi_i \quad \psi_i]^T \quad (i=1, 2)$$

$$d^R \equiv [d_1^{RT} \quad d_2^{RT}]^T \quad (23)$$

$$d_i^R \equiv [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \xi_i \quad \eta_i \quad \zeta_i]^T \quad (i=1, 2)$$

$$d^E \equiv [d_1^{ET} \quad d_2^{ET}]^T \quad (24)$$

$$d_i^E \equiv [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \alpha_i \quad \gamma_i \quad \phi_i]^T \quad (i=1, 2)$$

初期状態において節点 1 が原点 $(0, 0, z_0)$ 、節点 2 が $(0, 0, z_0 + \ell)$ に横たわっている要素が剛体のまま移動した場合、節点 1 の節点変位は形式的に次式で表される。

$$D_1 \equiv [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1}]^T \quad (25)$$

この節点 1 の変位 D_1 を用いると、このときの節点 2 の変位は次式のように表される。

$$D_2 = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} + T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{Bmatrix} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ここで、これらの変位ベクトルをそれぞれ両節点の「剛体変位」と定義し、一要素の剛体変位を次式で表す。

$$D \equiv [D_1^T \quad D_2^T]^T \quad (27)$$

要素が変形し、 $\bar{d}$ で表される変位が生じているとする。ここで、節点 1 を原点とし、節点 1 で要素軸に接する局所座標系 (x_1, y_1, z_1) を図-4 のように定義する。このとき、剛体変位 D に対する $\bar{d}$ の相対変位は次式のように表される。

$$r \equiv [r_1^T \quad r_2^T]^T \quad (28)$$

$$r_1 \equiv \bar{d}_1 - D_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$r_2 \equiv \bar{d}_2 - D_2$$

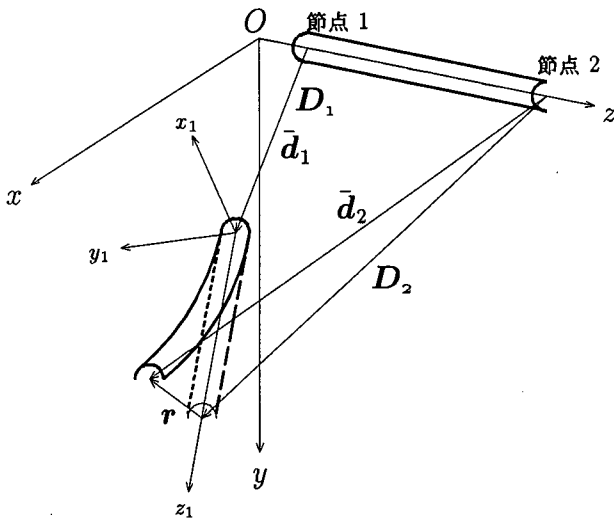


図-4 節点変位

$$= \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \\ w_2 - w_1 \end{Bmatrix} - T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{Bmatrix} \\ \theta_{x2} - \theta_{x1} \\ \theta_{y2} - \theta_{y1} \\ \theta_{z2} - \theta_{z1} \end{bmatrix}$$

このように、要素の「剛体的な変位」成分を、節点 1 の剛体変位 D_1 で代表させることによって、相対変位 r_2 には要素の実質的な変形を受け持たせる。いかなる変形履歴の下でも微小ひずみの仮定が成立するならば、要素分割を細かくして r_2 が十分に小さくなるようにすれば、この相対変位は微小変位理論の範囲で扱える。ここでは、有限要素法を用いるので、要素の長さ ℓ は十分に小さくとることができる。それ故、式 (28) の相対回転角 $(\theta_{x2} - \theta_{x1}, \theta_{y2} - \theta_{y1}, \theta_{z2} - \theta_{z1})$ は微小回転角とみなすことができる。前述した通り、回転角 $(\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$ はベクトル量ではないが、その微小な変動量は式 (15) によってロドリゲス変数と、式 (17) によって回転擬ベクトルと、式 (19) によってオイラー角と関係づけられる。そこで、要素の有限回転を表すこれらの回転角成分を、両節点での値の平均を用いて表すと、相対変位 r_2 は、回転擬ベクトルを用いた場合 (r_2^P)、ロドリゲス変数を用いた場合 (r_2^R)、オイラー角を用いた場合 (r_2^E) のそれぞれについて、以下のように表せる (但し、回転擬ベクトルを用いた場合は煩雑な式になるので、行列の成分については割愛する)。

$$r_2^P = \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} u_2 - u_1 - \left(\frac{\varphi_1 \psi_1}{\theta^2} C + \frac{\chi_1}{\theta} S \right) \ell \\ v_2 - v_1 - \left(\frac{\psi_1 \chi_1}{\theta^2} C - \frac{\varphi_1}{\theta} S \right) \ell \\ w_2 - w_1 - \left(-1 - \left(\frac{\psi_1}{\theta} \right)^2 \right) C \ell \\ \frac{1}{\theta^3} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 - \varphi_1 \\ \chi_2 - \chi_1 \\ \psi_2 - \psi_1 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$r_2^R = \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} u_2 - u_1 - 2\ell(\xi_1 \zeta_1 + \eta_1) A \\ v_2 - v_1 - 2\ell(\eta_1 \zeta_1 - \xi_1) A \\ w_2 - w_1 + 2\ell(\xi_1^2 + \eta_1^2) A \\ A \begin{bmatrix} 2 & -(\zeta_1 + \zeta_2) & \eta_1 + \eta_2 \\ \zeta_1 + \zeta_2 & 2 & -(\xi_1 + \xi_2) \\ -(\eta_1 + \eta_2) & \xi_1 + \xi_2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \zeta_2 - \zeta_1 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$r_2^E = \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} u_2 - u_1 - \ell \cos \alpha_1 \sin \gamma_1 \\ v_2 - v_1 - \ell \sin \alpha_1 \\ w_2 - w_1 - \ell (\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 - 1) \\ \begin{bmatrix} -\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & 0 & \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ 0 & 1 & \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ -\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & 0 & \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \\ \phi_2 - \phi_1 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

5. 剛性方程式の導出

5.1 回転自由度に回転群を用いる場合

節点変位ベクトル d (d^P または d^R または d^E) と仕事をする節点外力ベクトルを次式で定義する。

$$\underline{f} \equiv [\underline{f}_1^T \quad \underline{f}_2^T]^T \quad (32)$$

$$\underline{f}_i \equiv [F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{zi} \quad \underline{M}_{xi} \quad \underline{M}_{yi} \quad \underline{M}_{zi}]^T \quad (i=1, 2)$$

ここで、 F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} は x, y, z -軸方向の節点外力、 $\underline{M}_{xi}, \underline{M}_{yi}, \underline{M}_{zi}$ は、回転擬ベクトルかロドリゲス変数かオイラー角の各成分と仕事をするモーメント成分であり、通常の x, y, z -軸回りのモーメント成分ではない。

今、梁要素が節点外力 $\underline{f}$ を受け、変位 d を生じて釣り合っている状態から、 δd だけ仮想的な変動が生じたとする。このとき、 $\underline{f}$ が δd に対してする仮想仕事は、 $\underline{f}^T \delta d$ と表される。

一方、この状態を、局所座標系 (x_1, y_1, z_1) における実質変形によって表してみる。要素の実質変形を表す相対変位ベクトル r_2 は、その回転角成分が x, y, z -軸回りの微小回転とみなせるので、座標変換行列 T を用いて、以下のように局所系に書き直すことができる。

$$r_2^\ell = T_o^T r_2 \quad (33)$$

ここで、 T_o は次式で定義される。

$$T_o \equiv \begin{bmatrix} T & o_3 \\ o_3 & T \end{bmatrix} \quad (34)$$

ここで、 $\mathbf{o}_3$ は、 3×3 の零行列である。この $\mathbf{r}_2^\ell$ と仕事を節点外力ベクトルを $\mathbf{f}_2^\ell$ と表し、次式で定義する。

$$\mathbf{f}_2^\ell \equiv [F_{x2}^\ell \ F_{y2}^\ell \ F_{z2}^\ell \ M_{x2}^\ell \ M_{y2}^\ell \ M_{z2}^\ell]$$

ここで、 $F_{x2}^\ell, F_{y2}^\ell, F_{z2}^\ell$ は節点 2 における x_1, y_1, z_1 -軸方向の節点外力、 $M_{x2}^\ell, M_{y2}^\ell, M_{z2}^\ell$ は節点 2 における x_1, y_1, z_1 -軸回りのモーメント外力である。

以上を用いて、仮想仕事は局所座標系では $\mathbf{f}_2^{\ell T} \delta \mathbf{r}_2^\ell$ と表せるから、以下のような仮想仕事式が書ける^{17), 18)}。

$$\mathbf{f}_2^T \delta \mathbf{d} = \mathbf{f}_2^{\ell T} \delta \mathbf{r}_2^\ell \quad (35)$$

これに、 $\mathbf{r}_2^\ell = \mathbf{T}_o^T \mathbf{r}_2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2^T \delta \mathbf{d} &= \mathbf{f}_2^{\ell T} \delta \{ \mathbf{T}_o^T \mathbf{r}_2 \} \\ &= \mathbf{f}_2^{\ell T} \left[\frac{\partial \mathbf{T}_o^T}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{r}_2 + \mathbf{T}_o^T \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{d}} \right] \delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (36)$$

となり、ここで、

$$\mathbf{R} \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{T}_o^T}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{r}_2 + \mathbf{T}_o^T \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{d}} \right] \quad (37)$$

と定義すると、

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}^T \mathbf{f}_2^\ell \quad (38)$$

という関係が得られる。ここで、 $\mathbf{R}$ は 6×12 の行列である。ところで、前節で述べたように $\mathbf{r}$ は微小と見なせるから、局所系 (x_1, y_1, z_1) において、 $\mathbf{f}_2^\ell$ と $\mathbf{r}_2^\ell$ とは、微小変位理論の剛性行列で結びつけることができる。自由度 $\bar{\mathbf{d}}$ に対応する周知の線形剛性行列 12×12 の右下 6×6 の小行列を $\mathbf{K}$ とすると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2^\ell &= \mathbf{K} \mathbf{r}_2^\ell \\ &= \mathbf{K} \mathbf{T}_o^T \mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (39)$$

ここに、 $\mathbf{K}$ は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_x}{\ell^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_x}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI_x}{\ell} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{\ell} \end{bmatrix}$$

ここで、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 ℓ は要素長、 A は断面積、 I_x は x -軸回りの断面二次モーメント、 I_y は y -軸回りの断面二次モーメント、 J はねじり定数である。式 (39) を式 (38) に代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_o^T \mathbf{r}_2 \quad (40)$$

この式は変位 $\mathbf{d}$ に関する非線形方程式になっているので、 $\mathbf{d}$ に関する増分をとれば、接線剛性方程式が以下のように得られる。

$$\Delta \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} \mathbf{K} \mathbf{T}_o^T \mathbf{r}_2$$

$$\begin{aligned} &+ \mathbf{R}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{T}_o}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_o^T \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{K} \mathbf{T}_o^T \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \right] \Delta \mathbf{d} \\ &\equiv \mathbf{K}_t(\mathbf{d}) \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (41)$$

ここに $\mathbf{K}_t$ は接線剛性行列で、回転擬ベクトル、ロドリゲス変数、オイラー角のいずれを用いた場合にも解析的に完全な対称行列となった。尚、これらの増分式はかなり複雑な式になるため、その式の展開と対称性の確認には、文字処理用プログラム Mathematica を用いた。回転擬ベクトルやロドリゲス変数および対応するモーメント成分は、回転の主軸方向をベクトルで与えているので、 $\mathbf{T}$ で座標変換することができるが、オイラー角はそのような軸性ベクトル成分ではないので座標変換することはできない。つまり、回転擬ベクトルやロドリゲス変数を用いた場合は、式 (41) によって骨組や曲がり梁も解くことができるが、オイラー角だけを回転自由度に用いた場合は、骨組みや曲がり梁を解くことは困難である。一方、軸性ベクトルに対応するモーメント三成分は、主軸回りの一つのモーメントを表すので、一節点に二軸曲げやねじりを同時に受けるような載荷条件を式 (41) のままで解くことはできない。また、オイラー角三成分に対応するモーメント成分の物理的意味も不明瞭である。その意味では、第 3 節で導いた空間固定軸回りの微小回転角 $\Delta \theta_{xi}, \Delta \theta_{yi}, \Delta \theta_{zi}$ に対して、式 (41) を導いた方が便利である。

尚、回転擬ベクトルは、式の下母に頻出する θ が零に近づくとき数値計算が不能になることがあるため、そのような点では、解析計算で得られるその式の極限值で置き換えるなどの工夫を要する（因みに、このような回転角に依存する特異性を回避するには四元数体 (quaternion) を用いる方法もある¹⁵⁾）。また、ロドリゲス変数では、 θ が π 付近で微小とみなせる変動をしても、 $\tan(\theta/2)$ はかなり大きな変動をするので、要素数を相当に多くとらないと相対変位を微小とみなすことはできない。つまり、いずれの回転角を自由度に選ぶことにもそれぞれの難点がある。

5.2 回転自由度に空間固定三軸回りの回転角を用いる場合

節点変位ベクトル $\bar{\mathbf{d}}$ と仕事をする節点外力ベクトルを、次式で定義する。

$$\mathbf{f} \equiv [f_1^T \ f_2^T]^T \quad (42)$$

$$\mathbf{f}_i \equiv [F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi}]^T \quad (i=1, 2)$$

ここで、 M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} は、 x, y, z -軸回りのモーメント成分である。 $\mathbf{f}$ と $\bar{\mathbf{d}}$ に対して、前節の式 (35) に対応する仮想仕事式が以下のように書ける。

$$\mathbf{f}^T \delta \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{f}_2^{\ell T} \delta \mathbf{r}_2^\ell \quad (43)$$

これの右辺を式 (36) と同様に展開すると次式が得られる。

$$f^T \delta \bar{d} = f_2^{\ell T} R \delta d \quad (44)$$

ここで、式 (16) または (20) を用いて、 $\bar{d}$ を d に書き換えると次式が得られる。

$$f^T \delta \bar{d} = f_2^{\ell T} R E \delta \bar{d} \quad (45)$$

ここで E は、 $\delta d = E \delta \bar{d}$ の関係を与える行列で、例えばロドリゲス変数を用いた場合には次式で与えられる。

$$E = \begin{bmatrix} e_1 & o_6 \\ o_6 & e_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$e_i = \begin{bmatrix} I & o_3 \\ o_3 & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi_i^2 + 1 & \xi_i \eta_i - \zeta_i & \xi_i \zeta_i + \eta_i \\ \xi_i \eta_i + \zeta_i & \eta_i^2 + 1 & \eta_i \zeta_i - \xi_i \\ \xi_i \zeta_i - \eta_i & \eta_i \zeta_i + \xi_i & \zeta_i^2 + 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

ここに、 o_6 は 6×6 の零行列である。以上より、式 (38) と式 (40) に対応して、次式が得られる。

$$\begin{aligned} f &= E^T R^T f_2^{\ell} \\ &= E^T R^T K T_o^T r_2 \end{aligned} \quad (47)$$

この式の右辺は、変位 d に関する非線形方程式であるから、まず、 d に関する増分をとってから、 $\Delta d = E \Delta \bar{d}$ を代入すると、次式が得られる。

$$\Delta f = \left[\frac{\partial E^T}{\partial d} R^T K T_o^T r_2 E + E^T K_t E \right] \Delta \bar{d} \quad (48)$$

この [] で囲まれた接線剛性行列は、回転擬ベクトル、ロドリゲス変数、オイラー角のいずれを用いた場合も解析的には完全な対称行列にはならない。これは、第一項が対称行列にはならないためである。尤も、次章で示す一軸曲げやねじりを受ける梁を試算してみた限りにおいては、不つり合い力が零となるつり合い状態においては、接線剛性行列は数値的には対称行列となった（但し、これは Simo¹⁵⁾におけるような、つり合い状態における幾何剛性の接線行列の対称性の議論とは特に対応するものではない）。

ところで、式 (41) を利用すれば、 E の増分をとらなくても Δf と $\Delta \bar{d}$ の関係を導くことができる。つまり $\Delta \underline{f} = E \Delta f$ の関係を用いれば、式 (41) は $E \Delta f = K_t E \Delta \bar{d}$ と書ける。ここで、式 (15) または (19) を用いて、 E の逆行列 E^{-1} を定義すれば、以下のような接線剛性方程式が導かれる。

$$\Delta \underline{f} = E^{-1} K_t E \Delta \bar{d} \quad (49)$$

式 (15) ～式 (20) の関係から分かるように、 E は直交行列ではないので、 $E^{-1} K_t E$ は対称行列にはならない。また、次章で示す一軸曲げやねじりを受ける梁を試算してみたところ、つり合い状態でもこの行列は対称行列にはならなかった。

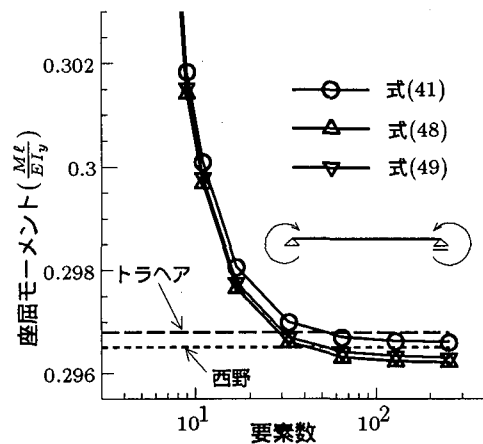


図-5 解の収束性

さて、前節の式 (35) をポテンシャルの d に関する一階微分と捉えるなら、式 (41) はポテンシャルの d に関する二階微分となる。一方、 $\Delta d = E \Delta \bar{d}$ は d を $\bar{d}$ で微分して得たものではないから、式 (48) や式 (49) はポテンシャルを $\bar{d}$ と d という異なる変数で二回微分したものであり、接線剛性行列が対称となる保証はない。

6. 数値計算

6.1 直線梁の横倒れ座屈

前節までで導いた三種類の接線剛性方程式 (41) (48) (49) について、解析解の存在する直線梁の横倒れ座屈問題で解の収束性を比較する。但し、ここでは有限回転を表す回転群には回転擬ベクトルを用いる。解析する梁の諸元は、ヤング率 $E = 200 \text{ GN/m}^2$ 、せん断弾性係数 $G = 77.2 \text{ GN/m}^2$ 、軸長 $\ell = 10.244 \text{ m}$ 、断面積 $A = 9.288 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ 、弱軸回りの断面二次モーメント $I_y = 3.871 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ 、強軸回りの断面二次モーメント $I_x = 1.1363 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ 、ねじれ定数 $J = 5.89 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ とし、単純支持で等曲げを受けるものとする。但し、両端で面外の回転は自由とし、ねじれは拘束する。式 (41) を用いる場合は、 z -軸に横たわる梁の両端で回転擬ベクトルの $\Delta \psi$ 成分を零として回転主軸を xy 平面に拘束し、モーメント荷重の回転主軸は y -軸回りに与える。式 (48) と式 (49) を用いる場合は、両端でねじれ角成分 $\Delta \theta_z$ を零とし、 y -軸回りにモーメント荷重を与える。このとき、無次元化したトラヘアの解析解¹⁹⁾は 0.29681、西野の解析解²⁰⁾は 0.29651 となる。但し解析解の計算上、反りねじり定数は零とした。図-5に、各接線剛性方程式による数値解を要素数に対して示す。但し座屈点の定義は、接線剛性行列の対称、非対称にかかわらず、この行列式が零になる点とした⁸⁾。いずれの式を用いた数値解も、トラヘアの解析解に対する相対誤差が $-0.2 \sim -0.07 \%$ 、西野の解析解に対する相

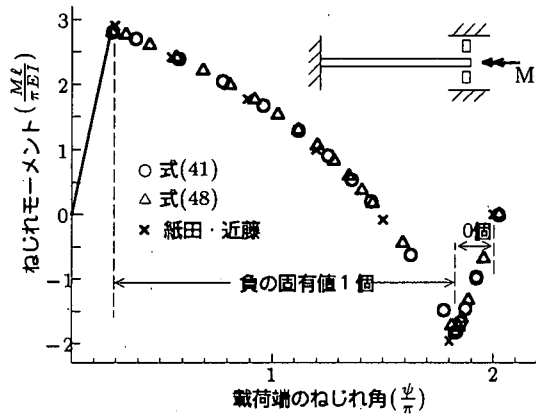


図-6 ねじれを受ける梁の荷重-ねじれ曲線

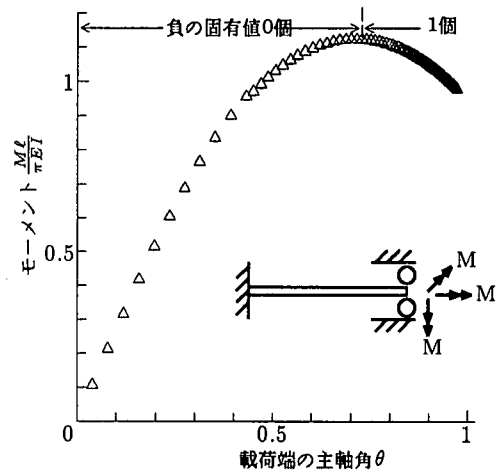


図-8 三軸曲げを受ける梁の荷重-主軸角曲線

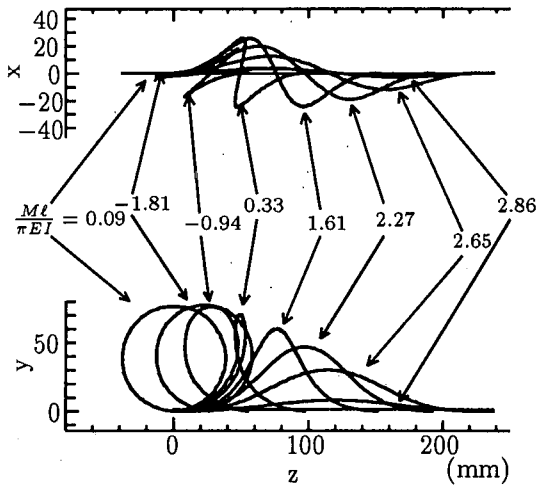


図-7 ねじりを受ける直線梁の挙動

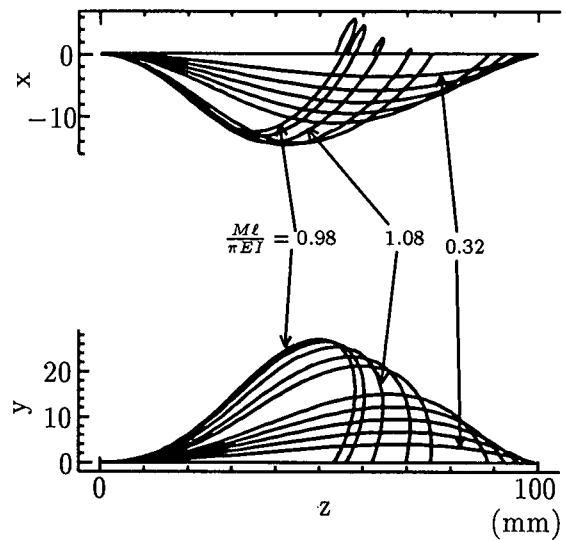


図-9 三軸曲げを受ける直線梁の挙動

対誤差が $-0.1 \sim +0.03 \%$ の範囲に収束している。空間固定三軸回りの微小回転角を用いた式 (48) と式 (49) では、前者に対する後者の相対誤差が 0.03% と比較的近い値を取るが、有限回転を表す回転群を自由度に用いた式 (41) は、これらよりも 0.1% 程度、高めの値を取り、これが解析解には最も近い。

6.2 ねじりを受ける直線梁の挙動

前節の解析では、式 (48) による解と式 (49) による解は、比較的近い値に収束することが分かったので、ここでは、空間固定三軸回りの回転角を自由度とした式 (48) と有限回転を表す回転群を自由度に用いた式 (41) で、ねじりを受ける直線梁の座屈後挙動を解析し比較してみる。図-6 に示すように、一端が固定、他端が軸方向の並進変位とねじれのみを自由とした直線梁の先端にねじりモーメントを载荷する。尚、ここでは対称条件から梁の半分だけを解析する。 z -軸に横たわる梁の中央(対称面)で x -軸方向の並進変位と x -軸回りの回転を拘束し、最大面外変位の発生する方向を y -軸方向に限定す

る。梁の諸元は、ヤング率 $E = 71240 \text{ N/mm}^2$ 、せん断弾性係数 $G = 27190 \text{ N/mm}^2$ 、軸長 $\ell = 240 \text{ mm}$ 、断面二次モーメント(正方形断面) $I_y = 0.0833 \text{ mm}^4$ 、ねじれ定数 $J = 2.16 \text{ mm}^4$ とする。要素数は 60 要素とする。

荷重変位曲線と座屈後形状をそれぞれ図-6、図-7 に示す。この問題では、式 (48) による解と式 (41) による解は有効数字四桁まで一致した。図-6 に紙田と近藤³⁾の解を合わせて示したが、本数値解の挙動とよく一致している。同一のねじれ角に対するデータが各解に対して揃っていないので正確な比較はできないが、本数値解は全体的に紙田と近藤の解よりも数パーセント程度高めの値を取っている。つり合い状態は、最初の分岐点の後、接線剛性行列の負の固有値数が一個となる不安定経路に移り、ねじりモーメントは減少していき、それに伴って座屈形状の yz -平面への投影は、円に近づいてく

る。やがて荷重は極小点に達してつり合いは、接線剛性行列の負の固有値数が零個となる安定経路に移るが、この極小点では座屈形状はまだ真円にはなっていない。その後、安定経路上でねじりモーメントが増加していき、零になった時に座屈形状は真円となる。これは紙田と近藤の結果とも一致する。

6.3 三軸曲げを受ける直線梁の挙動

空間固定三軸回りの回転角を自由度とした式(48)を用いて、先端に三軸曲げ(二軸曲げとねじり)を受ける直線梁を解析してみる。図-8 に示すように、 z -軸に横たわる梁の一端が固定、他端が断面 x, y -軸二方向の並進変位のみを拘束した直線梁の先端に大きさの等しい三つのモーメントを x, y, z -軸回りに載荷する。梁の諸元は、ヤング率 $E = 71240 \text{ N/mm}^2$ 、せん断弾性係数 $G = 27190 \text{ N/mm}^2$ 、軸長 $\ell = 100 \text{ mm}$ 、断面二次モーメント(正方形断面) $I_y = 0.0833 \text{ mm}^4$ 、ねじれ定数 $J = 2.16 \text{ mm}^4$ とする。要素数は 60 要素とする。

荷重変位曲線と変形状をそれぞれ図-8、図-9 に示す。載荷開始直後の安定なつり合い経路上では、梁は面外方向に徐々にたわみ出す。やがて荷重がピークに達すると、載荷部に円形の小さいこぶを生じ、不安定なつり合いへと移行し、荷重の減少とともにこのこぶが大きくなっていく。載荷端の主軸角 θ が 0.97 まで減少したところで、接線剛性行列の負の固有値数が 1 から 3 に移ったため、この近傍に分岐点があることが予測されるが、今回は、その直前までを計算した。

7. まとめ

本研究では、空間梁の外力仮想仕事において、回転自由度に各種の回転群三変数を用いた場合の定式化と、空間固定三軸回りの回転角を用いた場合の定式化とを導出し、接線剛性行列の対称性、精度などを比較した。いずれの回転群三変数を用いた場合も、これを回転自由度とした場合には、基本剛性行列の接線行列は解析的に対称行列となったが、空間固定三軸回りの回転角を回転自由度とした場合は解析的には非対称行列となった。但し、その場合もつり合い状態では数値的には対称行列となった。数値計算結果は、回転自由度に回転群三変数を用いた定式化と空間固定三軸回りの回転角を用いた定式化とで特に有意な差は認められなかった。そこで、回転自由度に空間固定三軸回りの回転角を用いた定式化によって、一節点に二軸曲げとねじりを同時に受けるような構造系を解析してみた。これらのことより、回転自由度の選択によって、より多様な荷重条件を容易に解析できる可能性を示した。

参考文献

- 1) Argyris, J : Excursion into large rotations, *Comput.*

- Meths. in Appl. Mech. and Eng.*, V. 32, 85-155, 1982.
- 2) 紙田 徹, 近藤 恭平: 梁の 3 次元大変形の有限要素法解析(第 1 報), 日本航空宇宙学会誌 43 巻, 335-345, 1995.
- 3) 紙田 徹, 近藤 恭平: 梁の 3 次元大変形の有限要素法解析(第 2 報), 日本航空宇宙学会誌 43 巻, 344-349, 1995.
- 4) 石原 昌文: 梁の 3 次元大変形解析のための有限要素法定式化(第 1 報), 日本航空宇宙学会誌 44 巻, 691-697, 1996.
- 5) 石原 昌文: 梁の 3 次元大変形解析のための有限要素法定式化(第 2 報), 日本航空宇宙学会誌 44 巻, 698-704, 1996.
- 6) Hui Cheng, Gupta, K. C.: An Historical Note on Finite Rotations, *J. of Appl. Mech.*, V. 56, 139-145, 1989.
- 7) Goto, Y., Li, X., Kasugai, T. and Obata, M.: Analysis of Greenhill problem by a co-rotational method, *J. of Struct. Eng.*, V. 41A, 411-420, 1995.
- 8) 後藤 文彦・小林 裕・岩熊 哲夫: オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析, 構造工学論文集, V. 43A, 333-338, 1997.
- 9) 後藤 芳顕・松浦 聖・長谷川 彰夫: 充実断面空間棒部材の有限変位理論の一定式化, 構造工学論文集, V. 31A, 183-196, 1985.
- 10) Goto, Y., Morikawa, Y. and Matsuura, S.: Direct lagrangian nonlinear analysis of elastic space rods using transfer matrix technique, *Proc. of JSCE, Struct. Eng./Earthquake Eng.* V. 5, No.1, 151s-160s, 1988.
- 11) 土木学会: 鋼構造物の終局強度と設計, 鋼構造シリーズ 6, 付録編 第 3 編, 15-57, 1994.
- 12) 井浦 雅司: Corotational Formulation の精度に関する考察, 構造工学論文集, V. 40A, 407-414, 1994.
- 13) 後藤 文彦・芥木 功・清 成克・岩熊 哲夫: 有限変位梁要素の幾何学的あるいは仮想仕事の定式化と伸びひずみの考慮, 構造工学論文集, V. 44A, 307-314, 1998.
- 14) Simo, J. C.: The (symmetric) Hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics: Intrinsic definition and geometric interpretation, *Comput. Meths. in Appl. Mech. and Eng.*, V. 96, 189-200, 1992.
- 15) Simo, J. C. and Vu-Quoc, L.: A three-dimensional finite strain rod model. Part II: Computational Aspects, *Comput. Meths. in Appl. Mech. and Eng.*, V. 58, 79-116, 1986.
- 16) Makowski, J.; Stumpf, H.: On the "Symmetry" of Tangent Operators in Nonlinear Mechanics, *ZAMM*, V. 75, 189-198, 1995.
- 17) 阿井 正博, 西野 文雄: 離散系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用, 土木学会論文報告集, No. 304, 17-32, 1980.
- 18) 土木学会: 構造工学シリーズ 7, 構造工学における計算力学の基礎と応用, 143-149, 1996.
- 19) Vacharajittiphan, P., Woolcock, S. T. and Trahair, N. S.: Effect of in-plane deformation on lateral buckling, *J. Struct. Mech.*, ASCE, V. 3(1), 29-60, 1974.
- 20) 西野 文雄, 長谷川 彰夫: 土木学会編, 新体系土木工学 7, 構造物の弾性解析, 土木学会, 313-318, 1983.

(1998 年 4 月 24 日 受付)