

修正二段階制御法による不安定なケーブル構造解析

Analytical Method for Unstable Cable Structures Using Modified Two Level Control Method

三池亮次*・橋本淳也**・東高德***・小林一郎****

Ryoji MIIKE, Junya HASHIMOTO, Takanori HIGASHI and Ichiro KOBAYASHI

*正会員 工博 熊本工業大学教授 土木工学科 (〒860-0082 熊本市池田4丁目22-1)

**正会員 工修 八代工業高等専門学校助手 土木建築工学科 (〒866-8501 熊本県八代市平山新町2627)

***正会員 工修 建設省九州地方建設局 厳木ダム管理所 (〒849-3111 佐賀県東松浦郡厳木町広瀬446-4)

****正会員 工博 熊本大学教授 工学部環境システム工学科 (〒860-8555 熊本市黒髪2丁目39-1)

A static analytical method for unstable cable structures has previously presented by the authors, combining two level control method with the load control method, that is, modified two level control method. For such moored floating body anchored by the cables with large deformation, this method can be extended to some large kinematic equation on the basis of the principle of D'Alembert. This paper shows that a dynamic solution of the unstable cable structures can be solved by taking the inertia force into consideration of the modified two level control method above and using the central time difference method. As a numerical example, 6-member cable structure, is analyzed the process of large deformation, giving the forced displacements on the top of the cable.

Key Words: modified two level control method, large deformation, cable structure, dynamic analysis

1. 序論

ケーブルはケーブルトラスネット、ケーブルドーム、浮体の繫留、吊橋や斜張橋など様々な構造物に適用されている。

しかし、ケーブル部材自体は不安定な構造であるので、外力を受けて大変形した後のつり合い状態を推定することは困難な問題である。また、不安定なケーブルの構造解析において、ケーブル構造の軸方向力が0の場合解が不能、または解の収斂が悪くなるという問題を持っている。

このため、従来多くの研究者により、ケーブルの構造解析が試みられている。後藤ら¹⁾や波田ら²⁾は接線剛性マトリックスを用いて荷重制御法により、大変形構造解析をおこなっている。また、半谷ら³⁾による一般逆行列を用いたポテンシャルエネルギーが最小となるような解析も提案されている。小林ら⁴⁾もつり合い式の両辺の残差平方和を目的関数とした直接最小2乗法(改訂マルカート法)を用いて、ある折れ線ケーブルの大変形解析をおこなっている。

筆者らは先に大変形構造解析の基礎式^{5),6)}に基づ

き、二段階制御法(Two Level Control 法)と荷重制御法(Load Control 法)の組み合わせによる、不安定ケーブルの構造の解析手法を提案した^{7),8)}。この二段階制御法と荷重制御法の組み合わせ法を、修正二段階制御法(Modified Two Level Control 法)と呼ぶことにする。

この方法は、不安定次数分だけ制御変位を与えることで静定な構造として取り扱い構造解析をおこなうのであるが、これにより、無応力状態の初期形状から最終形状までのつり合いの過程を知ることができる。

また、修正二段階制御法が静的な解析だけでなく、慣性力を考えて逐次つり合いを追跡するといった動的な解析に対して拡張可能となることを提案する。

たとえば、浮体ケーブルのような大変形するケーブル構造に対して、D'Alembertの原理に従って慣性力を上記の静的二段階制御法の中に組み込み、運動方程式を導き、ケーブルの挙動解析を行った。

2. 大変形構造解析への定式化

2.1 大変形解析の基礎式

図-1は、あるケーブル構造が外力を受け、変形していく段階を示したものである。このとき、変形の段階を(a)変形前の状態、(b)変形の間中状態、(c)変形後の状態の3段階に分けるものとする。

図-1の変形前の状態の構造物に、ある外力 $\mathbf{p}'$ が作用した状態を変形の間中状態(太い実線)とする。外力によって生じた変形前の状態から変形の間中状態に至るまでの変位を $\mathbf{d}'$ とし、このときの部材に作用する断面力(ケーブル構造では軸力 N のみ)を $\mathbf{p}'_m$ とする。

$\Delta \mathbf{p}$ は各節点の外力を成分としたベクトル、 $\Delta \mathbf{p}_m$ は各節点の断面力を成分としたベクトルである。

この節において、添字'は変形の間中状態における値を示す。

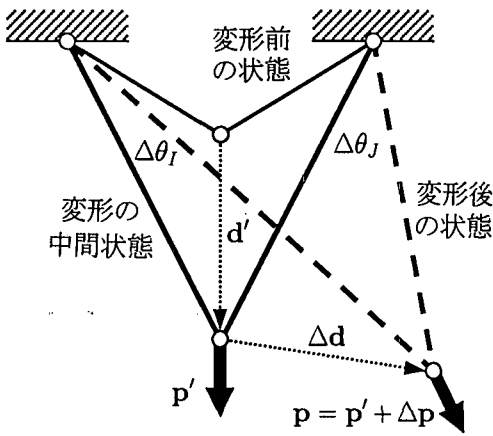


図-1 ケーブル構造の大変形状態

変形の間中状態から、さらに外力 $\Delta \mathbf{p}$ を受けて変形後の状態(太い破線)に至ったときの変位の増分を $\Delta \mathbf{d}$ 、部材断面力の増分を $\Delta \mathbf{p}_m$ とする。よって、変形後の状態では外力 $\mathbf{p}' + \Delta \mathbf{p}$ を受けており、それによって、部材断面力として $\mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{p}_m$ が作用している。

また、変形の間中状態から変形後の状態に至るまでの、断面力による部材の伸びを成分とする変形ベクトル⁹⁾を $\Delta \mathbf{e}_m$ 、有限変形に伴う部材の補正項を $\Delta \mathbf{e}_{m\theta}$ とする⁶⁾。なお、ケーブル部材のように軸力のみが生じる場合、ヤング率を E 、第 I 部材の断面積を A_I 、部材長を L'_I 、軸力を N'_I 、回転角を $\Delta \theta_I$ とすると、前者は $N'_I L'_I / EA_I$ を、後者は $(1 - \cos \Delta \theta_I) L'_I$ を成分とするベクトルとなる。

変形の間中状態から変形後の状態までの部材の変形ベクトル $\Delta \mathbf{e}_m^0$ を

$$\Delta \mathbf{e}_m^0 = \Delta \mathbf{e}_m + \Delta \mathbf{e}_{m\theta} \quad (1)$$

として、これをケーブルの有限変位仮想仕事の定理を用いると、そのマトリックス表示は、次式のような⁶⁾。

$$(\mathbf{p}' + \Delta \mathbf{p})^T \Delta \mathbf{d} = (\mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{p}_m)^T \Delta \mathbf{e}_m^0 \quad (2)$$

部材断面力ベクトルの増分 $\Delta \mathbf{p}_m$ と変形ベクトル $\Delta \mathbf{e}_m$ との間には、Hookeの法則

$$\Delta \mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{e}_m \quad (3)$$

が成立するものとする。 $\mathbf{K}_m$ はバネ定数 $k = EA_I / L_I$ からなる対角マトリックスである。

また、外力と部材断面力ベクトルの間には、接続マトリックス⁹⁾ $\mathbf{C}'$ および $\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}$ を用い

$$\mathbf{p}' = \mathbf{C}' \mathbf{p}'_m \quad (4)$$

$$\mathbf{p}' + \Delta \mathbf{p} = (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})(\mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{p}_m) \quad (5)$$

が成り立つ。式(5)を式(2)に用いると

$$\Delta \mathbf{e}_m^0 = (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T \Delta \mathbf{d} \quad (6)$$

となる。式(5)に、式(4)を代入すると

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \Delta \mathbf{p}_m + \Delta \mathbf{C} \mathbf{p}'_m \quad (7)$$

と書ける。式(7)に式(1),(3),(6)を用いると大変形構造解析の基礎式

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{b} \quad (8)$$

が成立する。ここに、

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T \quad (9)$$

$$\mathbf{b} = -(\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{e}_{m\theta} + \Delta \mathbf{C} \mathbf{p}'_m \quad (10)$$

である。

2.2 接線剛性マトリックスの誘導

2.1で導かれた大変形構造解析の基礎式である式(8)を用い、 $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$ において $\Delta \mathbf{p}$ を $\delta \Delta \mathbf{p}$ で微分し、接線剛性マトリックスを誘導する。ここで、 $\Delta \mathbf{e}_{m\theta}$ の成分は前述のとおり $(1 - \cos \Delta \theta_I) L'_I$ となるが $\cos \Delta \theta_I$ はTaylor展開より $\cos \Delta \theta_I = 1 - (\Delta \theta_I)^2 + \dots$ となることから $1 - \cos \Delta \theta_I = \Delta \theta_I^2$ となる。よって、 $\Delta \mathbf{e}_{m\theta}$ は2次の微小項となるので無視する。また、添字0は $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$ における値を意味するものとする

$$\begin{aligned} \delta \Delta \mathbf{p} &= \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Delta d_1} \Delta \mathbf{d} \quad \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Delta d_2} \Delta \mathbf{d} \quad \dots \right]_0 \delta \Delta \mathbf{d} \\ &+ [(\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T]_0 \delta \Delta \mathbf{d} \\ &+ \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{C}}{\partial \Delta d_1} \mathbf{p}'_m \quad \frac{\partial \Delta \mathbf{C}}{\partial \Delta d_2} \mathbf{p}'_m \quad \dots \right]_0 \delta \Delta \mathbf{d} \\ &\equiv [\mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G] \delta \Delta \mathbf{d} \\ &\equiv \mathbf{K}'_T \delta \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここに、 $\mathbf{K}'_T$ は接線剛性マトリックスで $\mathbf{K}'_T = \mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G$ である。また、 $\mathbf{K}'_E$ は弾性剛性マトリックス、 $\mathbf{K}'_G$ は幾何剛性マトリックスで次式のように表される。

$$\mathbf{K}'_E = \mathbf{C}' \mathbf{K}_m \mathbf{C}'^T \quad (12)$$

$$\mathbf{K}'_G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta C}{\partial \Delta d_1} \mathbf{p}'_m & \frac{\partial \Delta C}{\partial \Delta d_2} \mathbf{p}'_m & \cdots \end{bmatrix}_0$$

$$\equiv \left[\frac{\partial (C' + \Delta C)}{\partial \Delta d} \right]_0 \mathbf{p}'_m \quad (13)$$

なお、式(13)の $[\partial(C' + \Delta C)/\partial \Delta d]$ は、いわば立体マトリックスである¹⁰⁾。

3. 不安定静的構造解析手法について

3.1 二段階制御法の概要

図-2に示すような、両支点がヒンジで固定された3部材平面ケーブルの節点2、3の鉛直方向に外力 p_{2y} 、 p_{3y} が作用する場合のケーブル形状を決定する問題を例にとって二段階制御法を説明する。

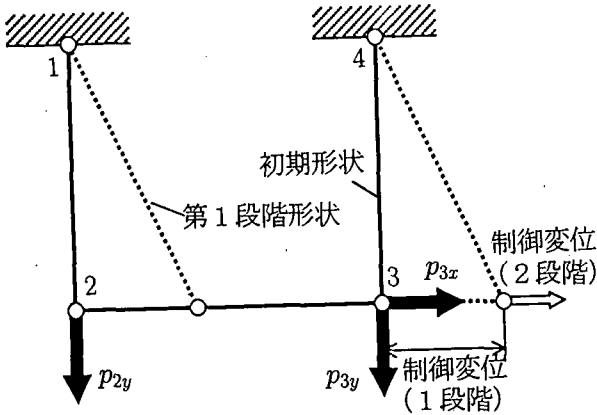


図-2 3部材平面ケーブルモデル

このモデルでは、自由節点は2つで、外力としては1つの節点について水平と鉛直方向の2つの成分をもつから、合計4個存在し得る。また、未知数である部材断面力（軸力）は3個であるので、その差の1が不安定の次数を与えることになる。すなわち、このモデルは1次の不安定構造であるといえる。したがって、1つの制御変位を与えるとこのケーブル構造は静定構造となり、構造解析が可能である。

第1段階において、節点3の水平方向の変位 d_{3x} を制御変位として与え、変位制御法を行う。そして、非制御変位方向（節点3の水平方向以外）の計算外力 p_{2x} 、 p_{2y} 、 p_{3y} が実際に非制御点方向に与えられた外力に十分近づいた時、第1段階を終了する。このときのケーブルの形状を図-2の破線で示す。

第2段階は、第1段階により求めた制御点方向の計算反力と実際与えられている外力 p_{3x} との不釣り合い力を解消するように制御変位を修正し、変位制御法により計算を進める。第2段階における修正された制御変位を図-2の白抜き矢印で示す。

3.2 基礎式の二段階制御法への拡張

ここでは、不安定ケーブルの解析手法の二段階制御法による解析手順を述べる。

式(8)で表される大変形構造解析の基礎式を2個の部分構造に分割すると、

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_1 \\ \Delta \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_1 \\ \Delta \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる。このときの $\Delta \mathbf{d}_1$ 、 $\Delta \mathbf{p}_1$ は静定構造とするために与えた制御変位方向の変位と荷重を、 $\Delta \mathbf{d}_2$ 、 $\Delta \mathbf{p}_2$ は制御変位を与えていない方向の変位と荷重をそれぞれ示すものとする。

また、式(11)も同様に分割すると、増分荷重 $\Delta \mathbf{p}$ の変位による微分 $\delta \Delta \mathbf{p}$ は

$$\begin{bmatrix} \delta \Delta \mathbf{p}_1 \\ \delta \Delta \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T11} & \mathbf{K}_{T12} \\ \mathbf{K}_{T21} & \mathbf{K}_{T22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \Delta \mathbf{d}_1 \\ \delta \Delta \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

となる。ここに $\mathbf{K}_T$ は接線剛性マトリックスである。

ブロックに分割した式(14)、(15)を用い、説明する。

(1) 第1段階の操作

解析対象である構造物の不安定次数と同じ数の制御変位 $\Delta \mathbf{d}_1$ を与えることで、不安定状態にある構造物を静定構造とする。非制御変位方向の増分外力を $\Delta \mathbf{p}_2$ 、第1段階における制御変位を $\Delta \mathbf{d}_1^I$ とする。 $\Delta \mathbf{p}_2$ 、 $\Delta \mathbf{d}_1^I$ はその段階におけるiterationの最初に与え、第2 iteration以降の $i = 2, 3, \dots$ に対して $\Delta \mathbf{d}_1^{(i)} = \mathbf{0}$ とする。添字 I は第1段階における値、添字 (i) は第 i iterationにおいて求まる値を意味する。式(15)より、第1 iterationにおける非制御変位方向の変位 $\Delta \mathbf{d}_2^{(0)}$ の値を次のように推定する。

$$\Delta \mathbf{d}_2^{(0)} = \mathbf{K}_{T22}^{(0)-1} (\Delta \mathbf{p}_2 - \mathbf{K}_{T21}^{(0)} \Delta \mathbf{d}_1^I) \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{K}_{T22}^{(0)}$ は初期の状態、すなわち $\Delta \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}$ 、 $\Delta \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$ における $\mathbf{K}_{T22}$ の値である。

次に、式(16)で求めた $\Delta \mathbf{d}_2^{(0)}$ と $\Delta \mathbf{d}_1^I$ に対応する計算反力 $\Delta \mathbf{p}'$ を式(14)に従って求める。

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_1^{(1)} \\ \Delta \mathbf{p}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_1^I \\ \Delta \mathbf{d}_2^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(1)} \\ \mathbf{b}_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

実際に作用している非制御変位方向の外力 $\Delta \mathbf{p}_2$ に対応する $\Delta \mathbf{d}_2$ をNewton-Raphson法によって求める。

すなわち不釣り合い力は

$$\Delta \mathbf{p}_2^{(1)} = \Delta \mathbf{p}_2 - \Delta \mathbf{p}_2^{(1)} \quad (18)$$

である。

第2 iterationにおいて $\Delta \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}$ とし、第2 iterationにおける非制御変位方向の変位 $\Delta \mathbf{d}_2^{(1)}$ の値を推定する。

$$\Delta \mathbf{d}_2^{(1)} = \mathbf{K}_{T22}^{(1)-1} \Delta \mathbf{p}_2^{(1)} \quad (19)$$

$$\Delta \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{d}_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

とする。ここに $\mathbf{K}_{T22}^{(1)} \equiv \mathbf{K}_{T22}(\Delta \mathbf{d}_1^I, \Delta \mathbf{d}_2^{(0)})$ は、第2 iterationにおいて、 $\mathbf{K}_{T22}^{(1)}$ が $\Delta \mathbf{d}_1^I$ と $\Delta \mathbf{d}_2^{(0)}$ の関数で表されることを意味する。

$\Delta \mathbf{d}_2^{(1)}$ に対する増分荷重 $\Delta \mathbf{p}'^{(2)}$ を求める。

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_1'^{(2)} \\ \Delta \mathbf{p}_2'^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{d}_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(2)} \\ \mathbf{b}_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\Delta \mathbf{p}_2^{(2)} = \Delta \mathbf{p}_2^{(1)} - \Delta \mathbf{p}_2'^{(2)} \quad (22)$$

以下、式(18)～(22)を繰り返すと、

$$\Delta \mathbf{p}_1^I = \Delta \mathbf{p}_1'^{(1)} + \Delta \mathbf{p}_1'^{(2)} + \dots \quad (23)$$

$$\Delta \mathbf{p}_2 = \Delta \mathbf{p}_2'^{(1)} + \Delta \mathbf{p}_2'^{(2)} + \dots \quad (24)$$

$$\Delta \mathbf{d}_2^I = \Delta \mathbf{d}_2^{(0)} + \Delta \mathbf{d}_2^{(1)} + \dots \quad (25)$$

以上が第1段階の操作である。

(2) 第2段階の操作

ここでは、第2段階として、制御変位方向に与えられた外力と、第1段階で制御変位に対応して得られる計算反力とのつり合い力を解消するように、変位制御法に従って、制御変位節点方向の第2段階増分変位を求める。

制御変位方向における計算反力 $\Delta \mathbf{p}_1^I$ は、式(23)で求まるが、この計算反力と実際に作用する外力 $\Delta \mathbf{p}_1$ との差を解消するように第2段階を行う。よって、第2段階では、

$$\Delta \mathbf{p}_1^H = \Delta \mathbf{p}_1 - \Delta \mathbf{p}_1^I \quad (26)$$

として、得られる制御変位方向の外力の増分 $\Delta \mathbf{p}_1^H$ を用いて、それに対応する変位を求める。このとき、非制御変位方向の計算外力の増分 $\Delta \mathbf{p}_2$ は、第1段階終了の時点で、実際に作用する外力と一致しているとして、それらの増分 $\delta \Delta \mathbf{p}_2$ を $\mathbf{0}$ に保つように式(28)に従って修正接線剛性マトリックスを求める。これを用い、制御変位方向以外の外力の増分 $\Delta \mathbf{p}_2$ を $\mathbf{0}$ とするような変位制御法に従って、第2段階制御変位計算を行う。

すなわち $\Delta \mathbf{p}_1^H$ が大きい場合は $\Delta \mathbf{p}_2^H = \mathbf{0}$ の条件のもとで $\Delta \mathbf{p}_1^H$ に対応する次式の新しい制御変位 $\Delta \mathbf{d}_1^H$ を、第1段階と同様の手順に従って求める。

$$\Delta \mathbf{d}_1^H = \mathbf{K}_{T11}^{H-1} \Delta \mathbf{p}_1^H \quad (27)$$

ここで $\mathbf{K}_{T11}^H$ は、式(15)に基づいて

$$\mathbf{K}_{T11}^H = \mathbf{K}_{T11} - \mathbf{K}_{T12} \mathbf{K}_{T22}^{-1} \mathbf{K}_{T21} \quad (28)$$

と推定する。以下 $\mathbf{K}_{T11}^H$ を修正接線剛性マトリックス

という。

なお、 $\Delta \mathbf{d}_1^H$ が大きい場合には $\Delta \mathbf{d}_1^H$ の大きさに上限をつけてこれを新制御変位として、上記の計算を繰り返す。

このように、第一と第二の段階の変位制御法を用いることによって、与えられた外力を受けるケーブル構造の変位と軸力を求める。この手法では、無応力状態のように接線剛性マトリックスが特異となり解が不能または収斂が悪くなる状態からスタートしても解析可能となる。

3.3 修正二段階制御法による解法

ここでは二段階制御法に荷重制御法を組み合わせた修正二段階制御法の説明をする。前節に述べた二段階制御法により、いったん軸力が導入されるとケーブル構造の接線剛性マトリックスは正則となり得る。よって、ある程度二段階制御法を行ってつり合い形状の近傍に近づいてからは、荷重制御法の手順により解析をおこなう。

二段階制御法では変位を制御して間接的に計算反力を求めるため、つり合い形状近傍では、実際の荷重との差が解消されにくかったのでこの段階で荷重制御法に切り替える。この方法を修正二段階制御法という。

これより、二段階制御法に比べ修正二段階制御法を用いる方が、つり合い形状の近傍における計算が早く収束できるので高次の不安定次数となるネット構造や動的なケーブル構造の挙動解析への適用に、有用であると思われる。

4. ケーブルの挙動解析

4.1 はじめに

ケーブルで定着された浮き防波堤のケーブルが波力を受けて運動する場合のように、時間と共に大変形するケーブル構造の運動方程式を導き、解析を行う。すなわち、中心差分法^{11),12)}に従い各節点の加速度増分 $\Delta \mathbf{a}$ を求める。この加速度増分に基づく慣性力増分を、式(8)の荷重と変位の静的増分形大変形構造解析の基礎式に加えることで、浮体のケーブルのような大変形するケーブル構造の運動方程式を導いた。

この数値解析手法として、運動の過程で、部材が無応力状態になる場合にも適用できるように、前述の修正二段階制御法を用いる。

4.2 ケーブルの運動方程式の定式化

ケーブルの増分形運動式は、— (質量 × 加速度増分) を慣性力増分と考えて、これを外力として式(8)の左辺に組み込むことによって得られる。計算の第 $I+1$ ステップの加速度ベクトルの増分 $\Delta \mathbf{a}_{I+1}$ は図-3に示

すように第 I ステップにおける変位の増分を Δd_I とすると、

$$\begin{aligned} \Delta a_{I+1} &= \left\{ \left(\frac{\Delta d_{I+1}}{\Delta t} - \frac{\Delta d_I}{\Delta t} \right) - \left(\frac{\Delta d_I}{\Delta t} - \frac{\Delta d_{I-1}}{\Delta t} \right) \right\} \frac{1}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t^2} (\Delta d_{I+1} - 2\Delta d_I + \Delta d_{I-1}) \quad (29) \end{aligned}$$

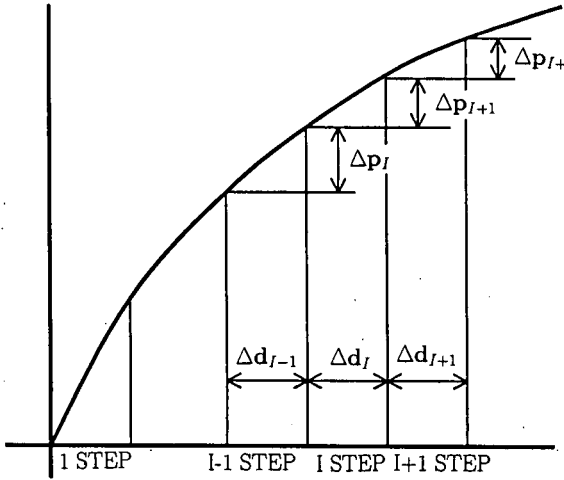


図-3 第 I ステップの荷重変位曲線

また、簡単のために、質量は折線ケーブルの節点に集中するものとし、質量マトリックスを M として、第 I ステップにおける荷重増分を Δp_I とすると、運動方程式は式(29)を式(8)に用い、次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(M \frac{1}{\Delta t^2} + K_{I+1} \right) \Delta d_{I+1} + b_{I+1} &= \Delta p_{I+1} + M(2\Delta d_I - \Delta d_{I-1})/\Delta t^2 \\ &\equiv \Delta f_{I+1} \quad (30) \end{aligned}$$

すなわち、 Δd_I までの変位増分と外力の増分 Δp_{I+1} を与えて Δd_{I+1} を求める問題に帰着する。

式(30)の K_{I+1} , b_{I+1} は $I+1$ ステップにおける変位増分 Δd_{I+1} の関数であるので、これを Δd_{I+1} に関して Taylor 展開すると、接線剛性マトリックス K_T を用い、

$$\left(M \frac{1}{\Delta t^2} + K_{T,I+1} \right) \delta \Delta d_{I+1} = \delta \Delta f_{I+1} \quad (31)$$

これより、第 $I+1$ ステップの最初の iteration の増分変位は、

$$\begin{aligned} \Delta d_{I+1}^{(0)} &= \left(M \frac{1}{\Delta t^2} + K_{T,I+1}^{(0)} \right)^{-1} \Delta f_{I+1} \\ &\equiv K_{I+1,FT}^{-1} \Delta f_{I+1} \quad (32) \end{aligned}$$

と推定する。 $\Delta d_{I+1}^{(0)}$ に対応する $\Delta f_{I+1}^{(1)}$ は式(30)に従い、

$$\begin{aligned} \Delta f_{I+1}^{(1)} &= \left(M \frac{1}{\Delta t^2} + K_{I+1}^{(1)} \right) \Delta d_{I+1}^{(0)} + b_{I+1}^{(1)} \\ &= M \frac{1}{\Delta t^2} \Delta d_{I+1}^{(0)} + \Delta p_{I+1}^{(1)} \\ \Delta p_{I+1}^{(1)} &= K_{I+1}^{(1)} \Delta d_{I+1}^{(0)} + \Delta b_{I+1}^{(1)} \quad (33) \end{aligned}$$

したがって、次の iteration における増分 f 値は、

$$\begin{aligned} \Delta f_{I+1}^{(1)} &= \Delta f_{I+1} - \Delta f_{I+1}^{(1)'} \\ &= M \frac{1}{\Delta t^2} (d_{I+1} - \Delta d_{I+1}^{(0)}) \\ &\quad + (\Delta p_{I+1} - \Delta p_{I+1}^{(1)'}) \\ &= M \frac{1}{\Delta t^2} \Delta d_{I+1}^{(1)} + \Delta p_{I+1}^{(1)} \quad (34) \end{aligned}$$

ここに $\Delta p_{I+1}^{(1)} = \Delta p_{I+1}' - \Delta p_{I+1}^{(1)'}$ である。したがって

$$\delta \Delta f_{I+1}^{(1)} = M \frac{1}{\Delta t^2} \delta \Delta d_{I+1}^{(1)} + \delta p_{I+1}^{(1)} \quad (35)$$

であるから、これより

$$\begin{aligned} \Delta d_{I+1}^{(1)} &= \left(M \frac{1}{\Delta t^2} + K_{T,I+1}^{(1)} \right)^{-1} \Delta f_{I+1}^{(1)} \\ &\equiv K_{FT,I+1}^{(1)-1} \Delta f_{I+1}^{(1)} \quad (36) \end{aligned}$$

を推定する。 $K_{FT,I+1}$ は、慣性力を考慮した接線剛性マトリックスで式(32)、(36)からわかるように $K_{T,I+1}^{(1)}$ と $M \frac{1}{\Delta t^2}$ の和である。この関係を図-4に示した。

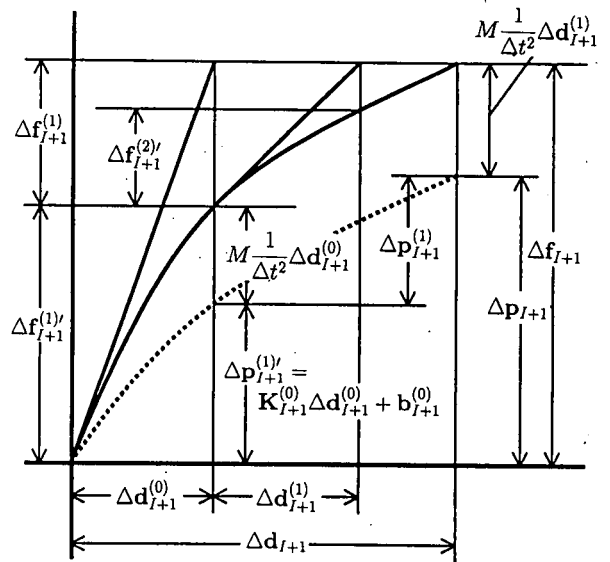


図-4 Newton-Raphson 法による運動数値解析図

上記は静止ケーブルのつり合い式計算における荷重項 Δp_{I+1} の代わりに Δf_{I+1} を、 K_T の代わりに K_{FT} を用いた荷重分割法となるが、これを制御変位節点と自由変位節点の2群に分けて二段階制御法を適用し、その後荷重制御法により解析を進める修正二段階制御法を適用する。

4.3 6部材円弧ケーブルモデルの挙動解析例

図-5に示す、6部材円弧ケーブルの挙動解析をおこなう。ここで、図-5は任意の6部材ケーブルの節点に90.0kgの質量が作用するモデルを、修正二段階制御法を用いて求めたつりあい形状である。この状態を運動の初期の状態とし、このつりあい形状に強制変位を与え、挙動解析を行った。

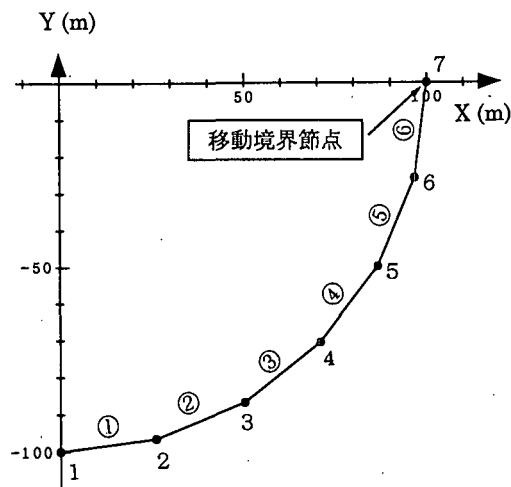


図-5 6部材円弧ケーブル

各ケーブル部材の断面積は $A = 1.0 \times 10^{-4} \text{m}^2$ 、ヤング率は $E = 2.058 \times 10^{11} \text{kgf/m}^2$ としている。節点1を支点、節点7を移動境界節点とし、図-6に示すような正弦曲線で示される変位を移動境界節点に強制的に与える。実線は水平方向の変位、点線は鉛直方向の変位を示す。

慣性力を考慮した解析においては、質量マトリックスは $M = 90.0(\text{kg})$ で質量は各節点に作用しているものとし、時間間隔 Δt は $0.5(\text{sec})$ とした。

この解析例では、各STEPの最初のiterationでは二段階制御法を用い、2回目のiteration以降は荷重制御法を用いて解析を行った。このとき二段階制御法のみで解析を行った場合、各ステップの収束に要するiteration数は4～6であったのに対し、荷重制御法に切り替えた場合は3～4であった。解析時間で比較すると後者の収束に要する時間は前者の1/3程度となった。

図-7に、解析による1部材と6部材の軸力の時間的变化を示す。横軸には時間を、縦軸には軸力をとる。実線は慣性力が作用しない場合 ($M = 0.0\text{kg}$)、点線は慣性力が作用する場合 ($M = 90.0\text{kg}$) として解析した結果である。

これより、慣性力が作用しない場合、部材の軸力の変化は強制変位で与えたとおりのなめらかな正弦曲線をえがいているが、慣性力が作用すると複雑な曲線となることがわかる。これは、節点の変位のパターンが各節点により違うためその各節点変位により各節点の

慣性力も変化する。このため、他の節点の影響を受けて軸力の変化が複雑な曲線となったものと思われる。また、軸力のピークにおいて慣性力のかかなりの増大が確認できる。これは強制的に与えた変位の方と部材の変位方向が逆になる点に一致していることから、変位方向が逆になると各節点の変位の変化が大きくなり慣性力も大きくなるものと考えられる。

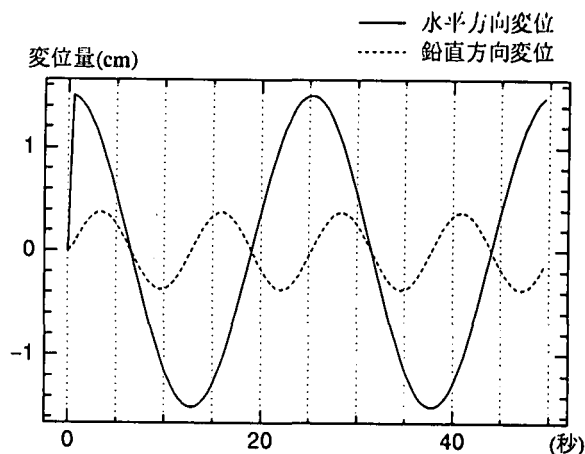
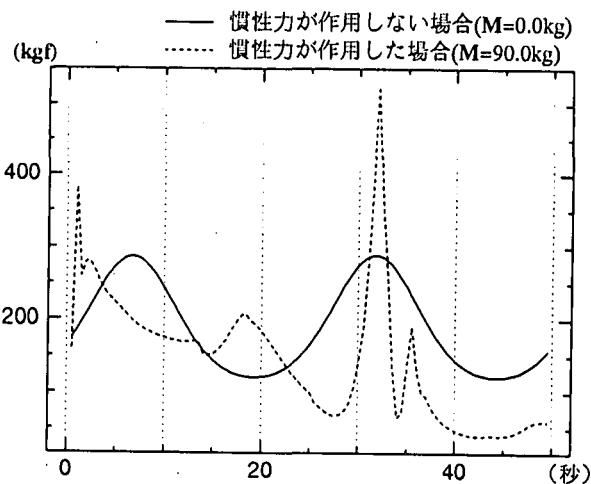
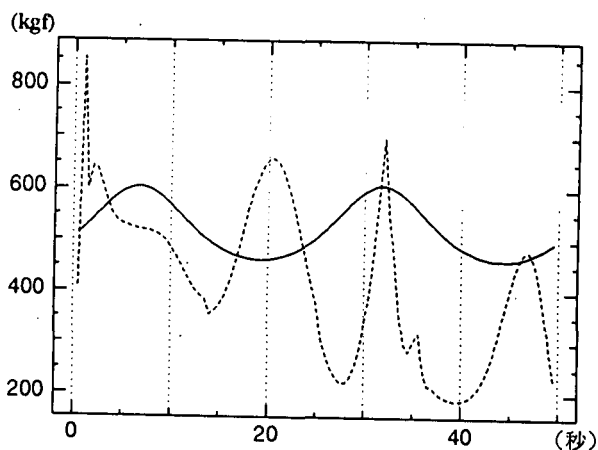


図-6 移動境界節点の変位図

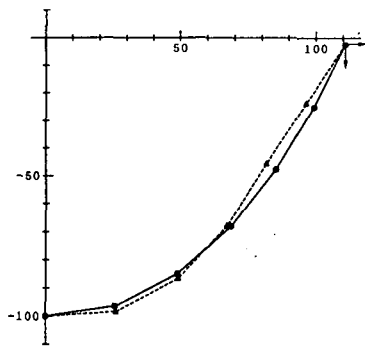


1部材の軸力

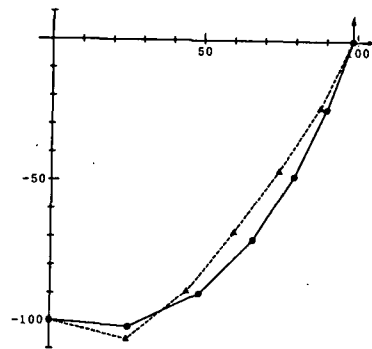


6部材の軸力

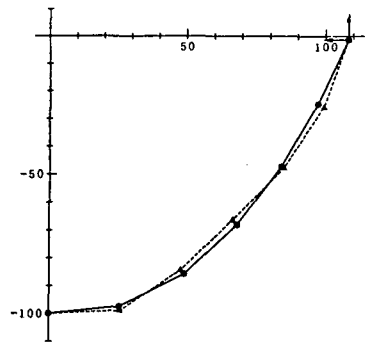
図-7 軸力の時間的变化



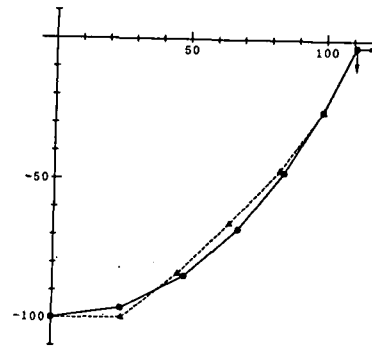
TIME = 5 (second)



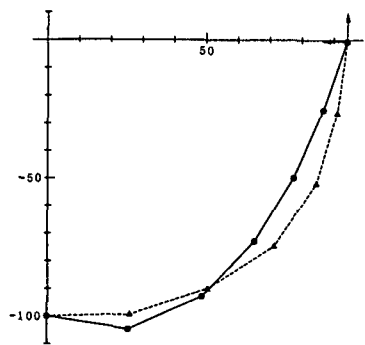
TIME = 25 (second)



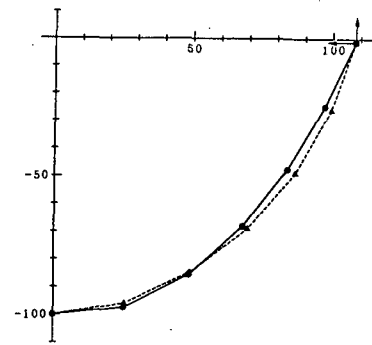
TIME = 10 (second)



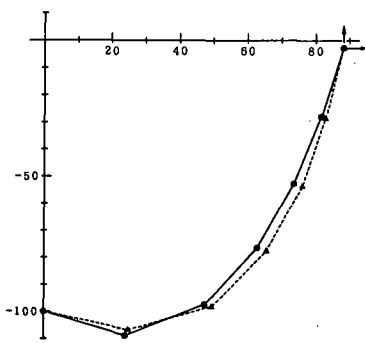
TIME = 30 (second)



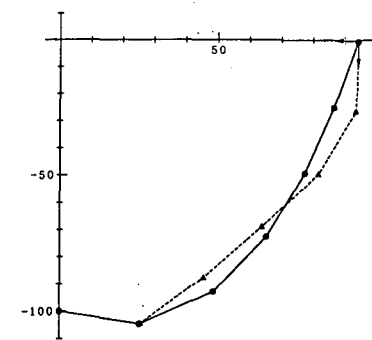
TIME = 15 (second)



TIME = 35 (second)



TIME = 20 (second)



TIME = 40 (second)

図-8 6部材円弧ケーブルの挙動

図-8は時間と共にケーブルが変形していく過程を示す挙動図である。図-7と同様に、実線は慣性力が作用しない場合、点線は慣性力が作用する場合である。また、節点7の矢印は境界節点の移動方向を示している。

図-8に示した挙動の変化より、慣性力が作用する場合は慣性力が作用しない場合よりも節点の移動の遅れが生じていることが明らかになった。

このことから、動的なケーブルの挙動及び軸力変化を見る上で慣性力を考慮する必要があることが明らかである。

5. 結論

筆者らは先に、up-dated Lagrange 流の増分形有限変位構造解析の基礎式を導き、この式に基づいて不安定なケーブルの挙動を解析するための二段階制御法を提案した。二段階制御法では不安定ケーブルに不安定次数だけ制御変位を与えて静定構造とし、変位制御法に従って有限変位解析を行う。この制御変位節点方向の計算反力と節点方向の与えられた外力の差を解消するように新たに制御変位を選定して解を求める。

2段階目の制御変位が大きすぎるときには上限を設け、第2段階目の新制御変位法の計算を行う。しかもなお、制御変位が大きい場合には、再度同様の第2段階変位制御計算を何回か繰り返す。二段階制御法ではケーブルのつり合い状態の近傍において収束が悪い。そこでこの近辺ではすでに部材には軸力が導入されているので荷重制御法で切り替える。これを修正二段階制御法ということにした。

浮き防波堤のアンカーケーブルのような時間の経過と共に大変形する構造に対する運動方程式を、荷重と変位の増分形大変形基礎式の中に慣性力を組み込む形で導いた。

例題として、一端固定、一端は水平および鉛直方向に振動する6部材ケーブルの運動解析を行った。静的問題と同様に、無応力状態に二段階制御法を用いつり合い形状を求め、その後修正二段階制御法により解を求める。

慣性力を考慮することにより、挙動中にケーブルに急激に大きな力が生じるスナッフフォースのような現象をとらえ、変位と各部材軸力に対して慣性力を表わす効果が得られた。

また、慣性力による大変形を生じる場合において、修正二段階制御法で強制的に制御変位を与えることにより、急激な軸力の変化が生じた場合の変形形状の追跡をする事ができ、本解析手法がこのような問題に対して有効な手法であることがわかった。

参考文献

- 1) 後藤茂夫, 大西幸紀, 大槻護, 新村祐南: 非線形有限変形法(大変形法)によるトラスの大変形解析とその応用プログラム, 土木学会論文報告集, 194号, pp.55-69, 1971.
- 2) 中西宏, 波田凱夫: 曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, 318号, pp.41-50, 1982.
- 3) 半谷裕彦, 川口健一: 形態解析—一般逆行列とその応用—, 培風館, 1991.
- 4) 小林一郎, 三池亮次: ケーブル構造の大変形解析への最適化手法の適用, 土木構造・材料論文集, 第5号, 1990.
- 5) 三池亮次: 有限変形における増分形エネルギー基礎理論, 土木学会論文報告集, 第309号, pp.41-50, 1981.
- 6) Miike, R., Kobayashi, I. and Yamada, Z.: Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, EM10, ASCE, pp.411-428, Feb.1990.
- 7) Hashimoto, J., Higashi, T., Miike, R. and Kobayashi, I.: Cable Analysis Using Two Level Control and Load Control Method, Proceedings of 7-th International Congress in Civil and Building Engineering, Vol.1, pp.125-130, Aug.1997.
- 8) 佐藤啓治, 小林一郎, 東高德, 三池亮次: 二段階制御法による折れ線ケーブル構造解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 19巻, pp.403-408, 1995.
- 9) R.K. リブスレイ, (山田嘉照・川井忠彦共訳): マトリックス構造解析入門, 培風館, 1968.
- 10) Gelfund, I.M., Kaparanou, M.M. and Zelevinsky, A.V.: Discriminants Resultants and Multidimensional Determinants, Birkhauser, 1994.
- 11) 酒井久和, 澤田純男, 土岐憲三: 収束計算を行わない動的非線形 FEM のための時間積分法, 土木学会論文集, Vol.507/I-30, pp.137-147, 1995.1.
- 12) Zienkiewicz, C.F., Taylor, R.L. (矢川元基訳): マトリックス有限要素法Ⅱ, キヤドテック / 科学技術出版社, 1996.
- 13) Takikawa, K., Yamada, F., Sato, K. and Furuta, H.: Numerical Analysis of Finite Amplitude Motion of Waves and A Moored Floating Body under Several Storm Conditions, International Journal for Numerical Method in Fluid Vol.21, pp.295-310, 1995.

(1998年4月24日受付)