

薄肉直線桁のねじり振動に関する解析的研究

Analytical Study on Torsional Vibration of Thin-Walled Straight Beams

林川俊郎* 松井義孝** 北島 勉*** 佐藤浩一****

Toshiro HAYASHIKAWA, Yoshitaka MATSUI, Tsutomu KITAJIMA and Koichi SATO

*正会員 工博 北海道大学大学院助教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 6 丁目)

**正会員 北海道大学大学院博士課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 6 丁目)

***学生会員 北海道大学大学院修士課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 6 丁目)

****正会員 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 6 丁目)

Three different mass matrix methods for determining natural frequencies of thin-walled continuous beams are presented. One method is the exact method based on a general solution of the differential equation of motion for torsional vibration, and it is called the continuous mass method. The other two matrix methods are the lumped and consistent mass methods based on the approximate finite element approach. The mathematical relationship between the exact and approximate methods is discussed. The numerical results computed by the lumped, consistent, and continuous mass methods are given in tabular form, and the accuracy of natural frequencies obtained by these mass matrix methods is investigated.

Key Words: *Torsional vibration, warping, continuous beams, mass matrix methods*

1. まえがき

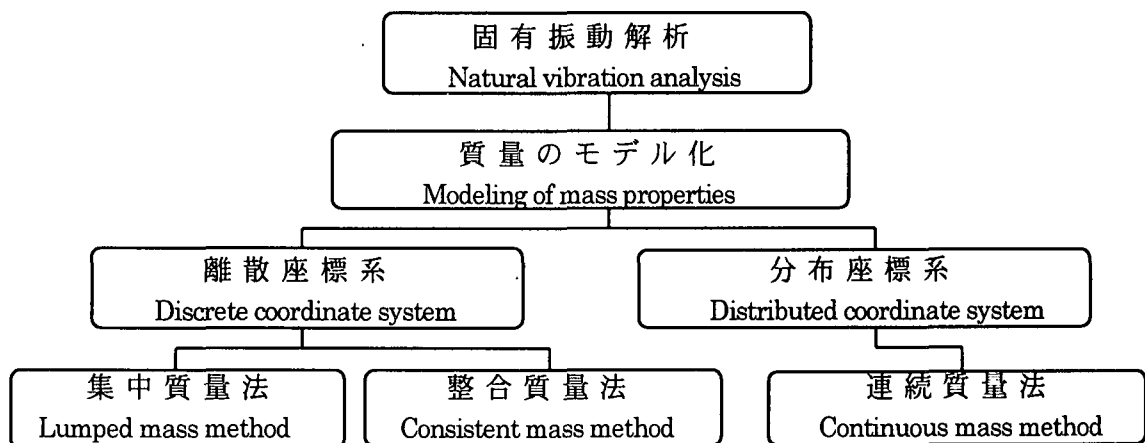
近年、橋梁をはじめとする土木構造物はその構造形式が大型化あるいは複合化されるにつれて、その動的応答性状も複雑になってきている。構造物の動的応答は、その構造物に作用する外力の性質と構造物自身の固有振動特性、すなわち固有振動数や固有振動モードに大きく左右される。したがって、構造物の動的応答を正しく評価するためには、固有振動数ならびに固有振動モードを精度良く計算することが重要な課題であると言える。

薄肉断面部材の基礎的なそりねじり理論は Vlasov の著書¹⁾等に詳しく述べられている。Krajcinovic²⁾は図心とせん断中心が一致しない薄肉直線桁の剛性マトリックスを Galerkin 法を用いて誘導し、さらに初期応力マトリックスと質量マトリックスを示している。これらのマトリックスの要素は、同次微分方程式の解を用いているため双曲線関数を含む形で与えられている。これに対して、直線部材要素の変位関数を多項式で仮定する変位法(有限要素法)に基づいて、静的な剛性マトリックスと集中質量マトリックスを導いた論文として、結城・前田³⁾の研究がある。同じく薄肉開き直線桁を対象として、Wekezer⁴⁾は剛性マトリックスと整合質量マトリックスを与えている。また、薄肉 I 形断面桁のねじり振動にお

けるそりねじり剛性の影響については川井・藤谷⁵⁾によって明らかにされている。

固有振動解析は、構造物の質量を多質点系に離散化する離散座標系による解法と、自由振動の基礎微分方程式の一般解から動的な剛性マトリックスを誘導する分布座標系による解法に大別できる。筆者ら^{6), 7)}はすでに連続桁やラーメン橋の固有振動数を異なる質量マトリックス法により数値計算し、その固有振動特性と精度について検討してきた。しかし、薄肉直線桁のねじり振動における要素分割数とその固有振動数の精度について数値解析的にかつ数学的観点から明確に検討した論文は意外と少ないように思われる。

そこで、本研究は薄肉直線桁のねじり振動に関する基礎微分方程式の一般解を用いて、新たに動的な剛性マトリックスを誘導する。さらに、求められた固有円振動数に対応した固有関数を算出するための積分定数マトリックスを提示する。数値計算例として簡単な連続桁を取り上げ、異なる質量マトリックス法による固有振動数の精度とその要素分割数の影響について検討する。最後に、本研究で新しく誘導した薄肉直線桁のねじり振動に関する動的剛性マトリックスの各要素を部材長に関して Taylor 展開し、異なる質量マトリックス法との数学的な特徴と位置関係について明らかにする。



図—1 質量のモデル化によるねじり振動解析手法の分類

2. ねじり振動解析

薄肉直線桁のねじり振動解析は、部材要素の質量のモデル化により、離散座標系 (discrete coordinate system) による解と分布座標系 (distributed coordinate system) による解に分類することができる⁶⁻⁹⁾。さらに、前者には部材要素の等分布質量を両端の節点に等しく置換する集中質量法 (lumped mass method) と、変位関数として3次多項式を用いて部材要素の質量を両端の節点に配分する整合質量法 (consistent mass method) が代表的な方法である。後者には薄肉直線桁の質量およびねじり剛性等の力学的特性を連続的な分布量として取り扱う連続質量法 (continuous mass method) がある。この解法は薄肉直線桁のねじり自由振動に関する基礎微分方程式の一般解を必要とするが、正確な固有値 (厳密解) を求めることができる。一般的に、離散座標系による解は標準的な固有値問題に、分布座標系による解は超越方程式を解く問題に帰着される。ここで示した固有振動解析の概念的な分類を図—1に示す。

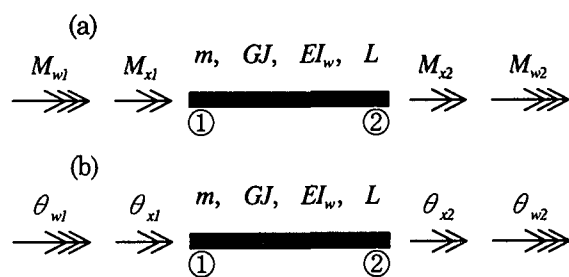
2. 1 離散座標系による解

ここでは、図—2に示すような一定断面を有する薄肉直線桁について考える。また、断面は2軸対称断面とし図心とせん断中心は一致するものとする。部材要素の両端における節点①、②のねじりモーメント (M_{x1}, M_{x2}) およびそりねじりモーメント (M_{w1}, M_{w2}) は、静的な剛性マトリックス K_s によってねじり角 (θ_{x1}, θ_{x2}) およびねじり率 (θ_{w1}, θ_{w2}) と関係づけられる。ねじり角を3次多項式で仮定すると、部材要素の剛性方程式は次のように与えられる^{5), 10)}。

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_s \mathbf{U} \quad (1)$$

ここに、

$$\mathbf{F} = \{M_{x1}, M_{w1}, M_{x2}, M_{w2}\}^T, \quad \mathbf{U} = \{\theta_{x1}, \theta_{w1}, \theta_{x2}, \theta_{w2}\}^T \quad (2)$$



図—2 部材要素の断面力と変位の符号

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \frac{12EI_w}{L^3} + \frac{6GJ}{5L} & \frac{6EI_w}{L^2} + \frac{GJ}{10} & -\frac{12EI_w}{L^3} - \frac{6GJ}{5L} & \frac{6EI_w}{L^2} + \frac{GJ}{10} \\ & \frac{4EI_w}{L} + \frac{2GJ}{15} & -\frac{6EI_w}{L^2} - \frac{GJ}{10} & \frac{2EI_w}{L} - \frac{GJ}{30} \\ & & \frac{12EI_w}{L^3} + \frac{6GJ}{5L} & -\frac{6EI_w}{L^2} - \frac{GJ}{10} \\ \text{Sym.} & & & \frac{4EI_w}{L} + \frac{2GJ}{15} \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 EI_w はそりねじり剛性、 GJ は St.Venant のねじり剛性、 L は部材長である。

部材要素の等分布質量を両節点に等しく配分することにより、集中質量マトリックス $\mathbf{M}_1$ は次のように与えられる。

$$\mathbf{M}_1 = \frac{mLI_p}{24A} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ & L^2 & 0 & 0 \\ & & 12 & 0 \\ \text{Sym.} & & & L^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 m は単位長さ当たりの質量、 I_p は極慣性モーメント、 A は断面積である。さらに、式(3)で求められた静的剛性マトリックス $\mathbf{K}_s$ と同様の変位関数を用いると、仮想仕事の原理より以下のような整合質量マトリックス $\mathbf{M}_c$ が求められる。

$$\mathbf{M}_c = \frac{mL I_p}{420A} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{Sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

したがって、各部材要素の静的剛性マトリックス $\mathbf{K}_s$ 、集中質量マトリックス $\mathbf{M}_i$ あるいは整合質量マトリックス $\mathbf{M}_c$ を用いて重ね合わせることに、最終的に離散座標系における振動数方程式は次のようになる。

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{K}$ と $\mathbf{M}$ はそれぞれ境界条件より拘束節点処理された構造物全体の剛性マトリックスと質量マトリックスであり、 ω は固有円振動数である。上式(6)の固有値問題は数学的に非常に重要な問題であり、種々の解析方法がある^{11), 12)}。本研究では固有値が近接する場合にも、比較的容易に解を求めることができる Householder 法を用いた。

2. 2 分布座標系による解

2軸対称断面を有する薄肉直線桁のねじり自由振動に関する基礎微分方程式は次のように与えられる^{1), 5)}。

$$EI_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + mr^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

ここで、 θ はねじり角、 $r^2 = I_p / A$ である。薄肉直線桁の固有円振動数を ω とし、調和振動するものとすれば、ねじり角 $\theta(x, t)$ は次のように仮定できる。

$$\theta(x, t) = \tilde{\theta}(x) \cdot \exp(i\omega t) \quad (8)$$

ここで、 i は虚数である。したがって、式(8)を式(7)に代入すると、一般解は次のように求められる。

$$\tilde{\theta}(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + C_3 \cosh v x + C_4 \sinh v x \quad (9)$$

ただし、

$$\mu = \sqrt{\frac{GJ}{2EI_w}(\lambda - 1)}, \quad v = \sqrt{\frac{GJ}{2EI_w}(\lambda + 1)}, \quad \lambda = \sqrt{1 + \frac{4mr^2 EI_w}{(GJ)^2}} \omega^2 \quad (10)$$

また、 C_1, C_2, C_3, C_4 は積分定数である。

薄肉直線桁の任意の点 x における変位および断面力は式(9)を用いて以下のように表示できる。

$$\begin{aligned} \text{ねじり角: } \tilde{\theta}(x), \quad & \text{ねじり率: } \tilde{\theta}'(x) = \frac{d\tilde{\theta}(x)}{dx} \\ \text{そりねじりモーメント: } M_w(x) = & -EI_w \frac{d^2 \tilde{\theta}(x)}{dx^2} \\ \text{ねじりモーメント: } M_x(x) = & -EI_w \frac{d^3 \tilde{\theta}(x)}{dx^3} + GJ \frac{d\tilde{\theta}(x)}{dx} \end{aligned} \quad (11a-d)$$

これらの式(11)より、 $x=0$ における状態量ベクトル $\mathbf{X}(0)$ は積分定数ベクトル $\mathbf{C}$ を用いて次のように表される。

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{A}(0) \mathbf{C} \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{X}(0) = [\tilde{\theta}(0), \tilde{\theta}'(0), M_w(0), M_x(0)]^T$,

$\mathbf{C} = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$ である。同様に、 $x=L$ における

状態量ベクトル $\mathbf{X}(L)$ は次のように求められる。

$$\mathbf{X}(L) = \mathbf{A}(L) \mathbf{C} \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{X}(L) = [\tilde{\theta}(L), \tilde{\theta}'(L), M_w(L), M_x(L)]^T$ である。

したがって、式(12)、(13)より積分定数ベクトル $\mathbf{C}$ を消去し、変位および断面力の符号を微分方程式のものから、図-2の変位法(有限要素法)のものへ変換すると、最終的に次式を得る。

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}(\omega) \mathbf{U} \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{K}(\omega)$ は固有円振動数 ω を含む動的剛性マトリックスであることから、本研究では固有剛性マトリックスと呼ぶことにする。この固有剛性マトリックスは4行4列の正方対称マトリックスであり、各要素 k_{ij} は次の通りである。

$$\begin{aligned} k_{11} &= \alpha(\mu^2 + v^2)(vcS + \mu sC) \\ k_{12} &= \alpha\{(\mu^2 - v^2)(1 - cC) - 2\mu v sS\} \\ k_{13} &= -\alpha(\mu^2 + v^2)(\mu s + vS) \\ k_{14} &= \alpha(\mu^2 + v^2)(C - c) \\ k_{22} &= \alpha(\mu^2 + v^2)(sC/\mu - cS/v) \\ k_{24} &= \alpha(\mu^2 + v^2)(S/v - s/\mu) \\ k_{23} &= -k_{14}, \quad k_{33} = k_{11}, \quad k_{34} = -k_{12}, \quad k_{44} = k_{22} \\ \alpha &= EI_w / \{2(1 - cC) + (v^2 - \mu^2)/(\mu v) sS\} \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、

$$c = \cos \mu L, \quad s = \sin \mu L, \quad C = \cosh vL, \quad S = \sinh vL$$

この固有剛性マトリックスは通常の静的剛性マトリックスと同様に、振動系が線形であることから重ね合わせることができる。構造物の境界条件による拘束節点変位の処理を施すと、固有円振動数 ω を求めるための振動数方程式は次のように得られる。

$$\det[\mathbf{K}(\omega)] = 0 \quad (16)$$

上式は固有円振動数 ω を含む三角関数および双曲線関数から構成される超越方程式となる。このような超越方程式を解く方法としては、二分法、セカント法、Newton-Raphson 法、Regula-Falsi 法等があるが、本研究では

安定して解を求めることができる Regula-Falsi 法を採用した¹³⁾。

次に、計算された固有円振動数 ω に対応した固有振動モードは、構造物の各節点における変位により求めることができる。また、式(9)で表される固有関数 $\tilde{\theta}(x)$ は積分定数によって決まる。式(12)、(13)を用いることより、積分定数ベクトル C は各部材要素の両端におけるねじり角 θ_x 、ねじり率 θ_w によって次のように求められる。

$$C = R(\omega)U \quad (17)$$

ここで、 $R(\omega)$ を積分定数マトリックスと呼ぶことにする。この積分定数マトリックスは4行4列の正方マトリックスとなり、各要素 r_{ij} は次の通りである。

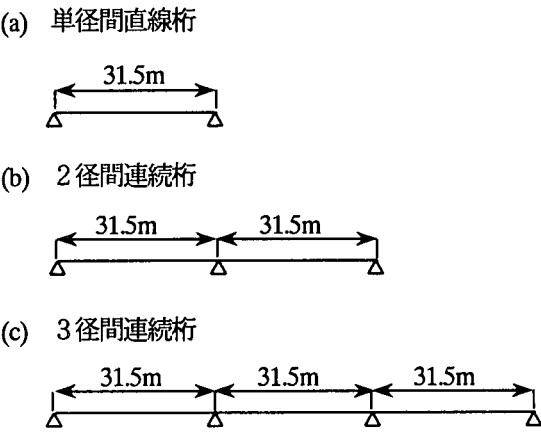
$$\begin{aligned} r_{11} &= \beta(cC - 1 - v/\mu sS), \quad r_{12} = \beta(cS/v - sC/\mu) \\ r_{13} &= \beta(C - c), \quad r_{14} = \beta(s/\mu - S/v) \\ r_{21} &= \beta(sC + v/\mu cS), \quad r_{22} = \beta\{sS/v - (1 - cC)/\mu\} \\ r_{23} &= -\beta(s + v/\mu S) \\ r_{24} &= -r_{13}/\mu, \quad r_{31} = -\mu r_{22}, \quad r_{32} = -r_{12}, \\ r_{33} &= -r_{13}, \quad r_{34} = -r_{14}, \quad r_{41} = -\mu/v r_{21}, \\ r_{42} &= -r_{11}/v, \quad r_{43} = -\mu/v r_{23}, \quad r_{44} = r_{13}/v \\ \beta &= 1/\{2(1 - cC) + (v^2 - \mu^2)/(\mu v sS)\} \end{aligned} \quad (18)$$

以上より、薄肉直線桁のねじり振動に関する基礎微分方程式の一般解を用いることによって、固有剛性マトリックスおよび積分定数マトリックスの定式化がなされた。

したがって、従来の直線桁の縦振動と曲げ振動に関する固有剛性マトリックスを重ね合わせるにより、分布座標系による立体骨組構造物の固有振動解析が可能になるものと考えられる¹²⁾。

3. 数値計算結果

数値計算例として、図—3に示すような単径間直線桁、2径間および3径間連続桁について考える。いずれの連続桁も等断面とし、等支間長($L=31.5m$)を有するものとする。離散座標系における連続桁の要素分割数は各径間長を等分割した6分割、8分割、10分割、12分割の4通りについて考える。一方、分布座標系における連続桁の全要素分割数は分割数によらず厳密解を求めることができることから、支間数と同値とする。つまり、連続



図—3 数値計算例

表—1 単径間直線桁のねじり固有振動数 (Hz)

Mode order	Lumped Mass Method				Consistent Mass Method				Continuous Mass Method
	N=6	N=8	N=10	N=12	N=6	N=8	N=10	N=12	
1	28.273 (-1.136)	28.415 (-0.640)	28.481 (-0.410)	28.517 (-0.285)	28.598 (0.000)	28.598 (0.000)	28.598 (0.000)	28.598 (0.000)	28.598
2	55.030 (-4.466)	56.143 (-2.534)	56.665 (-1.629)	56.950 (-1.134)	57.605 (0.003)	57.603 (0.001)	57.603 (0.000)	57.603 (0.000)	57.603
3	78.870 (-9.771)	82.516 (-5.600)	84.246 (-3.621)	85.200 (-2.529)	87.438 (0.031)	87.419 (0.009)	87.414 (0.003)	87.412 (0.001)	87.411
4	98.596 (-16.728)	106.899 (-9.715)	110.910 (-6.327)	113.145 (-4.440)	118.573 (0.144)	118.453 (0.043)	118.422 (0.016)	118.411 (0.007)	118.402
5	113.140 (-25.038)	128.713 (-14.720)	136.330 (-9.673)	140.626 (-6.827)	151.613 (0.453)	151.147 (0.144)	151.016 (0.057)	150.970 (0.026)	150.930
6		147.423 (-20.449)	160.173 (-13.569)	167.454 (-9.640)		186.011 (0.373)	185.603 (0.153)	185.453 (0.073)	185.319
7		162.359 (-26.819)	182.107 (-17.918)	193.411 (-12.823)		223.651 (0.807)	222.625 (0.345)	222.230 (0.167)	221.860
8			201.777 (-22.635)	218.258 (-16.316)			262.581 (0.678)	261.688 (0.335)	260.813
9			218.589 (-27.716)	241.735 (-20.062)			305.992 (1.187)	304.245 (0.609)	302.403
10				263.535 (-24.015)				350.351 (1.017)	346.825

表一2 2 径間連続桁のねじり固有振動数 (Hz)

Mode order	Lumped Mass Method				Consistent Mass Method				Continuous MassMethod
	N=12	N=16	N=20	N=24	N=12	N=16	N=20	N=24	
1	28.273 -(1.136)	28.415 -(0.640)	28.481 -(0.410)	28.517 -(0.285)	28.598 (0.000)	28.598 (0.000)	28.598 (0.000)	28.598 (0.000)	28.598
2	29.084 -(0.539)	29.150 -(0.313)	29.178 -(0.218)	29.193 -(0.166)	29.436 (0.665)	29.346 (0.356)	29.303 (0.208)	29.279 (0.128)	29.242
3	55.030 -(4.466)	56.143 -(2.534)	56.665 -(1.629)	56.950 -(1.134)	57.605 (0.003)	57.603 (0.001)	57.603 (0.000)	57.603 (0.000)	57.603
4	56.500 -(4.078)	57.550 -(2.295)	58.028 -(1.484)	58.287 -(1.044)	59.296 (0.669)	59.111 (0.355)	59.024 (0.207)	58.977 (0.128)	58.902
5	78.870 -(9.771)	82.516 -(5.600)	84.246 -(3.621)	85.200 -(2.529)	87.438 (0.031)	87.419 (0.009)	87.414 (0.003)	87.412 (0.001)	87.411
6	80.716 -(9.701)	84.474 -(5.497)	86.215 -(3.549)	87.167 -(2.484)	90.045 (0.736)	89.718 (0.370)	89.576 (0.211)	89.503 (0.130)	89.387
7	98.596 -(16.728)	106.899 -(9.715)	110.910 -(6.327)	113.145 -(4.440)	118.573 (0.144)	118.453 (0.043)	118.422 (0.016)	118.411 (0.007)	118.402
8	100.446 -(17.045)	109.247 -(9.777)	113.400 -(6.347)	115.693 -(4.453)	122.242 (0.956)	121.610 (0.434)	121.368 (0.234)	121.253 (0.139)	121.085
9	113.140 -(25.038)	128.713 -(14.720)	136.330 -(9.673)	140.626 -(6.827)	151.613 (0.453)	151.147 (0.144)	151.016 (0.057)	150.970 (0.026)	150.930
10	114.565 -(25.778)	131.273 -(14.954)	139.236 -(9.794)	143.696 -(6.905)	156.546 (1.420)	155.272 (0.594)	154.811 (0.296)	154.612 (0.167)	154.354

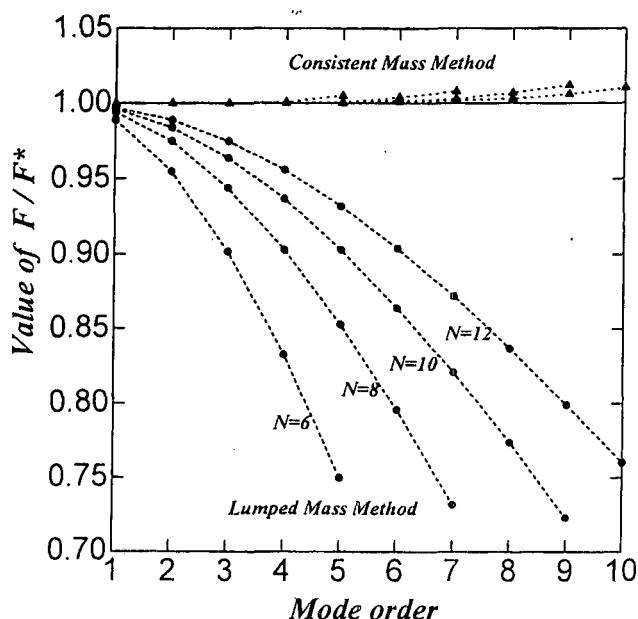
表一3 3 径間連続桁のねじり固有振動数 (Hz)

Mode order	Lumped Mass Method				Consistent Mass Method				Continuous MassMethod
	N=18	N=24	N=30	N=36	N=18	N=24	N=30	N=36	
1	28.273 -(1.136)	28.415 -(0.640)	28.481 -(0.410)	28.517 -(0.285)	28.598 (0.000)	28.598 (0.000)	28.598 (0.000)	28.598 (0.000)	28.598
2	28.674 -(0.841)	28.778 -(0.478)	28.826 -(0.315)	28.851 -(0.226)	29.012 (0.328)	28.968 (0.176)	28.946 (0.103)	28.935 (0.064)	28.917
3	29.507 -(0.229)	29.532 -(0.144)	29.539 -(0.119)	29.544 -(0.105)	29.873 (1.010)	29.735 (0.541)	29.668 (0.315)	29.632 (0.194)	29.575
4	55.030 -(4.466)	56.143 -(2.534)	56.665 -(1.629)	56.950 -(1.134)	57.605 (0.003)	57.603 (0.001)	57.603 (0.000)	57.603 (0.000)	57.603
5	55.759 -(4.271)	56.841 -(2.414)	57.340 -(1.556)	57.612 -(1.089)	58.442 (0.334)	58.350 (0.177)	58.307 (0.103)	58.284 (0.064)	58.247
6	57.259 -(3.882)	58.277 -(2.174)	58.732 -(1.410)	58.977 -(0.998)	60.175 (1.013)	59.892 (0.537)	59.758 (0.313)	59.687 (0.193)	59.572
7	78.870 -(9.771)	82.516 -(5.600)	84.246 -(3.621)	85.200 -(2.529)	87.438 (0.031)	87.419 (0.009)	87.414 (0.003)	87.412 (0.001)	87.411
8	79.793 -(9.730)	83.491 -(5.546)	85.226 -(3.583)	86.179 -(2.506)	88.734 (0.385)	88.562 (0.190)	88.489 (0.108)	88.452 (0.066)	88.394
9	81.654 -(9.676)	85.477 -(5.448)	87.226 -(3.513)	88.176 -(2.462)	91.396 (1.099)	90.904 (0.555)	90.689 (0.317)	90.578 (0.195)	90.402
10	98.596 -(16.728)	106.899 -(9.715)	110.910 -(6.327)	113.145 -(4.440)	118.573 (0.144)	118.453 (0.043)	118.422 (0.016)	118.411 (0.007)	118.402

質量法による3径間連続桁の全要素分割数は径間数と同じ3とする。連続桁の各支承上の境界条件はねじり角のみを拘束するものとする。さらに、数値計算に必要な断面諸元は以下の通りである。St.Venant のねじり剛性 $GJ=2.846 \times 10^6 \text{tm}^2$ 、そりねじり剛性 $EI_w=1.363 \times 10^6 \text{tm}^4$ 、極慣性モーメント $I_p=1.1023 \text{m}^4$ 、断面積 $A=0.2033 \text{m}^2$ 、単位長さ当たりの重量 $w=1.598 \text{t/m}$ 。

集中質量法、整合質量法および連続質量法により計算

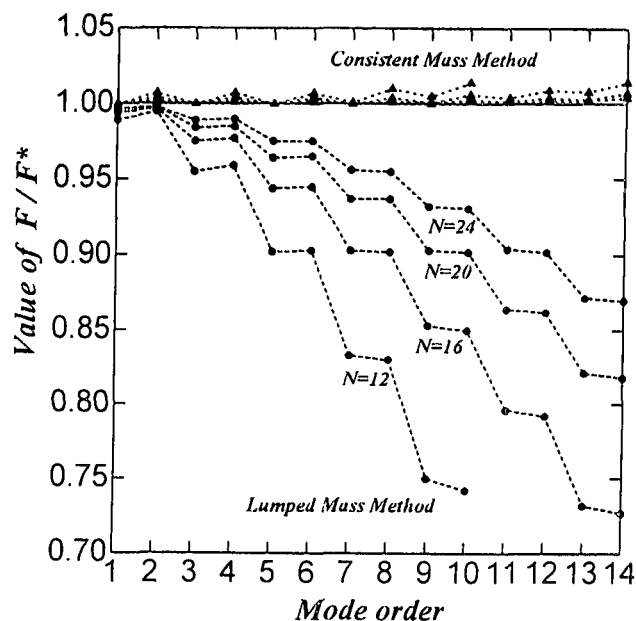
された単径間直線桁、2径間連続桁、3径間連続桁の1次から10次モードまでの固有振動数をそれぞれ表一1、2、3に示す。連続質量法により求められた固有振動数 F^* は厳密解である。一方、離散座標系による解、すなわち集中質量法および整合質量法により求められた固有振動数 F は近似解である。表一1、2、3の中で括弧内の数値は厳密解に対する近似解の誤差 $(F-F^*)/F^*$ を百分率で表したものである。集中質量法による解は厳密解に対



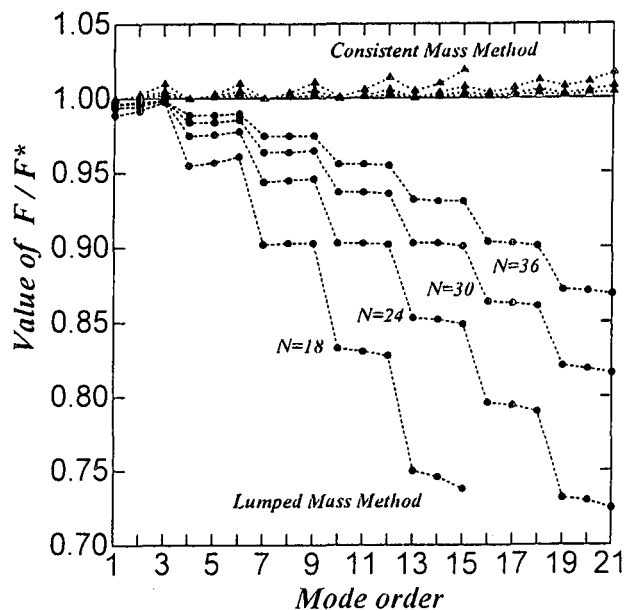
図—4 単径間直線桁の固有振動数比

して小さめの値を与え、高次固有振動モードになるにつれて解の精度が悪くなることがわかる。一方、整合質量法による解は厳密解に対してやや大きな値を与える。また、同じ要素分割数 N では、整合質量法による解は集中質量法による解に比較して、かなり良い精度で固有振動数を計算していることが確認できる。当然のことながら、いずれの解析方法も要素分割数 N が増加するにつれて徐々に厳密解に近づいて行く傾向が認められる。また、単径間直線桁の第1次、2次、3次、4次固有振動モードにおける振動数と誤差の値は、2径間連続桁の第1次、3次、5次、7次固有振動モードおよび3径間連続桁の第1次、4次、7次、10次固有振動モードそれぞれの計算結果と完全に一致している。この理由としては等断面かつ等支間長をもつ連続桁の径間数に応じて固有振動モード群が形成されるためと考えられる^{6), 14)}。

ねじり振動解析により得られた、単径間直線桁、2径間連続桁、3径間連続桁の固有振動数比 F/F^* とモード次数との関係をそれぞれ図—4、5、6に示す。図中の●印は集中質量法による解、▲は整合質量法による解である。集中質量法により計算された固有振動数の値は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与えることがわかる。高次固有振動モードになるにつれて、集中質量法により求められた固有振動数の精度が低下する傾向にある。集中質量法による解は整合質量法による解に比較して固有振動数の精度はかなり悪いことが認められるが、要素分割数 N を増加することにより、解の精度が向上することがわかる。また、連続桁の径間数に応じて、2径間連続桁では2個ずつ、3径間連続桁では3個ずつ固有振動数の接近があり、固有振動モード群が形成されていることが理解できる。



図—5 2径間連続桁の固有振動数比



図—6 3径間連続桁の固有振動数比

4. 固有剛性マトリックスの Taylor 展開

本研究では、式(15)で誘導した固有剛性マトリックス $K(\omega)$ の各要素 k_{ij} を部材長 $L=0$ のまわりで Taylor 展開し連続質量法による解と集中質量法および整合質量法による解との数学的な位置関係について考える。まず、三角関数のべき級数展開は変数を x とすると¹⁵⁾

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (19a, b)$$

である。さらに、双曲線関数を無限級数展開すると次のようになる。

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (20a \cdot b)$$

いま、一つの計算例として式(15)の固有剛性マトリックス $\mathbf{K}(\omega)$ の1行1列の要素 k_{11} を取り出し、項数 $n=0$ から $n=6$ までのベキ級数展開を行うと次式を得る。

$$k_{11} = \frac{EI_w(\mu^2 + \nu^2)(\nu \cos \mu L \sinh \nu L + \mu \sin \mu L \cosh \nu L)}{2(1 - \cos \mu L \cosh \nu L) + \frac{\nu^2 - \mu^2}{\mu \nu} \sin \mu L \sinh \nu L}$$

$$= \frac{12EI_w}{L^3} + \frac{6GJ}{5L} - \frac{13}{35}mr^2L\omega^2 - \frac{GJL}{700} \left(\frac{GJ}{EI_w} \right)$$

$$+ \frac{mr^2L^3}{3150} \left(\frac{GJ}{EI_w} \right) \omega^2 + \frac{GJL^3}{63000} \left(\frac{GJ}{EI_w} \right)^2 + \cdots \quad (21)$$

ここで、上式(21)の右辺第1項および第2項は式(3)の静的剛性マトリックス $\mathbf{K}_s$ の1行1列の要素と全く同じである。また、右辺の第3項は整合質量マトリックス $\mathbf{M}_c$ の1行1列の要素と完全に一致していることがわかる。

固有剛性マトリックス $\mathbf{K}(\omega)$ の他の要素に対しても、同様のベキ級数展開を施すと、次のようなマトリックス関係式が得られる。

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{K}_0 \cdot EI_w + \mathbf{G}_0 \cdot GJ - \mathbf{M}_0 \cdot \omega^2 - \mathbf{G}_1 \cdot (GJ)^2$$

$$+ \mathbf{M}_1 \cdot GJ\omega^2 + \mathbf{G}_2 \cdot (GJ)^3 + \cdots \quad (22)$$

ここで、式(22)のマトリックス $\mathbf{K}_0$ 、 $\mathbf{G}_0$ 、 $\mathbf{M}_0$ 、 $\mathbf{G}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{G}_2$ の要素の詳細は付録Aにまとめて示す。

上式(22)の右辺の第1項および第2項を重ね合わせた係数マトリックス $(\mathbf{K}_0 \cdot EI_w + \mathbf{G}_0 \cdot GJ)$ は式(3)のそりねじり変形に関する静的剛性マトリックス $\mathbf{K}_s$ と同一である。また、この係数マトリックス $\mathbf{K}_0$ は桁の曲げ変形に関する静的剛性マトリックスに対応し、係数マトリックス $\mathbf{G}_0$ は桁の座屈問題における幾何学的剛性マトリックス（または初期応力マトリックス）¹⁶⁾ に類似していることがわかる。さらに、第3項の係数マトリックス $\mathbf{M}_0$ は式(5)の整合質量マトリックス $\mathbf{M}_c$ に完全に一致している。式(22)の右辺第4、5、6項の係数マトリックス $\mathbf{G}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{G}_2$ は固有剛性マトリックス $\mathbf{K}(\omega)$ を Taylor 展開した場合の高次の項である。これらの係数マトリックス $\mathbf{G}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{G}_2$ の各要素の値は係数マトリックス $\mathbf{G}_0$ 、 $\mathbf{M}_0$ のものに比較してかなり小さいことがわかる。したがって、部材長が十分に短い場合には高次項が無視でき、整合質量法による解は連続質量法による解と一致することになる。つまり、整合質量法は固有剛性マトリックスの高次項の影

響を無視した連続質量法に対応した一種の近似解法であると結論づけられる。さらに、式(4)と式(5)の質量マトリックスを比較することにより、集中質量法は整合質量マトリックスの質量の連成項（非対角項の要素）を無視した整合質量法の簡易解法とすることができる。このような異なる3種類の質量マトリックス法に関する数学的な位置関係は3. に示したねじり固有振動数の数値計算結果の精度を裏付けるものである。

5. あとがき

本研究は2軸対称薄肉断面を有する直線桁のねじり固有振動解析にともなう解の精度について、集中質量法、整合質量法および連続質量法による数値計算を行うことによって検討し、さらに、異なる3種類の質量マトリックス法の位置関係について数学的観点から考察したものである。ここで得られた結論および今後の研究課題についてまとめると次のようになる。

集中質量法により計算された薄肉直線桁のねじり固有振動数は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与える。連続桁の要素分割数が増加するにつれて、近似解法による解は厳密解に近づく傾向がある。また、同じ要素分割数では整合質量法により求められた固有振動数の値は、集中質量法を用いる場合よりもかなり良い精度で計算できることがわかった。等断面等支間長を有する連続桁のねじり固有振動数は、その径間数に応じた固有値の接近が見られ、固有振動モード群を形成する。また、単径間直線桁の各次数に応じた固有振動モードは2径間、3径間連続桁の固有振動モードの中にも再現され、そのねじり固有振動数の値および厳密解に対する誤差は同じように繰り返されることが確認された。

固有剛性マトリックスの要素に含まれる三角関数、双曲線関数を Taylor 展開することにより、式(15)で誘導した固有剛性マトリックスは、静的剛性マトリックス、整合質量マトリックスおよび高次項の係数マトリックスにより構成されていることが明らかとなった。したがって、整合質量法は高次の係数マトリックスを無視した連続質量法の特別な解法であると考えられる。さらに、集中質量法は整合質量マトリックスの質量の連成項を無視した整合質量法の簡易解析法とすることができる。

今後の研究課題として、2軸非対称薄肉開き断面を有する直線桁および曲線桁等における固有振動数とその精度について検討する必要がある。2軸非対称断面桁は図心とせん断中心の位置が異なることから、水平および鉛直曲げ振動とねじり振動とが連成することになる。よって、集中質量法、整合質量法および連続質量法による固有振動数の精度と連成効果については今後の重要な検討課題となるであろう。最後に、本研究の数値計算には武村信也氏（清水建設）の協力を得たことを付記し、ここに感謝の意を表します。

<付録 A>

式(22)のマトリックス $\mathbf{K}_0$ 、 $\mathbf{G}_0$ 、 $\mathbf{M}_0$ 、 $\mathbf{G}_1$ 、 $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{G}_2$ の要素は以下の通りである。

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \text{Sym.} & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2L}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ & & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ \text{Sym.} & & & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

$$\mathbf{M}_0 = mr^2 L \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & \frac{9}{70} & -\frac{13L}{420} \\ & \frac{L^2}{105} & \frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} \\ & & \frac{13}{35} & -\frac{11L}{210} \\ \text{Sym.} & & & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

$$\mathbf{G}_1 = \frac{L}{EI_w} \begin{bmatrix} \frac{1}{700} & \frac{L}{1400} & -\frac{1}{700} & \frac{L}{1400} \\ & \frac{11L^2}{6300} & -\frac{L}{1400} & -\frac{13L^2}{12600} \\ & & \frac{1}{700} & -\frac{L}{1400} \\ \text{Sym.} & & & \frac{11L^2}{6300} \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{mr^2 L^3}{EI_w} \begin{bmatrix} \frac{1}{3150} & \frac{L}{1260} & -\frac{1}{3150} & -\frac{L}{1680} \\ & \frac{L^2}{3150} & \frac{L}{1680} & -\frac{L^2}{3600} \\ & & \frac{1}{3150} & -\frac{L}{1260} \\ \text{Sym.} & & & \frac{L^2}{3150} \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{L^3}{100(EI_w)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{630} & \frac{L}{1260} & -\frac{1}{630} & \frac{L}{1260} \\ & \frac{L^2}{270} & -\frac{L}{1260} & -\frac{L^2}{378} \\ & & \frac{1}{630} & -\frac{L}{1260} \\ \text{Sym.} & & & \frac{L^2}{270} \end{bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

参考文献

- 1) Valsov, V. Z. : Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation Ltd., 1961.
- 2) Krajcinovic, D. : A consistent discrete elements technique for thinwalled assemblages, International J. of Solids and Structures, Vol.5, pp.639-662, 1969.
- 3) 結城皓曠・前田幸雄：薄肉断面構造の三次元挙動の解析，土木学会論文報告集，第 224 号，pp.67-78, 1974.
- 4) Wekezer, J. W. : Vibrational analysis of thin-walled bars with open cross sections, J. of Structural Engineering, ASCE, Vol.115, No.12, pp.2965-2978, 1989.
- 5) 川井忠彦・藤谷義信：振動および応答解析入門，培風館，1991.
- 6) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Free vibration analysis of continuous beams, J. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.111, No.5, pp.639-652, 1985.
- 7) 林川俊郎：V レッグラーメン橋の固有振動解析とその精度の検討について，構造工学論文集，Vol.35A, pp.719-725, 1989.
- 8) Clough, R. W. and Penzien, J. : Dynamics of Structures, McGraw-Hill Book Co., 2nd. ed., 1993.
- 9) Paz, M. : Structural Dynamics, Theory and Computation, Van Nostrand Reinhold, 3rd. ed., 1991.
- 10) 藤谷義信：薄肉はり構造解析，培風館，1990.
- 11) 鷺津久一郎・宮本博・山田嘉昭・山本善之・川井忠彦共編：有限要素法ハンドブック，培風館，1981.
- 12) 橋梁振動研究会編：橋梁振動の計測と解析，技報堂，1993.
- 13) Wendroff, B. : Theoretical Numerical Analysis, Academic Press, 1966.
- 14) 林川俊郎・佐藤康治・角田與史雄：平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度，北海道大学工学部研究報告，第 148 号，pp1-15, 1989.
- 15) 森口繁一・宇田川銑久・一松信：数学公式Ⅱ一級数・フーリエ解析一，岩波全書，1979.
- 16) 川井忠彦・藤谷義信：座屈問題解析，培風館，1991.

(1998 年 4 月 24 日受付)