

# 簡便かつ高精度な移流拡散方程式の数値解析法

Simple and Highly-Accurate Scheme for Advection-Diffusion Equation

朝位孝二\*・小松利光\*\*・大串浩一郎\*\*\*

Koji ASAI, Toshimitsu KOMATSU and Koichiro OHGUSHI

\*正会員 工博 山口大学講師 工学部社会建設工学科 (〒755-8611 宇部市常盤台2557)

\*\*正会員 工博 九州大学教授 工学部建設都市工学科 (〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)

\*\*\*正会員 工博 佐賀大学助教授 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄町1番地)

A simple and highly-accurate scheme for solving the advection-diffusion equation is proposed in this paper. The proposed scheme is named HORNET scheme. The several model computations are carried out to verify the high performance of the scheme. From the results, It is found that the present scheme has almost the same accuracy as the existing highly-accurate scheme and will be easily treated because of its compactness.

*Key Words* : mass transport simulation, numerical calculation, advection term, HORNET scheme

## 1. 序論

河川や湖沼、海洋などの水質変化を予測するために移流拡散方程式をコンピューターを用いて数値的に解くことは工学的に重要なことである。一般に拡散項は比較的精度良く計算できるのに対し、移流項の計算では誤差が発生しやすくその取り扱いに十分注意を要する。

移流項と拡散項を分離して解くスプリット・オペレーター・アプローチ (Split operator approach) はそれぞれの項に対して最適な計算手法を選択することができる。Holly and Preissmannはこの手法の使用を前提として、高精度計算スキームを提案した<sup>1)</sup>。このスキームは特性曲線に基づく手法で、2点格子間の補間に3次のエルミート内挿式を用いるものである。このスキームは従属変数(濃度)だけでなく従属変数の導関数(濃度勾配)も輸送する必要がある。ところで、従属変数だけでなくその導関数も用いる解法として、1985年にYabeらが提案したCIP法<sup>2)</sup>がある。YabeらはこのCIP法を多次元問題に適用できるように修正を加えた<sup>3)</sup>。これが現在広く用いられているCIP法である。しかしながら、この修正されたCIP法はHolly and Preissmannの手法と全く同じものである。歴史的にHolly and Preissmannの方が先に提案していることを指摘しておく。

小松らは従属変数だけを用いてHolly and Preissmannスキームに匹敵する計算精度をもつ6-

pointスキーム<sup>4)</sup>、SOWMACスキーム<sup>5)</sup>、Implicit HORNETスキーム<sup>6)</sup>を開発した。これらもスプリット・オペレーター・アプローチの使用を前提としている。これらのスキームを用いてプログラムを作製する場合、移流計算のルーチンと拡散計算のルーチンの2つが必要となる。また移流計算の結果を用いて拡散計算を行うので、これら2つのルーチンはそれぞれ独立にベクトル化できても両者を一緒にしてベクトル化はできず、この部分で計算時間が掛かることになる。計算時間の短縮を考えれば移流と拡散とを分離せず同時に解く方が有利である。また、空間的に使用する格子点数が少ないコンパクトにまとまったスキームは境界近傍の取り扱いも容易で簡便なスキームと言える。

最近、D.T.Jaque and J.E.Ballは移流項と拡散項を同時に解くコンバインド・オペレーター・アプローチ (Combined operator approach; 通常の解法であるがスプリット・オペレーター・アプローチとの区別を明確にするためあえて用いる)に基づく解法を提案している<sup>7)</sup>。しかしながら、彼らの方法は陰解法であり、連立方程式を解くルーチンを必要とする。またA.Verwey and S.Ilicはボックススキームを改良した空間方向にわずか2点しか使用しないコンパクトなスキームを開発・提案したが、彼らの方法もまた陰解法であった<sup>8)</sup>。

本研究はコンバインド・オペレーター・アプローチに基づいた、コンパクトで高精度な陽解法のスキー

△の開発を試みたものである。

## 2. スキームの誘導

1次元移流拡散方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで、 $\Phi$ は拡散物質の濃度、 $u$ は $x$ 方向の流速、 $D$ は拡散（分散）係数である。簡単のため、 $u$ 、 $D$ は一定値として計算スキームの定式化を行う。

式(1)の非定常項は片側差分を、拡散項は2次精度の中央差分を用いて離散化を行う。移流項については時間ステップ $n$ および $n-1$ における1次精度の風上差分の荷重平均を用いて近似する。以上より最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} + u \left[ \theta \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{\Phi_i^{n-1} - \Phi_{i-1}^{n-1}}{\Delta x} \right] \\ = D \frac{\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\theta$ は荷重パラメータ、 $\Delta x$ は空間座標の計算格子間隔、 $\Delta t$ は時間座標の計算格子間隔である。

次に荷重パラメータ $\theta$ を決定するために打ち切り誤差を評価する。Taylor級数解析を式(2)に適用すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ = -\frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \right\} \\ + \frac{D}{\Delta x^2} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \right\} \\ + \left( \frac{u}{\Delta x} \theta + \frac{D}{\Delta x^2} \right) \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \right\} \\ - \frac{u(1-\theta)}{\Delta x} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \right\} \\ + \frac{u(1-\theta)}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial}{\partial x} \Delta x \right)^2 \Phi \right. \\ \left. - \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial}{\partial x} \Delta x \right)^3 \Phi + \dots \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)の右辺が式(1)にこのスキームを用いた場合の打ち切り誤差を表している。右辺には時間微分および時間と空間の交差微分が含まれている。誤差項を統一的に取り扱うために、これらを空間微分に置き換えるのが便利である。式(1)に対し時間微分あるいは空間微分を行い、また4階以上の微分を微小として無視すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2uD \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} = -u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + D \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = -u^3 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^2 \partial x} = u^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial x^2} = u^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \quad (8)$$

式(4)～(8)を式(3)に代入し、4階以上の微分を無視すれば式(9)が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \left[ \alpha - \alpha^2(3-2\theta) \right] \frac{\Delta x^2}{2! \Delta t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ + \left[ 6\alpha\beta(2-\theta) - \alpha^3(2-3\theta) + \alpha \{ 3\alpha(1-\theta) - 1 \} \right] \frac{\Delta x^3}{3! \Delta t} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\alpha$ はクーラン数 ( $\equiv u \Delta t / \Delta x$ )、 $\beta$ は拡散数 ( $\equiv D \Delta t / \Delta x^2$ ) である。

式(9)の右辺第1項、第2項をそれぞれ2次、3次の数値拡散項と呼ぶことにする。高精度計算スキームを作るためには、右辺の数値拡散項を極力小さくする必要があり、ここでは以下の要領で2次および3次の数値拡散項を消去する。

(1) 2次の数値拡散項を消去するために負の人工拡散項を基礎式に加える。すなわち、これは以下に示す式を基礎式として用いることに対応する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left( D + K \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (10)$$

ここで $K$ は後述の負の人工拡散項である。

(2) 3次の数値拡散項の係数が恒等的に0となるよう

に $\alpha$ と $\beta$ の関数として $\theta$ を決定する。つまり、

$$6\alpha\beta(2-\theta)-\alpha^3(2-3\theta)+\alpha\{3\alpha(1-\theta)-1\}=0 \text{ において} \\ \theta \text{ について解けばよい。}$$

上述の手順に従い、式(10)を式(2)の様に離散化し整理すれば次式を得る。

$$\Phi_i^{n+1} = p_1 \Phi_{i+1}^n + p_2 \Phi_i^n + p_3 \Phi_{i-1}^n + p_4 \Phi_i^{n-1} + p_5 \Phi_{i-1}^{n-1} \\ \text{(HORNETスキーム)} \quad (11)$$

ここで、

$$p_1 = \beta + K, \quad p_2 = 1 - \alpha\theta - 2\beta - 2K, \quad p_3 = \alpha\theta + \beta + K, \\ p_4 = -\alpha(1-\theta), \quad p_5 = \alpha(1-\theta),$$

$$K = -\frac{1}{2}[\alpha - \alpha^2(3-2\theta)], \quad \theta = \frac{2\alpha^2 - 3\alpha + 1 - 12\beta}{3(\alpha^2 - \alpha - 2\beta)}$$

このスキームは $\theta=1$ の時Lax-Wendroffスキームと一致し、 $\theta=1$ かつ $K=0$ の時には1次精度風上差分に帰着する。式(11)がこの論文で提案する1次元移流拡散方程式を計算するための新しいスキームであり、以下HORNETスキーム (High Order accuracy scheme by Reducing Numerical Error Terms) と呼ぶことにする。HORNETスキームは空間・時間に関して3次精度のスキームとなっている。

### 3. 安定解析

本節では、前節で提案したHORNETスキームの特性をvon Neumannの安定解析を用いて調べる。以下に示すフーリエ成分を式(11)に代入して整理すれば式(12)が得られる。

$$\Phi_i^{n+1} = A \exp\{j\kappa x\} \exp\{-j\sigma(t + \Delta t)\} \\ \Phi_{i+1}^n = A \exp\{j\kappa(x + \Delta x)\} \exp\{-j\sigma t\} \\ \Phi_i^n = A \exp\{j\kappa x\} \exp\{-j\sigma t\} \\ \Phi_{i-1}^n = A \exp\{j\kappa(x - \Delta x)\} \exp\{-j\sigma t\} \\ \Phi_i^{n-1} = A \exp\{j\kappa x\} \exp\{-j\sigma(t - \Delta t)\} \\ \Phi_{i-1}^{n-1} = A \exp\{j\kappa(x - \Delta x)\} \exp\{-j\sigma(t - \Delta t)\}$$

$$\exp(-j\sigma\Delta t) = p_1 \exp(j\kappa\Delta x) \\ + p_2 + p_3 \exp(-j\kappa\Delta x) + p_4 \exp(j\sigma\Delta t) \\ + p_5 \exp(-j\kappa\Delta x) \exp(j\sigma\Delta t) \\ = p_1 \exp(j\kappa\Delta x) + p_2 + p_3 \exp(-j\kappa\Delta x) \\ + \frac{p_4}{\exp(-j\sigma\Delta t)} + \frac{p_5 \exp(-j\kappa\Delta x)}{\exp(-j\sigma\Delta t)} \quad (12)$$

ここで、 $\kappa$ は波数、 $\sigma$ は角周波数、 $j$ は虚数単位であ

る。式(12)をさらに変形すれば次式を得る。

$$G^2 - [p_1 \exp(j\kappa\Delta x) + p_2 + p_3 \exp(-j\kappa\Delta x)] G \\ - [p_4 + p_5 \exp(-j\kappa\Delta x)] = 0 \quad (13)$$

ここで、 $G = \exp(-j\sigma\Delta t)$ である。

式(13)の根は次式で与えられる。

$$G = \frac{1}{2} \left\{ (p_1 + p_3) \cos z + p_2 \pm (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\theta'}{2} \right\} \\ + j \frac{1}{2} \left\{ (p_1 - p_3) \sin z \pm (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\theta'}{2} \right\} \quad (14)$$

ここで、

$$X = \{(p_1 + p_3) \cos z + p_2\}^2 - 4p_5(1 - \cos z) \\ - \{(p_1 - p_3) \sin z\}^2$$

$$Y = 2(p_1 - p_3) \sin z \{(p_1 + p_3) \cos z + p_2\} - 4p_5 \sin z$$

$$\theta' = \tan^{-1} \frac{Y}{X}, \quad z = \kappa\Delta x = \frac{2\pi}{L} \Delta x$$

$L$ は波長である。

$G$ の絶対値が増幅係数であり以下のようなになる。

$$|G| = \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ (p_1 + p_3) \cos z + p_2 \pm (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\theta'}{2} \right\}^2 \\ + \left\{ (p_1 - p_3) \sin z \pm (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\theta'}{2} \right\}^2} \quad (15)$$

式(15)中の記号 $\pm$ は $+$ を採用する。これは $-$ を用いた場合の増幅係数が物理的に意味のない結果を示すためである。

次に位相誤差に関する指標を求める。

位相誤差に関する指標をこの論文では相対位相速度と呼ぶことにする。 $G$ と相対位相速度の関係は次式で与えられる。

$$\frac{Re(\sigma)}{\kappa u} = \frac{\tan^{-1} \left( \frac{Im(G)}{Re(G)} \right)}{-\alpha z} \quad (16)$$

式(16)に式(14) (記号 $\pm$ は $+$ を採用する)を代入すれば以下のような相対速度が得られる。

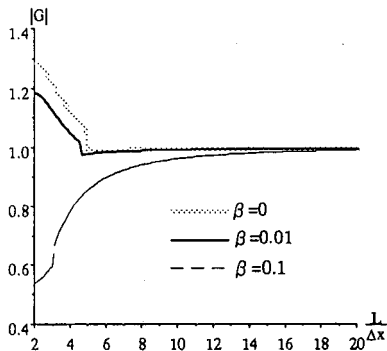


図-1 増幅係数 ( $\alpha = 0.25$ )

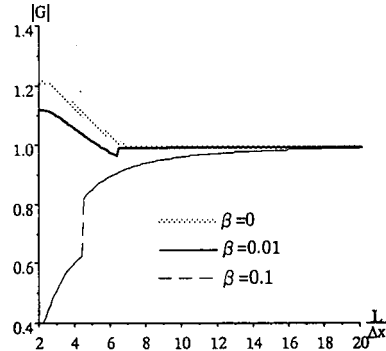


図-2 増幅係数 ( $\alpha = 0.5$ )

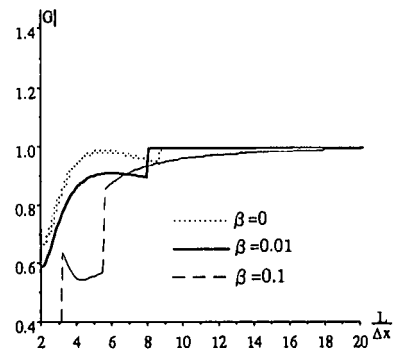


図-3 増幅係数 ( $\alpha = 0.75$ )

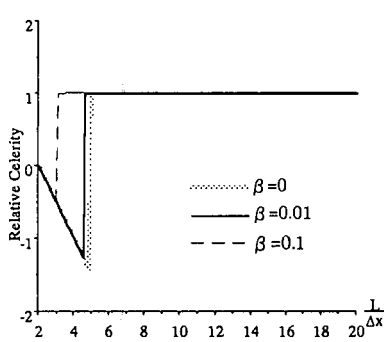


図-4 相対位相速度 ( $\alpha = 0.25$ )

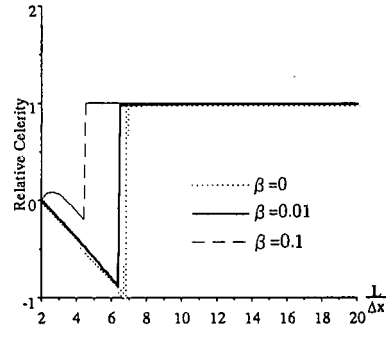


図-5 相対位相速度 ( $\alpha = 0.5$ )

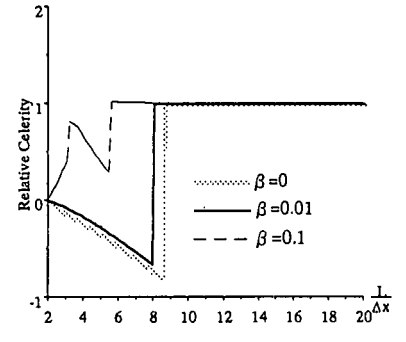


図-6 相対位相速度 ( $\alpha = 0.75$ )

$$\frac{Re(\sigma)}{\kappa u} = \frac{-1}{2\alpha\pi} \frac{L}{\Delta x}$$

$$\times \tan^{-1} \left( \frac{(p_1 - p_3) \sin z + (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\theta'}{2}}{(p_1 + p_3) \cos z + p_2 + (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\theta'}{2}} \right) \quad (17)$$

増幅係数および相対位相速度はクーラン数  $\alpha$ 、拡散数  $\beta$ 、波長  $L$  と格子幅の比  $L/\Delta x$  の3つの量に依存する。 $\alpha=0.25, 0.5, 0.75$  における増幅係数  $|G|$  の  $L/\Delta x$  に対する変化を  $\beta$  をパラメータにしてそれぞれ図-1, 2, 3に示す。また同様に相対位相速度と  $L/\Delta x$  の関係を図-4, 5, 6に示す。

$L/\Delta x$  が小さい領域では増幅係数および相対位相速度は共に複雑な挙動を示しており、特に増幅係数が1を越える不安定領域が存在する。クーラン数が大きくなるにつれ不安定領域は大きくなる傾向があるが、 $\alpha=0.75$  の場合には増幅係数は1以下に収まっている。また相対位相速度もクーラン数が大きくなるにつれ値1をとらない領域が増加していく。従ってクーラン数が大きくなると精度が悪くなる恐れがある。

一方、拡散が強くなると不安定領域は小さくなっている。加えて拡散作用により  $L$  が増加するため  $L/\Delta x$  は時間的に大きくなる傾向を持つ。したがって計算精度は向上していくものと思われる。

#### 4. HORNETスキームのモデル計算

##### 4-1 1次元移流拡散計算

HORNETスキームの精度を検証するためガウス型濃度分布の移流拡散計算を以下の初期条件・計算条件の下で行った。標準偏差 264m, ピーク値 10, 中心位置  $x=1400\text{m}$  の初期ガウス型濃度分布が 9600sec 間拡散を受けながら無限長水路を流下方向に輸送される。計算格子間隔は空間方向, 時間方向にそれぞれ  $\Delta x=200\text{m}$ ,  $\Delta t=100\text{sec}$  である。流速  $u$  は 0.5m/sec, 1.0m/sec, 1.5m/sec の3種類を用いた。このときクーラン数  $\alpha$  は 0.25, 0.5, 0.75 となる。拡散係数は  $0\text{m}^2/\text{sec}$ ,  $3.778\text{m}^2/\text{sec}$ ,  $10.89\text{m}^2/\text{sec}$  の3通りを与えた。 $3.778\text{m}^2/\text{sec}$  は 9600sec 後に濃度のピーク値 10 を厳密に7に減少させる拡散係数値であり、 $10.89\text{m}^2/\text{sec}$  は同様にピーク値 10 を5に減少させる値である。

図-7, 8, 9はそれぞれ  $\alpha=0.25, 0.5, 0.75$  に対す

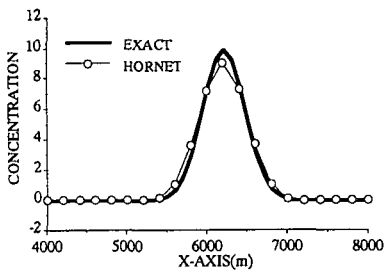


図-7 計算結果  
( $\alpha = 0.25, D=0\text{m}^2/\text{sec}$ )

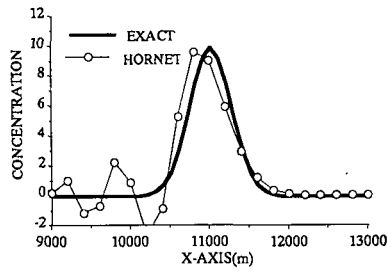


図-8 計算結果  
( $\alpha = 0.5, D=0\text{m}^2/\text{sec}$ )

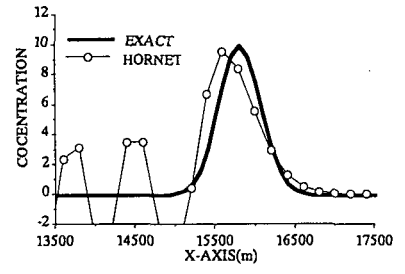


図-9 計算結果  
( $\alpha = 0.75, D=0\text{m}^2/\text{sec}$ )

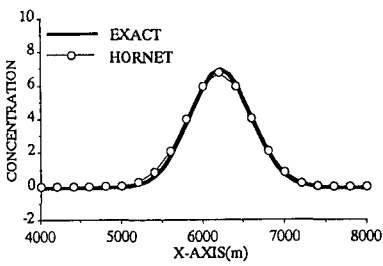


図-10 計算結果  
( $\alpha = 0.25, D=3.778\text{m}^2/\text{sec}$ )

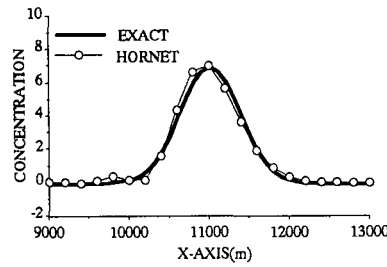


図-11 計算結果  
( $\alpha = 0.5, D=3.778\text{m}^2/\text{sec}$ )

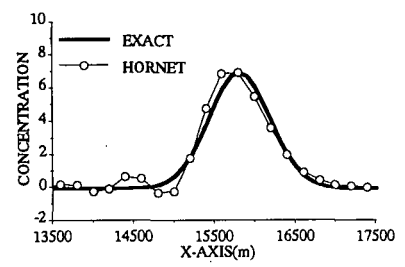


図-12 計算結果  
( $\alpha = 0.75, D=3.778\text{m}^2/\text{sec}$ )

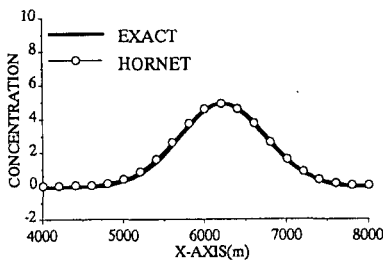


図-13 計算結果  
( $\alpha = 0.25, D=10.89\text{m}^2/\text{sec}$ )

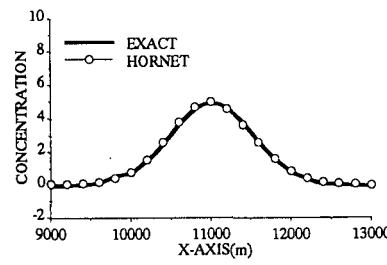


図-14 計算結果  
( $\alpha = 0.5, D=10.89\text{m}^2/\text{sec}$ )

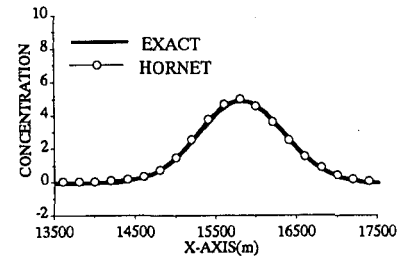


図-15 計算結果  
( $\alpha = 0.75, D=10.89\text{m}^2/\text{sec}$ )

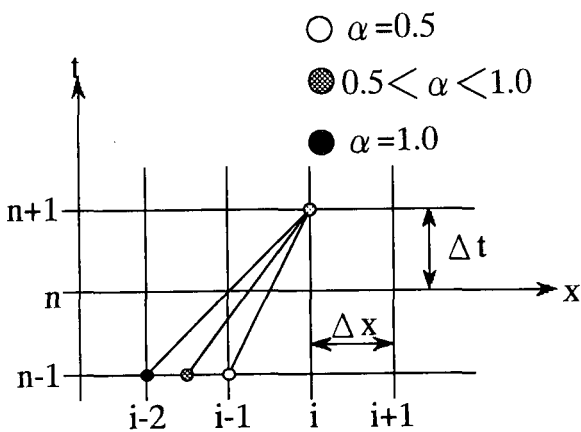
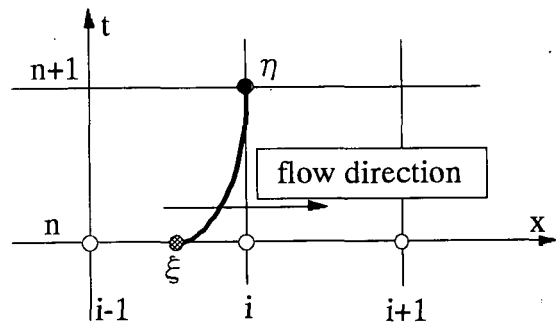


図-16 特性曲線 ( $u=\text{const.}$ )



$$\text{Upwind} : u \frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx u \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\text{Downwind} : u \frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx u \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x}$$

図-17 風上差分と風下差分

る純粋移流の計算結果である。  $\alpha = 0.25$  の場合は計算解は厳密解と良く一致しているが、クーラン数が大きくなるにつれ計算解は数値振動が現れ不安定になってくる。ところで図-3からは  $\alpha = 0.75$  の時は増幅係数は1以下であり安定な解が得られることが示唆されていた。従ってこの不安定性は位相誤差に起因するものと思われる。

拡散が存在する場合の計算結果を図-10~15に示す。これらの結果からクーラン数が大きい場合でも、拡散が強ければ十分精度の良い計算解が得られることが分かる。

図-16は流速が一定の場合の格子点  $(x_i, t_{n+1})$  を通過する特性曲線と  $n-1$  タイムステップ軸との交点を示したものである。クーラン数が0.5を越える場合は  $n-1$  ステップにおける特性曲線の交点は、移流項の差分近似に用いられている  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  の格子点の外側の  $x_{i-2} \sim x_{i-1}$  間にある。図-17から理解されるように、特性曲線の足(ξ点)の両側の節点の値を用いて移流項を近似したものが風上差分で、その下流側2点を用いたものが風下差分である。HORNETスキームにおいてクーラン数が0.5を超える場合は  $n-1$  ステップでは風下差分を使用していることになり、拡散が小さい場合は精度が悪くなることが推測される。したがってHORNETスキームはクーラン数が0~0.5の範囲内で使用されることが望ましい。

#### 4-2 HORNETスキームと他のスキームの比較

拡散のない移流計算によって他の計算スキームと精度の比較を行った。初期条件として用いた濃度分布はガウス分布、半楕円分布、矩形分布の3種類が連続したものである。

ピーク値1、標準偏差1.5、中心位置  $x=150\text{m}$  のガウス分布、中心位置  $x=125\text{m}$ 、流れ方向の半径10m、ピーク値1の半楕円分布及び中心位置  $x=100\text{m}$ 、上辺の長さ10m、高さ(濃度)1の矩形分布の重ね合わせを一定流速0.5m/secで100sec間移流させる。計算格子間隔は  $\Delta x=1.0\text{m}$ 、 $\Delta t=0.2\text{sec}$  である。この時クーラン数は0.1である。計算結果を図-18に示す。比較のために用いたスキームは、QUICKESTスキーム、6-pointスキーム、TVD Lax-Wendroffスキーム(流束制限関数にはRoeのsuperbee)<sup>9)</sup> およびHolly-Preissmannスキーム(CIPスキーム)であり、その計算結果をそれぞれ図-19~22に示す。

QUICKESTスキームは顕著な数値振動は引き起こしてはいないが、オーバーシュートやアンダーシュートが見られる。6-pointスキームはガウス分布の極値の再現性は極めて良好であるが、矩形分布の

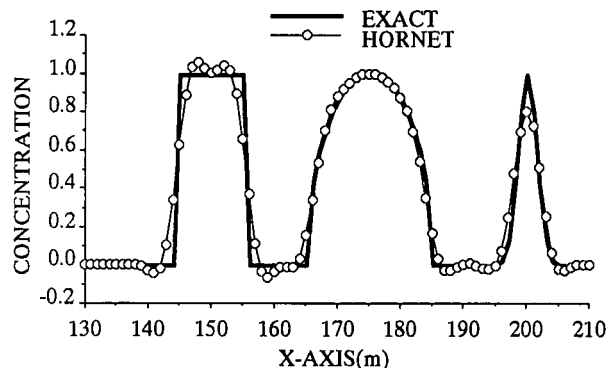


図-18 HORNETスキームによる計算結果

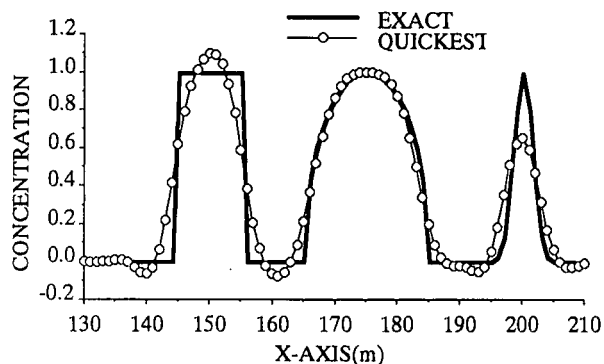


図-19 QUICKESTスキームによる計算結果

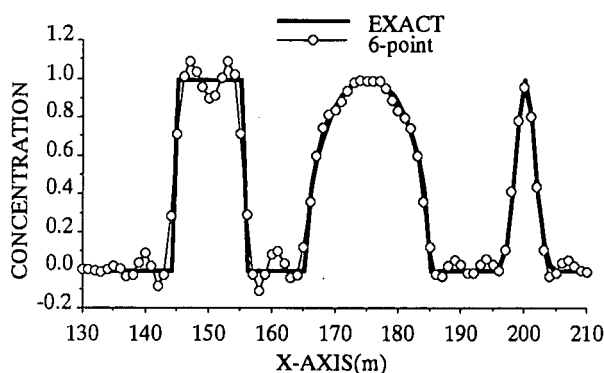


図-20 6-pointスキームによる計算結果

不連続点の前後では数値振動が比較的大きい。また半楕円分布の頂点近傍で解が少し乱れている。TVD Lax-Wendroffスキームは2次精度のTVDスキームであり、数値振動は生じておらず分布形状もある程度再現できている。しかしながら、半楕円分布とガウス分布の頂点近傍で解は平らになっており、特にガウス分布のピーク値の再現性は良くない。HORNETスキームは極値の再現性ではわずかながら6-Pointスキームに劣るが良好にピーク値を捕獲していると言える。HORNETスキームはTVDスキームではないので不連続面の前後で多少数値振動が発生しているが、比較的安定な解が得られている。また半楕円分布の再現性はここに示したスキームの中で最も優れている。

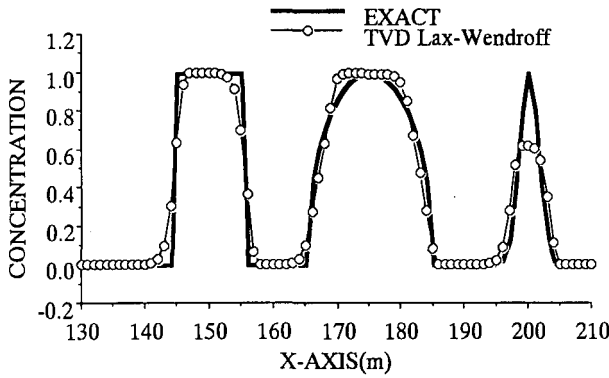


図-21 TVD Lax-Wendroff スキームによる計算結果

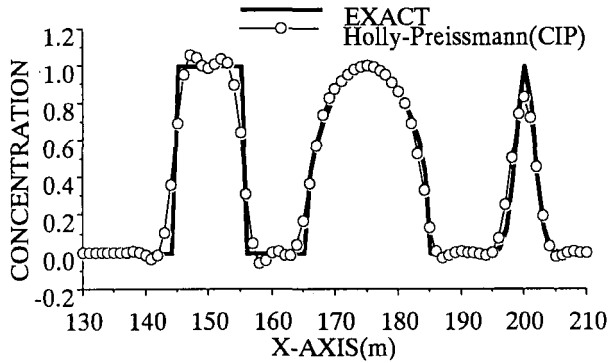


図-22 Holly-Preissmann スキーム (CIP スキーム) による計算結果

ここで示したモデル計算は簡単な一次元計算例であるので各スキームの計算時間に有意な差は現れなかった。HORNETスキームはクーラン数の制限があるため、クーラン数を大きくして計算時間を短縮することはできない(拡散係数が大きければある程度は可能)。しかしながら、クーラン数0.5以下で他のスキームと計算速度を比較した場合、HORNETスキームは陽解法であり、またTVDスキームのようにフラックス制限関数を計算するルーチンもないので、比較的速く計算ができるスキームであると思われる。

### 4-3 非一様流速場における計算

HORNETスキームは流速及び拡散係数が一定という条件の下で定式化された。しかしながら自然界の水域では流速や拡散係数は場所や時間によって変わってくるのが普通である。従って、流速が一定ではない場へのHORNETスキームの適用性を検討することは重要である。

空間的に一様ではない流れ場でのモデル計算を行った。初期条件として式(18)で表わされる準ガウス型濃度分布を用いた<sup>10)</sup>。ここで $M_0=10$ ,  $\sigma=0.2$ ,  $x_0=0.2$ である。また $x=0$ において濃度 $C$ は0としている。この分布を場所的に線形に変化する流速 $u=u_0x$ で下流側に $t=20$ まで輸送させる。ここで $u_0$ は0.1とし

た。計算格子間隔は $\Delta x=0.02$ ,  $\Delta t=0.02$ である。厳密解は式(19)で与えられる<sup>10)</sup>。

$$C(x, 0) = \frac{M_0}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x/x_0)]^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (8)$$

$$C(x, t) = \frac{M_0}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x/x_0) - u_0 t]^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (9)$$

なおこの問題の場合、支配方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\Phi \frac{\partial u}{\partial x} \quad (20)$$

式(20)はHORNETスキームを用いて以下のように離散化される。

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} + u_i \left[ \theta_i \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{\Delta x} + (1-\theta_i) \frac{\Phi_i^{n-1} - \Phi_{i-1}^{n-1}}{\Delta x} \right] \\ = K_i \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \Phi_i^n \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{ここで, } \theta_i = \frac{2\alpha_i^2 - 3\alpha_i + 1}{3(\alpha_i^2 - \alpha_i)}, K_i = -\frac{1}{2} [\alpha_i - \alpha_i^2(3 - 2\theta_i)],$$

$$\alpha_i = \frac{u_i \Delta t}{\Delta x}$$

図-23, 24はそれぞれLax-Wendroffスキーム, HORNETスキームで得られた数値解である。どちらも多少位相誤差が見られるが、HORNETスキームで得られた解は数値振動がなく安定したものとなっている。以上より流速が場所的に変化する問題でも適用可能であることが分かった。

### 4-4 非定常流速場における計算

HORNETスキームでは移流項は時刻 $n$ ステップで作られる風上差分と $n-1$ ステップ時の風上差分の荷重平均で近似されており、その重み $\theta$ は流速及び拡散係数が時間的に一定として解析された打ち切り誤差から直接決定されているため、流速が空間的に変化する場合よりも時間的に変化する場合のほうが計算条件としては厳しいものとなる。したがってこの節ではHORNETスキームの非定常流問題への適用性について考察する。

この節で行うモデル計算の条件は、流速と時間方向の計算格子間隔 $\Delta t$ を除いて4-2節で用いられたモデル計算の場合と同じである。 $\Delta t=1.0\text{sec}$ を用いる。流れ場は次式で表されるように空間的には一定であ

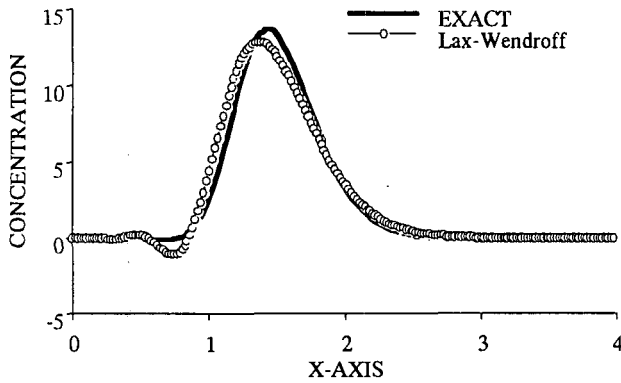


図-23 Lax-Wendroff スキームによる計算結果

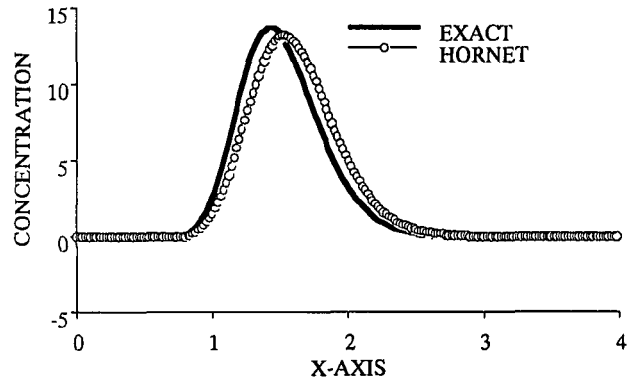


図-24 HORNET スキームによる計算結果

るが時間に関して周期的に変化する場を考える。

$$u = 0.25 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 0.25 \quad (2)$$

ここで、流速の単位は m/sec, T は周期でありここでは 100sec, 10sec の 2 通りを用いた。この条件の下ではクーラン数は 0~0.5 までの値を周期的にとることになる。

ここで用いた HORNET スキームは以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} + u^n \left[ \theta^n \frac{\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n}{\Delta x} + (1-\theta^n) \frac{\Phi_i^{n-1} - \Phi_{i-1}^{n-1}}{\Delta x} \right] \\ = K^n \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{ここで, } \theta^n = \frac{2\alpha^{n^2} - 3\alpha^n + 1}{3(\alpha^{n^2} - \alpha^n)}, K^n = -\frac{1}{2} [\alpha^n - \alpha^{n^2}(3 - 2\theta^n)],$$

$$\alpha^n = \frac{u^n \Delta t}{\Delta x}$$

図-25 は計算結果を示している。周期が 10sec の時は矩形分布の不連続点近傍でかなり大きな数値振動が見られる。また半楕円分布においても x=155m 周辺で分布に乱れが見られる。一方周期 100sec の場合は矩形分布において x=120m 辺りでアンダーシュート, x=130m 辺りでオーバーシュートをしているものの比較的精度の良い計算結果を示している。これらの結果から HORNET スキームは流速に時間的な変化があってもそれ程急激でなければかなりの程度まで精度良く計算できるものと思われる。

## 5. 結論

本論文では簡便でコンパクトな高精度 1次元移流拡散計算スキームである HORNET スキームを開発・提案した。得られた主要な結論は以下の通りである。

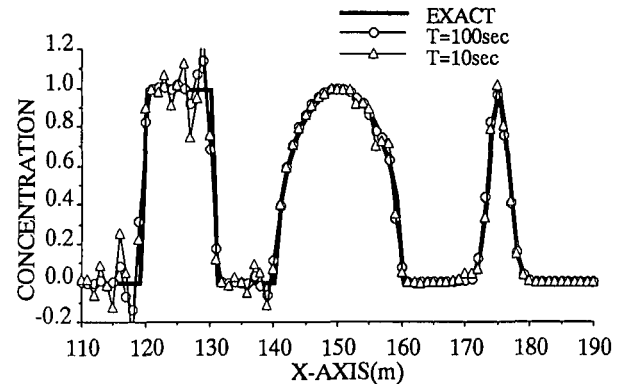


図-25 非定常流における純粋移流の計算結果

- (1) 負の人工拡散項を導入することにより 2 次の数値拡散項を消去し, 3 次の数値拡散項を恒等的に 0 とするような重み  $\theta$  を用いることによって空間・時間的に 3 次精度の計算スキームを開発した。
- (2) Taylor 級数展開による誤差解析により負の人工拡散項の係数及び重み  $\theta$  をクーラン数  $\alpha$ , 拡散数  $\beta$  の関数として求めることができた。
- (3) von Neumann の安定解析により HORNET スキームは  $L/\Delta x$  が小さい場合は増幅係数が 1 を超え不安定領域が存在することが分かった。しかしながら, 多くの数値実験よりクーラン数がある程度小さくまた拡散がある場合には安定で高精度な解が得られることが分かった。
- (4) クーラン数は 0.5 以下で用いることが望ましい。
- (5) 空間的に 3 点しか使用せずまた陽解法であるためプログラミングが簡単で容易に高精度な解を得ることができる。
- (6) HORNET スキームは非 TVD スキームであるため数値振動を引き起こすが, 比較的振動の少ない安定な解を与えることができる。
- (7) 空間的に流速が変化する場合にも HORNET スキームは適用可能であることが分かった。



- (8) 時間的に流速が変化する場合でもその変化が急激でなければ適用可能であることが分かった。流速・拡散係数が時空間的に変化する場合については検討していないが、この場合もその変化が急激でなければ適用可能であると思われる。多次元問題への拡張は今後の課題としたい。

**謝辞：**本研究の遂行にあたり、当時九州大学大学院生の塩見潔尚氏（現鹿島建設（株））の協力を得た。記して謝意を表します。

### 参考文献

- 1) Holly, F.M. Jr. and Preissmann, A. : Accurate calculation of transport in two dimensions, *J. Hydraul. Div., Proc. of ASCE*, Vol.103, No. HY11, pp.1259-1277, 1977.
- 2) Takewaki, H., Nishiguchi, A. and Yabe, T. : Cubic interpolated pseudo-particle method(CIP), *J. Comput. Phys.*, 61, pp.261-268, 1985.
- 3) Yabe, T. and Aoki, T. : A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, 66, pp.219-232, 1991.
- 4) Komatsu, T., Holly, Jr. F.M., Nakashiki, N. and Ohgushi, K.: Numerical calculation of pollutant transport in one and two dimensions, *J. Hydrosoci. and Hydraul. Eng.*, JSCE, Vol.3, No.2, pp.15-30, 1985.
- 5) 小松利光・大串浩一郎・朝位孝二：拡散シミュレーションにおける移流輸送の高精度計算法の開発，土木学会論文集，No.456/II-21，pp.37-46，1992.
- 6) 朝位孝二・小松利光・大串浩一郎：移流拡散方程式の高精度数値計算手法に関する研究，土木学会論文集，No.586/II-42，pp.13-22，1998.
- 7) Jaque, D.T. and Ball, J.E. : Numerical simulation of advective-diffusion mass transport, *J. Hydrosoci. and Hydraul. Eng.*, JSCE, Vol.11, No.2, pp.49-56, 1994.
- 8) Verwey, A. and Ilic S. : A space-compact high-order implicit scheme for 1-d advection simulations, *Proc.XXV Cong. IAHR*, Vol.V, pp.355-362, 1993.
- 9) Yee, H.C. : Construction of explicit and implicit symmetric TVD scheme and their application, *J. Comp. Phys.*, 68, pp.151-179, 1987.
- 10) Zoppou, C. and Knight, J. H. : Analytical solutions for advection and advection-diffusion equations with spatially variable coefficients, *J. Hydraul. Eng.*, Vol.123, No.2, pp.144-148, 1997.

(1998年4月24日受付)