

陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析

Shallow Water and Sediment Transport Analysis by Implicit FEM

松本純一*・梅津剛**・川原睦人***

Junichi MATSUMOTO, Tsuyoshi UMETSU and Mutsuto KAWAHARA

*学生員 中央大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻 (〒112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)

**正会員 工博 前橋工科大学助教授 工学部建設工学科 (〒371-0816 群馬県前橋市上佐鳥町 460-1)

***正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日一丁目 13-27)

This paper presents a computational simulation method for river sedimentation problem which is considered moving boundary flow. We propose implicit FEM using mixed interpolation functions by the third order bubble function and linear interpolation function for shallow water equations and equation of continuity for sand. To control numerical accuracy, CG and Improved-BTD scheme are used for implicit scheme. Moving boundary technique is combined in this method to treat wet and dry area.

Key Words : bubble function, shallow water flow, river sedimentation, moving boundary problem

1. 緒言

河川流れの実際問題では、水流の挙動のみならず、流域変化や河床の洗掘・堆砂といった現象を含んでいる。本研究の目的は、この現象に対する数値シミュレーション手法の開発であり、著者らはこれまで浅水長波方程式と陽的有限要素法をベースとした計算手法について検討してきた。その中で、メッシュ内部に標高をもうけることによって地形データを作成し、水深の有無によって時事刻々と変化する流域を表現する移動境界手法¹⁾が考案された。

この手法は、従来、有限要素の座標を移動させたり、分割を増減させたりする手法と比較して、極めて容易で実問題への適用を指向した手法であり、陽解法のアルゴリズムが適用されるものであった。また、この手法の利点は、当時、現在とは比較にならないほど貧弱で高価な計算機の計算時間と記憶容量が、いわゆる陰解法に比較してはるかに短く、少なく済む手法であった。

しかし、陽解法は人工粘性の制御が難しく、特に水流の流れと比較して現象の緩やかな河床変動解析²⁾では、安定側で計算を進めると著しい解の減衰が生じてしまう問題がある。また、移動境界手法では水際要素内における人工粘性の影響は、計算全体の時間増分を決定してしまう。これらのことから、陽解法において人工粘性をいかに制御してゆか、ということがこのような問題を実行する際の重要な要素であった。

さらに、実際問題、現地計算を目的とすれば、メッシュはイレギュラーとなることは避けられない。そのための精度の向上を目的とし、従来の一次の同次補間から、気泡関数要素³⁾と一次要素を用いる MINI 要素

を用いた混合補間を陽解法に適用することを提案した^{4),5)}。この手法で着目したのは気泡関数による質量行列が集中化可能であることで、それにより陽解法への適用が可能なことであった。

さらにその後、この移動境界を含む河川の流れ解析手法は、精度の向上と計算の安定化を目的として、MINI 要素を用いる混合補間の適用、及び上流化手法として BTD 法^{6),7)}の適用、そして整合質量行列を用い、その連立一次方程式の解法として Element By Element CG 法^{8),9),10)}を使用する手法に改良された^{11),12),13)}。

本論では、こうした河川流れの実際問題への適用をおこなう数値計算手法の基礎的な開発として、浅水長波方程式を基礎方程式とし、有限要素法を用いた浅水長波流れ解析において、よく用いられてきた従来の手法に比べて本論において用いる手法が高精度に計算が行えることを段波流れ解析を用いて検証し、流量の増減による水域変化を考慮する移動境界手法、流れによって生じる河床変動現象、という現実問題を扱う計算手法の基礎的な考察をするものである。また、浅水長波方程式は特に現地解析に対して適用される場合が多く、その精度については計りにくい場合が多い。現地解析においては、必然的に不規則な有限要素分割が用いられるが、同次補間を用いる場合に、その場合に生じる計算の不安定性を本論では 2 次元のダム破壊時の流出解析を用いて示すものである。そして、河床変動に関しては、人工粘性の影響を直接に受けやすいため、より精度の向上を考え、陰解法を流れと河床変動に取り入れるものである。その際に、これまでの研究成果より得られたものとして、計算機容量の節減のための手法として IBTD 法¹⁴⁾を CG 法による解法に適

用する考えである。

本論においては、実際現象を目的とした基本問題によって、その計算精度の検証を行なっている。

2. 基礎方程式

浅水長波方程式は、平均流速 u_i と水位で流れを表す。ここで、図-1のような座標系により河床 η を定義すれば、水位変化は、水深 ξ として表される。河床変動を考慮した水流の挙動を表す基礎方程式は、2次元の浅水長波方程式と流砂の連続式を連成させることによって以下のように表される²⁾。

水流の運動方程式

$$\ddot{u}_i + u_j u_{i,j} + g(\xi + \eta)_{,i} - A_l(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + f u_i = 0 \quad (1)$$

水流の連続式

$$\dot{\xi} + \xi_{,i} u_i + \xi u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

流砂の連続式

$$\dot{\eta} + (\Lambda u_i)_{,i} = 0 \quad (3)$$

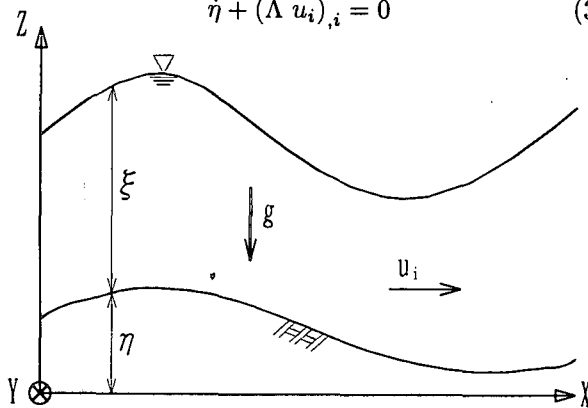


図-1 座 標 系

式(1)、式(3)の f 、 Λ は次のようなものである。

$$f = \frac{gn^2 \sqrt{u_k u_k}}{\xi^{4/3}}, \quad \Lambda = \frac{q_s}{(1-\lambda) \sqrt{u_k u_k}}$$

ここに、式中の u_i は平均流速 (m/sec.)、 ξ は水深 (m)、 η は河床 (m)、 q_s は掃流砂量 (m²/sec.)、 g は重力加速度 (m/sec.²)、 A_l は渦動粘性係数 (m²/sec.)、 n はマンニングの粗度係数 (sec./m^{1/3})、 λ は砂の間隙率を示す。

本論の河床変動の考え方としては、掃流砂理論によるものとし、河床構成材料は非粘着性の比較的粗い掃流砂であると仮定し、流れによって生じる掃流力 τ_0 と限界掃流力 τ_c との関係によって流砂量が決定されるものである。限界掃流力 τ_c は、砂の平均粒径を d_m (m) とすれば、以下の式で書き表される。

$$\tau_c = \alpha g(\rho_s - \rho_w) d_m$$

ここに、 α はシールズパラメータ、 ρ_w は水の密度、 ρ_s は砂の密度である。

掃流砂量式は実験によって様々考案されているが、浅水長波方程式と連成する際には河床に作用するせん

断応力によって支配される。本論ではメイヤー・ピューター・ミュラーの式^{15),16)}によって求めるものとする。

$$\begin{aligned} \tau_0 > \tau_c \text{ のとき} \quad q_s &= 8 \sqrt{\frac{1}{\rho_w g(\rho_s - \rho_w)}} (\tau_0 - \tau_c)^{3/2} \\ \tau_0 \leq \tau_c \text{ のとき} \quad q_s &= 0 \end{aligned}$$

3. 離散化手法

3.1 空間方向の離散化

基礎方程式に対して、ガラーキン法に従い空間方向に離散化を行う。用いる要素の選択として、運動方程式の未知量である平均流速は高次のもので補間し、水流の連続式、及び流砂の連続式については、流速よりも低次の補間をおこなう。流速に関しては要素の辺上で直線近似 (C^0 連続) となる気泡関数要素³⁾を、水深、河床に関しては1次要素を用いるものとし、面積座標を L_1, L_2, L_3 とすると各未知量の補間関数は以下のようになる。

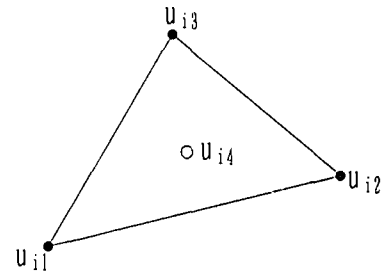


図-2 気泡関数要素

$$u_i = \Phi_1 u_{i1} + \Phi_2 u_{i2} + \Phi_3 u_{i3} + \Phi_4 \tilde{u}_{i4} \quad (4)$$

$$\tilde{u}_{i4} = 3u_{i4} - (u_{i1} + u_{i2} + u_{i3})$$

$$\Phi_1 = L_1, \quad \Phi_2 = L_2, \quad \Phi_3 = L_3, \quad \Phi_4 = 9L_1 L_2 L_3$$

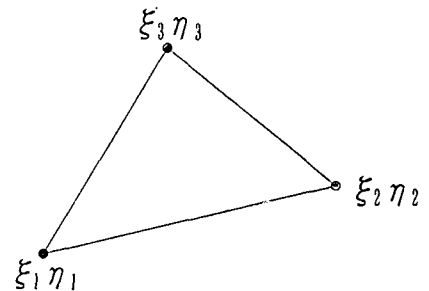


図-3 1次要素

$$\xi = \Psi_1 \xi_1 + \Psi_2 \xi_2 + \Psi_3 \xi_3 \quad (5)$$

$$\eta = \Psi_1 \eta_1 + \Psi_2 \eta_2 + \Psi_3 \eta_3 \quad (6)$$

$$\Psi_1 = L_1, \quad \Psi_2 = L_2, \quad \Psi_3 = L_3$$

3.2 時間方向の離散化

式(1)~(3)に示した方程式は時間に関する微分を含んでいる。そこで、初期条件を出発点として、数値的に積分してゆく方法を検討しなければならない。解析する全時間を $0, 1, \dots, n$ の時間点によって非常に短い時間区間 Δt ごとに分割し、この分割された時間点ごとに計算を進めることにする。第 n 時間点に関する量を表すために、上つき添字(n)を用いる。すなわち f^n は関数 f の第 n 時間点の値を示すものとする。ここで、関数 f に対してテイラー展開を用いて、 f^{n+1} を第 n 点の値によって表し、2次項まで採用すれば

$$f^{n+1} = f^n + \Delta t \dot{f} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{f} \quad (7)$$

である。

式(7)を式(1)~(3)に適用すれば、

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\dot{u}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i^n \right) \quad (8)$$

$$\xi^{n+1} = \xi^n + \Delta t \left(\dot{\xi}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\xi}^n \right) \quad (9)$$

$$\eta^{n+1} = \eta^n + \Delta t \left(\dot{\eta}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\eta}^n \right) \quad (10)$$

となる。

ここで、

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^n = & -\{\bar{u}_j^n u_{i,j}^n + g(\xi^n + \eta^n)_{,i} \\ & - A_l(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} + \bar{f}^n u_i^n\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\xi}^n = -(\bar{u}_i^n \xi_{,i}^n + \bar{\xi}^n u_{i,i}^n) \quad (12)$$

$$\dot{\eta}^n = -(\bar{\Lambda}^n u_{i,i}^n)_{,i} \quad (13)$$

である。

また、式(8)~(10)において、右辺第3項の時間に関する2回微分については次のように求めている。

まず、式(8)において、右辺第3項の時間に関する2回微分を以下のように表すことを考える。

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i \simeq & -\{\bar{u}_j \ddot{u}_{i,j} + g(\dot{\xi} + \dot{\eta})_{,i} \\ & - A_l(\ddot{u}_{i,j} + \ddot{u}_{j,i})_{,j} + \bar{f} \ddot{u}_i\} \end{aligned}$$

上式において、実際に計算を行う上で、計算が不安定になるのは、右辺第1、2項であるので、右辺第3、4項を省略した次式によって、流速に関する時間の2回微分の項を表現するものとする。

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i^n \simeq & \bar{u}_j^n \bar{u}_{k,kj}^n + \bar{u}_j^n g(\xi^n + \eta^n)_{,ij} + g \bar{u}_k^n \xi_{,ki}^n \\ & + g \bar{\xi}^n u_{k,ki}^n + g \bar{\Lambda}^n u_{k,ki}^n \end{aligned} \quad (14)$$

また、上述したことと同様の考え方を用いることにより、式(9)、(10)の右辺第3項の時間に関する2回微分は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^n \simeq & \bar{u}_i^n \bar{u}_k^n \xi_{,ki}^n + \bar{u}_i^n \bar{\xi}^n u_{k,ki}^n + \bar{\xi}^n \bar{u}_k^n u_{i,ki}^n \\ & + \bar{\xi}^n g(\xi^n + \eta^n)_{,ii} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\ddot{\eta}^n \simeq \bar{\Lambda}^n \bar{u}_k^n u_{i,ki}^n + \bar{\Lambda}^n g(\xi^n + \eta^n)_{,ii} \quad (16)$$

ここで、式中の上付きの $\bar{\cdot}$ は要素内平均値を示しており、 $\bar{u}_i$ は次式によって計算を行うものとする。

$$\bar{u}_i = \frac{u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} + u_{i4}}{4} = \frac{1}{12} \{4(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3}) + \bar{u}_{i4}\}$$

以上のように時間に関する2回微分を時間に関する微分として表すことにより2次精度を実現したものが、BTD法^{6),7)}と呼ばれているものである。

4. 段波流れ解析による検討

移動境界を導入する前に本手法の精度を検討するため、水路長10m、水路幅0.2m、水深10m、水位差0.2mをモデルとした段波流れ解析について、渦動粘性係数 $A_l = 0$ 、マンニングの粗度係数 $n = 0$ としたときの検討を行う。また、時間増分量 Δt は0.002sec.を用い、メッシュ幅は0.1mとし均等な分割を行っている。図-4に集中質量行列を用いたときの(a)3段階法^{4),5)}、(b)BTD法¹¹⁾、整合質量行列を用いたときの(c)3段階法^{4),5)}、(d)BTD法¹¹⁾の2.0秒後の結果を示す。ここで、図-4の縦軸は水深を表しており、この計算結果は、横断方向の水深の平均値を示したものである。

これに示されるように、集中質量行列を用いた3段階法、BTD法、整合質量行列を用いたときの3段階法においては大きな水面振動が生じているのに対し、整合質量行列を用いたときのBTD法においては大きな水面振動が生じておらず安定に、かつ精度よく計算されていることが解る。

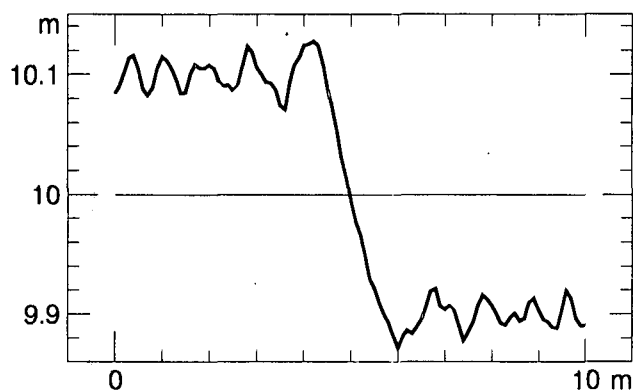
5. 移動境界手法の適用

5.1 移動境界手法

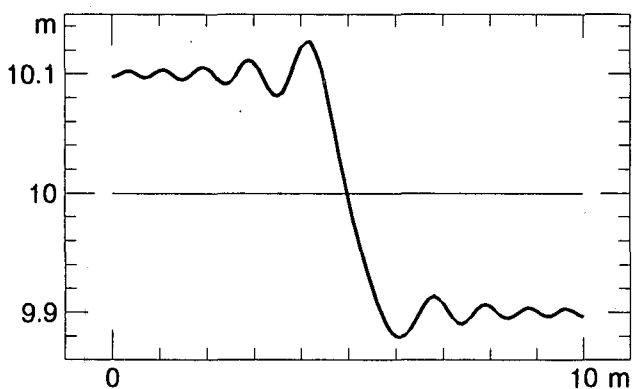
本論では、あらかじめ広域にわたりメッシュ分割を行い、その中で水深の有無を判定しながら水流域を決めてゆく手法を用いている。この場合2つの問題がある。一つはメッシュごとの水域の移動のために水域移動がメッシュ幅に依存してしまうこと。もう一つは、水際線上の流速に対する境界条件の与え方である。前者に対しては、メッシュ分割をできるだけ細密に行うことが基本的に求められる。後者に対しては、水際線上で無抵抗となる条件を与える必要がある。

本手法の移動境界手法は以下の手続きを行うことによってなされる。全ての三角形要素について、

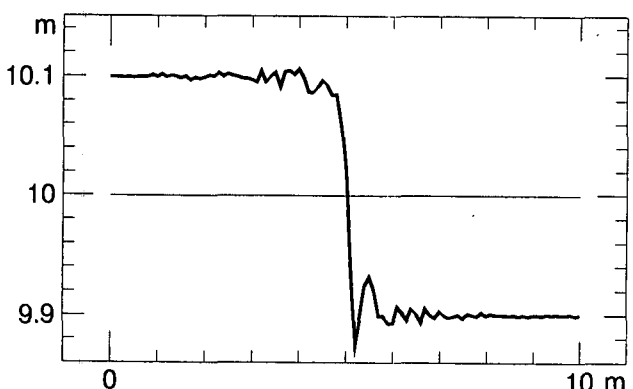
1) $\xi_1 < \varepsilon_\xi$ かつ、 $\xi_2 < \varepsilon_\xi$ かつ、 $\xi_3 < \varepsilon_\xi$ である場合、その要素は重ね合わせから除外する。それ以外の要素は計算に含める。 ε_ξ は微小な水深で、極小さい水深の発生による計算の不安定性を回避するものである。



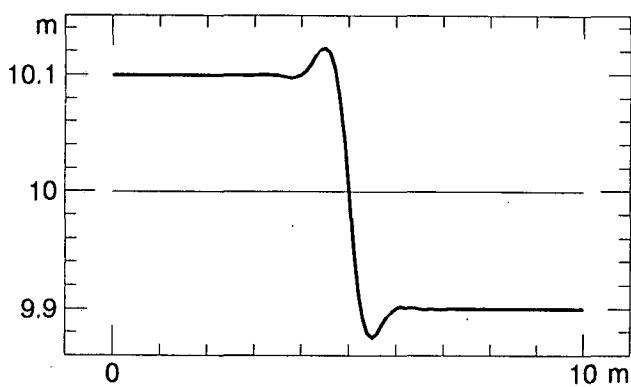
(a) 3段階法（集中質量行列）



(b) BTD法（集中質量行列）



(c) 3段階法（整合質量行列）



(d) BTD法（整合質量行列）

図-4 段波流れ

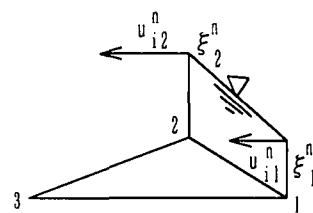
2) 水際の要素については、無抵抗となる境界条件を与える。例えば図-5(a)に示される状態の要素が、計算に含まれる水際の要素であるが、 n 時間ステップにおいて、節点 1 と 2 は水深を持つが節点 3 は水深が ε_ξ 以下であり、節点 3 に与える境界条件が問題となる。それは、実際には抵抗の無い状態であるが、この移動境界の計算アルゴリズムでは、この節点の流速が 0 としてマトリックスを作成する際の重ね合わせに含まれてしまうからである。単純に流速 0 として計算を行えば、それを取り込むことによって次のステップでの解の流速は図-5(b)のように減少する。このときの境界条件は、

$$u_{i(dry)}^n = 0 \quad (17)$$

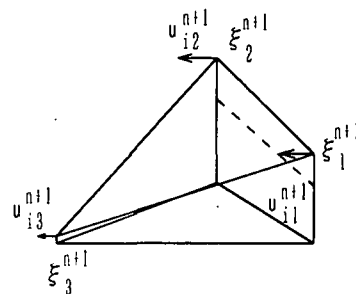
となる。これを回避するため、図-5(c)のように流速を与える。すなわち、

$$u_{i(dry)}^n = \tilde{u}_i, \quad \tilde{u}_i = \sum_{l=1}^k \frac{u_l}{k} \quad (\text{ただし } u_l > 0) \quad (18)$$

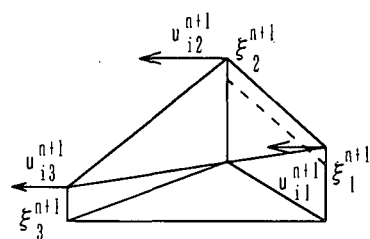
とし、水際要素において流速が減衰しないように取り扱うものである。以上の手続きは全時間ステップにおいて行われる。



(a) 水際の要素



(b) 境界条件に $u_{i3}^n = 0$ を用いた場合



(c) 境界条件に $u_{i3}^n = \tilde{u}_i$ を用いた場合

図-5 水際要素と移動境界手法の説明

5.2 1次元のダム破壊時の水流挙動問題による検証

計算精度の検証のため、最も基礎的な水流の移動境界問題として、図-6に示される1次元の初期値問題を考える。これは、時刻 $t=0$ において静止していたダム内の水が突然に流出する現象である。この問題において、水の粘性と河床の摩擦を考えないものとするれば、厳密解は次式で表される。

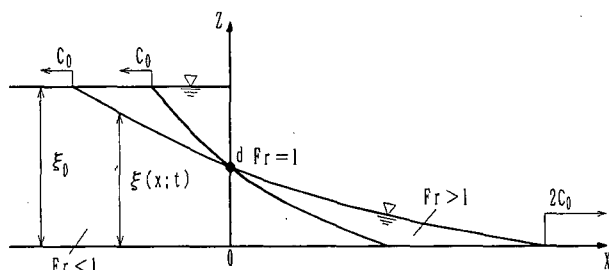


図-6 1次元のダム破壊時水流問題

$$u(x; t) = \frac{2}{3} \left(C_0 + \frac{x}{t} \right)$$

$$\xi(x; t) = \frac{1}{9g} \left(2C_0 - \frac{x}{t} \right)^2$$

ここで、 C_0 は初期水深の波速 $C_0 = \sqrt{g\xi_0}$ である。d点では流れが常に限界流となる。また、d点より上流では常に常流（フルード数 $Fr < 1$ ）となり、d点より下流では常に射流（フルード数 $Fr > 1$ ）となる、という流れ現象である。

図-7は、この問題に適用するメッシュと境界条件である。

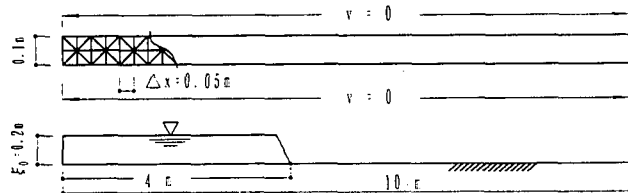
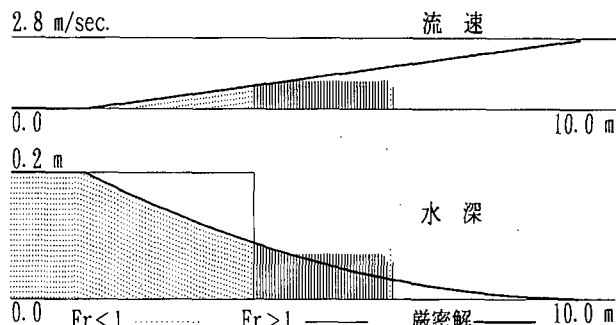


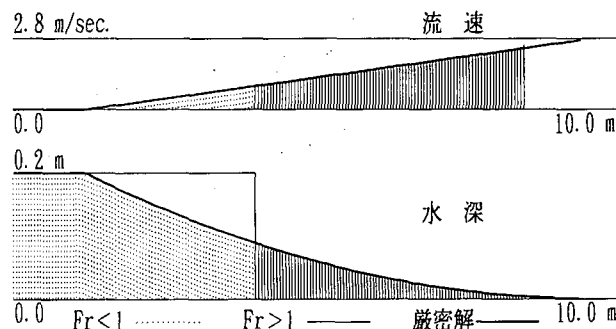
図-7 1次元ダム破壊水流問題の数値モデル

図-8(a)は、水際要素の境界条件において流速を0とした場合の計算結果である。流速0を含みながら進行するため、水際要素の先端で水面が盛り上がり、厳密解との差異が顕著である。図-8(b)は、式(18)の境界条件を与えた場合の結果である。これによって厳密解との良好な一致を得られたと判断される。考察として、まず時間増分量 Δt はかなり小さくなる。このケースでは初期水深で算定した時間増分量 Δt は0.0025sec.である。先端での流速が常に2倍の C_0 であること、

また、先端での水深が極めて浅いことがその原因であると考えられる。ここで、メッシュごとの移動となるため判定のための微小水深 ε_ξ の選択は経験的に選択するが、できるだけ小さな値にする必要がある。ここでは ε_ξ を0.0001mとして計算を行ったものである。



(a) 境界条件に $u_{i3}^n = 0$ を用いた場合



(b) 境界条件に $u_{i3}^n = \bar{u}_i$ を用いた場合

図-8 2.0秒後の計算結果

6. ダム破壊時の流出解析

移動境界の手法を取り入れ、2次元的な流れについての混合補間を用いることの効果を見るために、ダム破壊時の流出解析を行う。特に現地解析について、必然的に用いられる不規則メッシュに対する効果を見るために、用いるメッシュは図-9のような流れ方向にたいして対象に、故意に細粗分割を行っている。図-9において細水路部の水路幅は0.5mでありその長さは4mである。拡幅部の水路幅は4mでありその長さは4mである。初期条件は図-10であり、5章の初期条件と同様に細水路部に0.2mの水深が置かれている。ここで、拡幅部分には水は存在しないものとする。また、水際先端での水深有無の判定基準は0.0001mとしている。

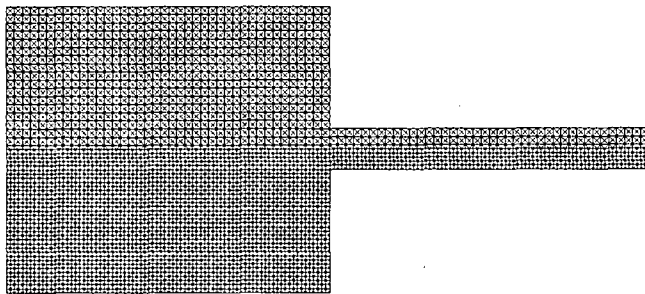


図-9 メッシュ図

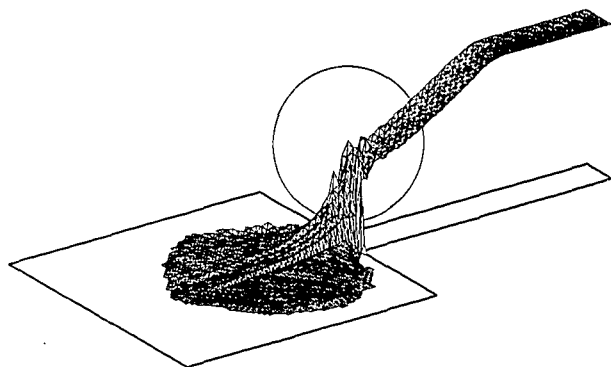


図-11 同次補間

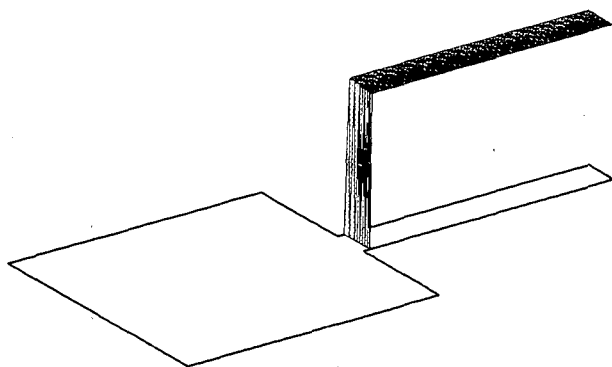


図-10 初期条件

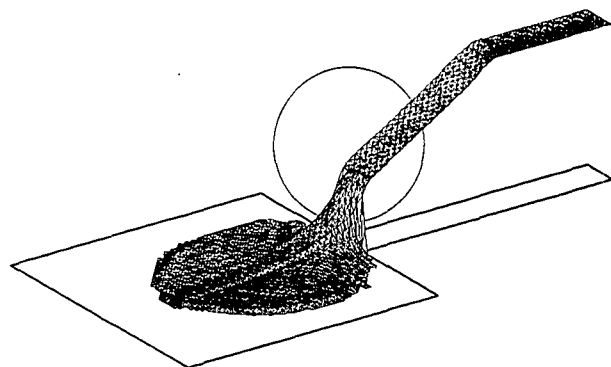


図-12 混合補間

図-11 に1次要素による同次補間での解析結果、図-12 に気泡関数要素と1次要素による混合補間での結果を示す。ともに1.5秒後の計算結果である。この流れは、拡幅部分において流況が急激に変化し、常流から射流に変遷するが、その部分において、同次補間では顕著な振動が見られる。これに対して、混合補間を用いた手法では、解の振動は生じていないことが解る。これは、メッシュ形状が変化しても混合補間を用いた場合には、計算された解がメッシュの形状の影響を受けることが同次補間に比べて少ないということを示していると考えられる。

7. 陰解法への適用について

現地計算においては、計算の安定性が著しく悪くなることから、さらに、計算を安定化させるために、BTD法を陰解法に拡張することを考える。式(11)~(16)を x, y を用いて表すと、次式ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{u}^n &= -\{\bar{u}^n u_{,x}^n + \bar{v}^n u_{,y}^n + g(\xi^n + \eta^n)_{,x} \\ &\quad - A_l(2u_{,xx}^n + u_{,yy}^n + v_{,xy}^n) + \bar{f}^n u^n\} \\ \dot{v}^n &= -\{\bar{u}^n v_{,x}^n + \bar{v}^n v_{,y}^n + g(\xi^n + \eta^n)_{,y} \\ &\quad - A_l(2v_{,yy}^n + v_{,xx}^n + u_{,yx}^n) + \bar{f}^n v^n\} \\ \dot{\xi}^n &= -(\bar{u}^n \xi_{,x}^n + \bar{v}^n \xi_{,y}^n + \bar{\xi}^n u_{,x}^n + \bar{\xi}^n v_{,y}^n) \\ \dot{\eta}^n &= -(\bar{\Lambda}^n u_{,x}^n + \bar{\Lambda}^n v_{,y}^n) \\ \ddot{u}^n &= \bar{u}^n \bar{u}^n u_{,xx}^n + \bar{u}^n \bar{v}^n u_{,yx}^n + \bar{v}^n \bar{u}^n u_{,xy}^n + \bar{v}^n \bar{v}^n u_{,yy}^n \\ &\quad + \bar{u}^n g(\xi^n + \eta^n)_{,xx} + \bar{v}^n g(\xi^n + \eta^n)_{,xy} \\ &\quad + g\bar{u}^n \xi_{,xx}^n + g\bar{v}^n \xi_{,yx}^n + g\bar{\xi}^n u_{,xx}^n + g\bar{\xi}^n v_{,yx}^n \\ &\quad + g\bar{\Lambda}^n u_{,xx}^n + g\bar{\Lambda}^n v_{,yx}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{v}^n &= \bar{u}^n \bar{u}^n v_{,xx}^n + \bar{u}^n \bar{v}^n v_{,yx}^n + \bar{v}^n \bar{u}^n v_{,xy}^n + \bar{v}^n \bar{v}^n v_{,yy}^n \\ &+ \bar{u}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,yx} + \bar{v}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,yy} \\ &+ g \bar{u}^n \xi_{,xy}^n + g \bar{v}^n \xi_{,yy}^n + g \bar{\xi}^n u_{,xy}^n + g \bar{\xi}^n v_{,yy}^n \\ &+ g \bar{\Lambda}^n u_{,xy}^n + g \bar{\Lambda}^n v_{,yy}^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}^n &= \bar{u}^n \bar{u}^n \xi_{,xx}^n + \bar{u}^n \bar{v}^n \xi_{,yx}^n + \bar{v}^n \bar{u}^n \xi_{,xy}^n + \bar{v}^n \bar{v}^n \xi_{,yy}^n \\ &+ \bar{u}^n \bar{\xi}^n u_{,xx}^n + \bar{u}^n \bar{\xi}^n v_{,yx}^n + \bar{v}^n \bar{\xi}^n u_{,xy}^n + \bar{v}^n \bar{\xi}^n v_{,yy}^n \\ &+ \bar{\xi}^n \bar{u}^n u_{,xx}^n + \bar{\xi}^n \bar{v}^n u_{,yx}^n + \bar{\xi}^n \bar{u}^n v_{,xy}^n + \bar{\xi}^n \bar{v}^n v_{,yy}^n \\ &+ \bar{\xi}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,xx} + \bar{\xi}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,yy}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}^n &= \bar{\Lambda}^n \bar{u}^n u_{,xx}^n + \bar{\Lambda}^n \bar{v}^n u_{,yx}^n + \bar{\Lambda}^n \bar{u}^n v_{,xy}^n + \bar{\Lambda}^n \bar{v}^n v_{,yy}^n \\ &+ \bar{\Lambda}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,xx} + \bar{\Lambda}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,yy}\end{aligned}$$

ここで、CG 法を用いていることから、対称行列となる項を

$$u^{n+1/2} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \quad v^{n+1/2} = \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \quad (19)$$

$$\xi^{n+1/2} = \frac{\xi^{n+1} + \xi^n}{2}, \quad \eta^{n+1/2} = \frac{\eta^{n+1} + \eta^n}{2} \quad (20)$$

のように陰的に表す。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\dot{u}_i^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i^{n+1/2} \right) \quad (21)$$

$$\xi^{n+1} = \xi^n + \Delta t \left(\dot{\xi}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\xi}^{n+1/2} \right) \quad (22)$$

$$\eta^{n+1} = \eta^n + \Delta t \left(\dot{\eta}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\eta}^{n+1/2} \right) \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\ddot{u}^{n+1/2} &= -\{\bar{u}^n u_{,x}^n + \bar{v}^n u_{,y}^n + g (\xi^n + \eta^n)_{,x} \\ &- A_l (2u_{,xx}^{n+1/2} + u_{,yy}^{n+1/2} + v_{,xy}^n) + \bar{f}^n u^{n+1/2}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{v}^{n+1/2} &= -\{\bar{u}^n v_{,x}^n + \bar{v}^n v_{,y}^n + g (\xi^n + \eta^n)_{,y} \\ &- A_l (2v_{,yy}^{n+1/2} + v_{,xx}^{n+1/2} + u_{,xy}^n) + \bar{f}^n v^{n+1/2}\}\end{aligned}$$

$$\ddot{\xi}^{n+1/2} = -(\bar{u}^n \xi_{,x}^n + \bar{v}^n \xi_{,y}^n + \bar{\xi}^n u_{,x}^n + \bar{\xi}^n v_{,y}^n)$$

$$\ddot{\eta}^{n+1/2} = -(\bar{\Lambda}^n u_{,x}^n + \bar{\Lambda}^n v_{,y}^n)$$

$$\begin{aligned}\ddot{u}^{n+1/2} &= \bar{u}^n \bar{u}^n u_{,xx}^{n+1/2} + \bar{u}^n \bar{v}^n u_{,yx}^{n+1/2} + \bar{v}^n \bar{u}^n u_{,xy}^{n+1/2} \\ &+ \bar{v}^n \bar{v}^n u_{,yy}^{n+1/2} + \bar{u}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,xx} + \bar{v}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,xy} \\ &+ g \bar{u}^n \xi_{,xx}^n + g \bar{v}^n \xi_{,yx}^n + g \bar{\xi}^n u_{,xx}^{n+1/2} + g \bar{\xi}^n v_{,yx}^n \\ &+ g \bar{\Lambda}^n u_{,xx}^{n+1/2} + g \bar{\Lambda}^n v_{,yx}^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{v}^{n+1/2} &= \bar{u}^n \bar{u}^n v_{,xx}^{n+1/2} + \bar{u}^n \bar{v}^n v_{,yx}^{n+1/2} + \bar{v}^n \bar{u}^n v_{,xy}^{n+1/2} \\ &+ \bar{v}^n \bar{v}^n v_{,yy}^{n+1/2} + \bar{u}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,yx} + \bar{v}^n g (\xi^n + \eta^n)_{,yy} \\ &+ g \bar{u}^n \xi_{,xy}^n + g \bar{v}^n \xi_{,yy}^n + g \bar{\xi}^n u_{,xy}^n + g \bar{\xi}^n v_{,yy}^{n+1/2} \\ &+ g \bar{\Lambda}^n u_{,xy}^n + g \bar{\Lambda}^n v_{,yy}^{n+1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}^{n+1/2} &= \bar{u}^n \bar{u}^n \xi_{,xx}^{n+1/2} + \bar{u}^n \bar{v}^n \xi_{,yx}^{n+1/2} + \bar{v}^n \bar{u}^n \xi_{,xy}^{n+1/2} \\ &+ \bar{v}^n \bar{v}^n \xi_{,yy}^{n+1/2} + \bar{u}^n \bar{\xi}^n u_{,xx}^n + \bar{u}^n \bar{\xi}^n v_{,yx}^n + \bar{v}^n \bar{\xi}^n u_{,xy}^n + \bar{v}^n \bar{\xi}^n v_{,yy}^n \\ &+ \bar{\xi}^n \bar{u}^n u_{,xx}^n + \bar{\xi}^n \bar{v}^n u_{,yx}^n + \bar{\xi}^n \bar{u}^n v_{,xy}^n + \bar{\xi}^n \bar{v}^n v_{,yy}^n \\ &+ \bar{\xi}^n g (\xi^{n+1/2} + \eta^n)_{,xx} + \bar{\xi}^n g (\xi^{n+1/2} + \eta^n)_{,yy}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}^{n+1/2} &= \bar{\Lambda}^n \bar{u}^n u_{,xx}^n + \bar{\Lambda}^n \bar{v}^n u_{,yx}^n + \bar{\Lambda}^n \bar{u}^n v_{,xy}^n + \bar{\Lambda}^n \bar{v}^n v_{,yy}^n \\ &+ \bar{\Lambda}^n g (\xi^n + \eta^{n+1/2})_{,xx} + \bar{\Lambda}^n g (\xi^n + \eta^{n+1/2})_{,yy}\end{aligned}$$

このように、BTD 法を陰的にしたものを IBTD 法といい、この解法は BTD 法に比べて非常に大きな時間増分量を用いることができ、高精度に安定に計算することが可能であることが示されている¹⁴⁾。

8. 河床変動を考慮した浅水長波流れの解析

本手法の実問題への基礎的な適用性を考察するため、河床変動を考慮した浅水長波流れの解析例を示す。解析領域は図-13 のようであり、120m × 60m の領域に 10m × 5m の流入導流部が付け加えられている。また、図-13 における解析領域において勾配は 1/100 とし、上流側の水路幅は 10m、下流側におけるダム の堤防高は 3m である。メッシュ幅は 1m で均等に分割されており、総節点数、総要素数はそれぞれ 7436、14500 である。初期条件としては、流入導流部において水深 0.5m が与えられており、その導流部において流入境界条件として単位幅当たりの流量 1.05m²/sec. が与えられている。また、その他の計算条件を表-1 に示す。

表-1 計算条件

渦動粘性係数 A_l	1.0m ² /sec.
マニングの粗度係数 n	0.03sec./m ^{1/3}
砂の平均粒径 d_m	0.001m
時間増分量 Δt	0.04sec.
微小水深 ε_ξ	0.01m

30、80、200 秒後の計算結果を図-14、15、16 に示す。まず、図-14 の計算結果を見ると、ダム部へ通じている水路部において水が流れてきたことにより河床が動き、その結果この水路が蛇行していることが確認できる。次に、図-15 の計算結果を見ると、水路部からダムにつながっている解析領域中央付近において水の流れが速くなっていることからこの部分における河床が洗掘されていることが確認できる。さらに図-16 の計算結果を見ると、解析領域中央付近において水の流れが遅くなったことにより後方から運ばれてきた砂が、この部分において堆積していることが確認できる。このようなことから、本論での手法が実問題に対する基礎的な適用段階において、可能であることが考察される。

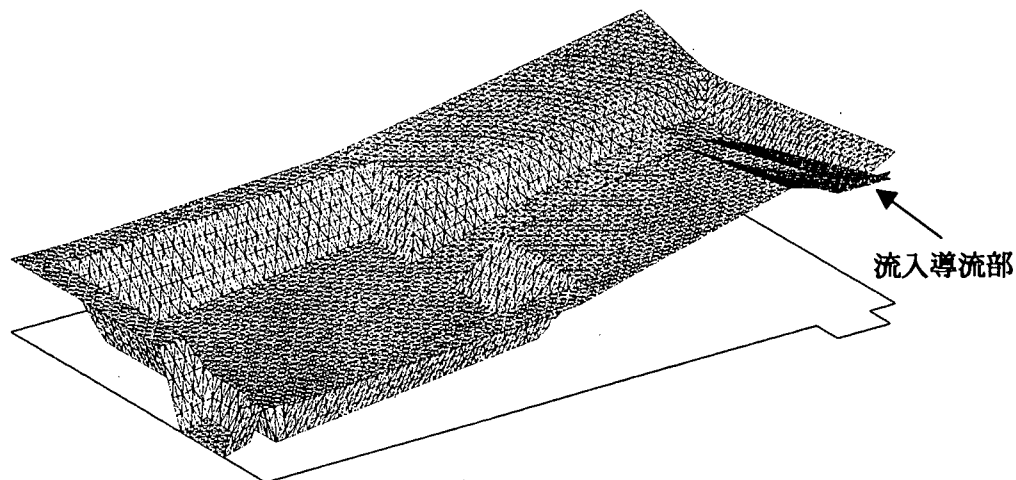
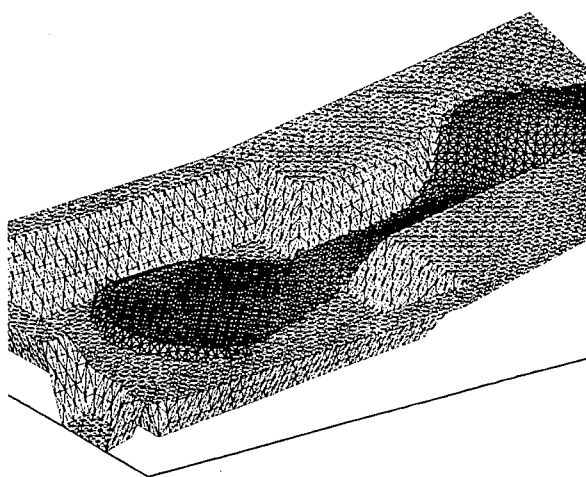
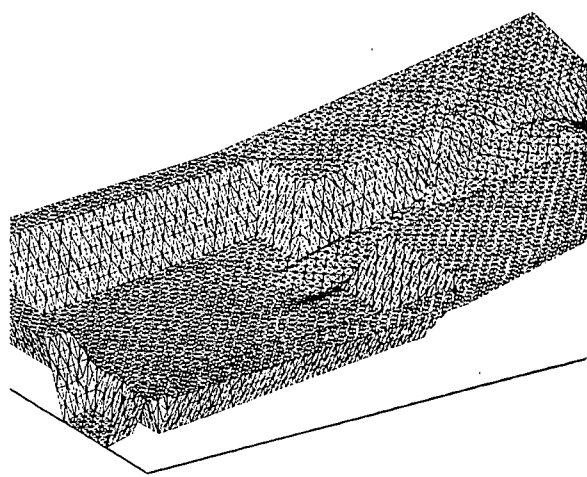


図-13 解析領域

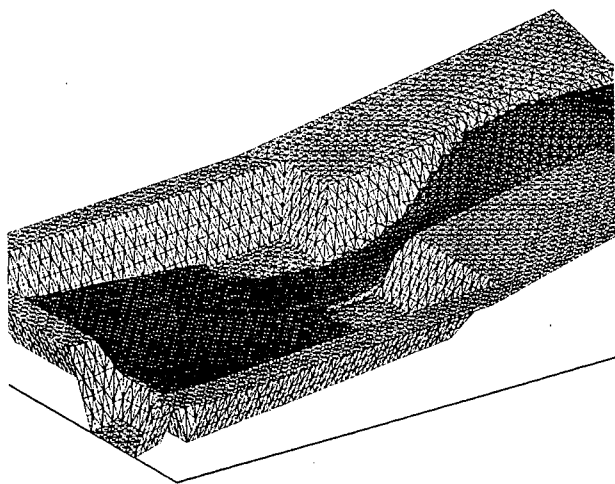


水面の計算結果

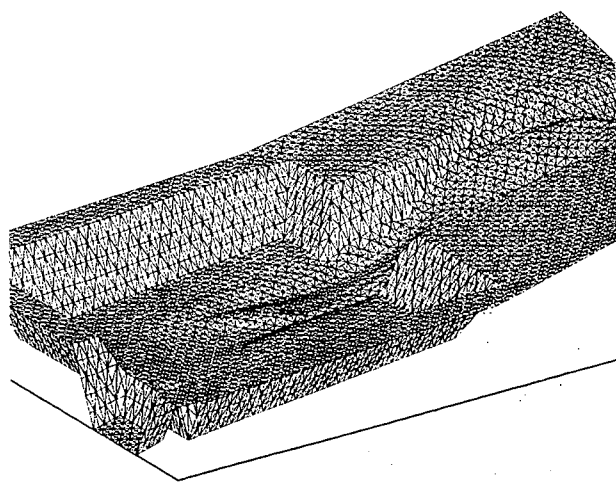


河床の計算結果

図-14 河床変動を考慮した浅水長波流れの解析 ($t = 30.0 \text{ sec.}$)

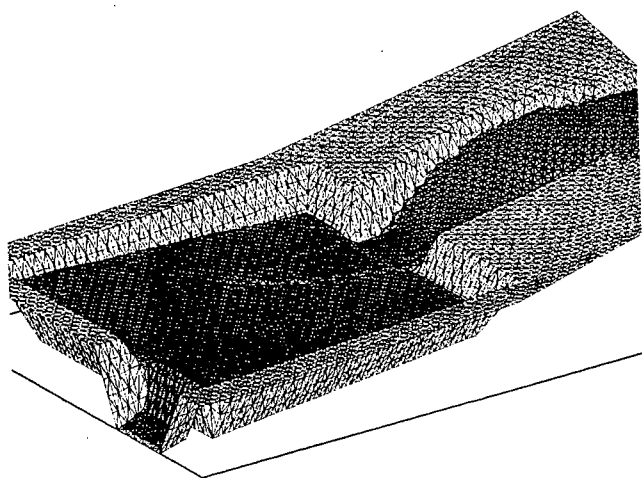


水面の計算結果

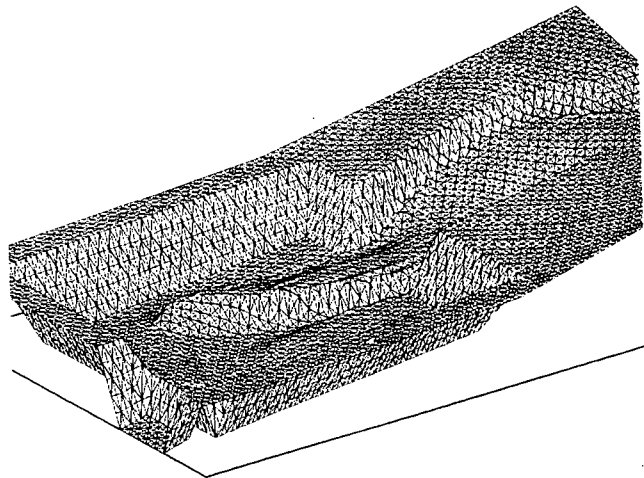


河床の計算結果

図-15 河床変動を考慮した浅水長波流れの解析 ($t = 80.0 \text{ sec.}$)



水面の計算結果



河床の計算結果

図-16 河床変動を考慮した浅水長波流れの解析 ($t = 200.0 \text{ sec.}$)

9. 結言

浅水長波流れと河床変動におけるの有限要素法解析について、MINI 要素を用いた混合補間の適用を示した。空間方向の離散化に気泡関数要素と1次要素を適用した混合補間を用い、時間方向の離散化に整合質量行列を使用し、IBTD 法を適用することの利点は、1次要素による同次補間の手法と比較して、不規則メッシュでの解の振動が生じないこと、3段階陽解法に比べて計算が安定であり、かつ高精度に計算が行えること、であることを示した。また、あらかじめ広域にわたりメッシュ分割を行い、その中で水深の有無を判定しながら水流域を決めてゆく移動境界手法を用いて、厳密解との比較を行った。本論で示した、河床変動を考慮した浅水長波流れの解析例により、本手法が実問題に対する基礎的な適用段階において、可能であることを示した。

浅水長波流れおよび河床変動における数値解析手法の研究においては段波流れの計算には、保存性、特性線の理論、TVD などの理論的な研究、また、河床変動の計算に関しては、河床変化の特性方向、湾曲部においての2次元流の考慮などの研究が行われている。今後は、これらの考えをいかに本論で示した手法に取り入れていくかについて検討を行ってゆく所存である。

参考文献

- 1) T.Umetsu : A boundary condition technique of moving boundary simulation for broken dam problem by three-step explicit finite element method, *Advances in Hydro-Science and Engineering*, vol II, China, pp.394-399,1995.
- 2) M.Kawahara, T.Umetsu : Two step explicit finite element method for sediment transport, *3rd symposium River sedimentation*, Jackson USA, pp.1487-1495, 1986.
- 3) M.Fortin and A.Fortin : Newer and Newer Elements for Incompressible Flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.6, John Wiley & Sons Ltd, pp.171-187, 1985.
- 4) 松本 純一、梅津 剛 : 気泡関数を用いた陽的有限要素法解析の検討, 第8回数値流体力学シンポジウム, pp.635-638, 1994.
- 5) 松本 純一、梅津 剛 : 気泡関数を用いた混合補間法による陽的有限要素解析への適応, 第29号前橋市立工業短期大学研究紀要, pp.25-39, 1996.
- 6) P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee and C.D. Upson, : A modified finite element method for the solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, Part 1 & 2, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.4, pp.557-598 & pp.619-640, 1984.
- 7) V. Selmin, J. Donea and L. Quartapelle : Finite element methods for nonlinear advection, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 52, pp.817-845, 1985.
- 8) 戸川隼人 : 共役勾配法, 教育出版, 1977.
- 9) 水上 昭 : Element-by-Element PCG 法のベクトル化と流れ解析への応用, 第2回計算力学シンポジウム, pp.1-6, 1988.
- 10) 水上 昭 : 非圧縮性流れ解析に現れるコンシステントな圧力方程式の Element-by-Element 解法, 第7回計算力学シンポジウム, pp.53-60, 1993.
- 11) 松本 純一、梅津 剛 : 準陽的有限要素法による移動境界

問題に対する浅水長波流れ解析, 第10回数値流体力学シンポジウム, pp.396-397, 1996.

- 12) 松本 純一、梅津 剛、川原 睦人 : 準陽的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析, 第2回計算工学講演会, pp.249-252, 1997.
- 13) 松本 純一、梅津 剛、川原 睦人 : 気泡関数を用いた浅水長波流れと河床変動解析, 第11回数値流体力学シンポジウム, pp.349-350, 1997.
- 14) 丸岡 晃、太田 真二、平野 廣和、川原 睦人 : 同次補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.383-394, 1997.
- 15) 川村 三郎 : 土砂水理学 1, 森北出版, 1982.
- 16) 吉川秀夫 : 流砂の水理学, 丸善, 1985.

(1998 年 4 月 24 日 受付)