

定常・非定常非圧縮 Navier-Stokes 方程式の適応型有限要素法

An Adaptive Finite Element Method for Steady and Unsteady
Incompressible Navier-Stokes Equations

奥村 弘*・丸岡 晃**・川原 睦人***

Hiroshi OKUMURA, Akira MARUOKA and Mutsuto KAWAHARA

*学生会員 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻博士前期課程 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)
**正会員 工博 八戸工業高等専門学校助手 建設環境工学科 (〒030-1192 青森県八戸市田面木字上野平 16-1)
***正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents an adaptive finite element formulation based on equal-order-interpolation for steady and unsteady incompressible Navier-Stokes equations. For the error estimation, the Zienkiewicz-Zhu's method is used based on a posteriori error estimation. The mesh generation for adaptation is performed using the Delaunay triangulation with h-refinement procedure. For the posteriori error estimation of unsteady flow problem, a statistic value of the error norm is used. Present formulation has the advantage of computational efficiency for the unsteady flow problem, particularly. The analysis of a cavity flow and the flow around a rectangular cylinder ($B/D = 4.0$) are performed for the numerical examples of the steady and unsteady incompressible Navier-Stokes equations respectively.

Key Words : adaptive finite element method, incompressible Navier-Stokes equations, equal-order-interpolation, a posteriori error estimation, h-refinement procedure, Delaunay triangulation

1. はじめに

有限要素法による解析結果の良否は、要素分割のクオリティーに大きく依存することは良く知られている。一般にクオリティーの高い要素分割とは、歪みの少ない要素形状を持つものであり、誤差の大きな領域では、要素長が小あるいは要素次数が高次なものが必要である。また、同時に要素長や要素次数の変化がスムーズであることも必要になる。しかしながら計算機容量には限界があり、ただ単に解析領域全体に微小な要素また高次要素を一樣に発生させただけでは、精度の良い解析結果は望めるものの、その計算はたちまちにして大規模なものになってしまう。限られた計算機資源のもとで、いかに望む精度が得られるように解析するかが問題となってくる。そこで、物理量の分布をあらかじめ予想し、物理量変化の激しい部分のみを細かく要素分割するといった効率的な要素分割が望まれる。実際に、構造解析の分野では応力や変形の大きいと思われる領域を、また、流体解析の分野では境界層付近や剥離バブルの流下する領域をあらかじめ予想し、そこを細かく要素分割するといった方法がとられてきた。このプリプロセスの試行錯誤には、各専門分野の研究者らの卓越した経験と多くの時間を必要とする。しかしながらこれらの研究者らの経験のみに頼ることには限界があり、解析領域の形状がより複雑になると、あらかじめ物理量の分布を予想し、効率的な要素分割を行うことは極めて困難である。さらに流体解析の分野で

は単純な解析領域の形状でさえ流れ場全体を予想することは困難である。このことは、われわれの感覚と実際の誤差分布の間には大きな隔たりがあり、また手作業による試行錯誤の要素分割の生成の限界を示しているといえる。さらに定常解を持つ問題のみならず、非定常解を持つ問題においては初期に生成した要素分割のみでの解析では最適な解を得ることはまず不可能である。

そこで近年では、この要素分割によるプリプロセスの試行錯誤を自動化する適応型有限要素法 (adaptive finite element method) による研究が多くの分野で進められてきている。この方法は有限要素解から誤差測度としての誤差ノルムを事後誤差評価 (a posteriori error estimation) し、その結果から要素の適応化を自動的に行う方法である。適応型有限要素法の解析手順は主に二つの部分からなっている。一つは有限要素解析によって得られた結果を用いた事後誤差評価、もう一つは事後誤差評価によって得られた誤差ノルムから要素再分割を行うことである。適応型有限要素法は構造解析の分野で発展した方法であり、多くの場合、時間に依存しない定常問題を取り扱う。構造解析の分野では構造解析そのものの計算時間よりプリプロセスに多くの計算時間を必要とすることが知られているため¹⁾、適応型有限要素法は、絶大な有効性を発揮する。しかしながら、流体解析の分野で取り扱う問題は、ほとんどが非定常流れである。特に高 Reynolds 数の解析では、微細な要

素分割が必要とされ、非定常性の強い複雑な流れの大規模解析が要求される。このことから、流体解析の分野では、非定常問題を取り扱った大規模解析が必要とされることから、流体解析自体に多くの計算時間が必要になってくる。また、プリプロセスの段階では、計算時間の面を考慮に入れたできるだけ簡易的な方法を用いることが望ましい。適応型有限要素法の流体解析の分野における適用例²⁾³⁾では、事後誤差評価による補間誤差に基づく方法の簡易法としての Zienkiewicz-Zhu の方法²⁾を用いている。また、非定常流れの問題には、ある瞬間の誤差ノルムを考慮して要素再分割を行っている。しかしながら、事後誤差評価の誤差ノルムをある瞬間のデータのみから推定するのでは、要素再分割の間での流れの非定常的な影響を考慮していないことが考えられる。このように、非定常問題における事後誤差評価はいまだ確立されていない点が多い。

本論文では、定常・非定常流れの問題に適応型有限要素法を適用することを試みた。流れ場の基礎方程式には、2次元の非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いる。非圧縮 Navier-Stokes 方程式の解析手法には、著者ら⁴⁾によって開発、検討してきた同次補間に基づく大規模解析に有効な解析手法を用いる。また、有限要素には、Delaunay 三角形要素分割により要素分割に汎用性を有する三角形1次要素を用いる。事後誤差評価には、補間誤差に基づく方法の簡易法としての Zienkiewicz-Zhu の方法²⁾を本研究では採用し、要素再分割法において h 法(要素細分化法)を用いている。非定常問題に対しては、一定の時間ステップにおける時間ステップごとの誤差ノルムの統計量から非定常問題の事後誤差評価を行い、要素分割は時間に依存させず単一のものを用いる。本論文で提案した手法の適用性、有用性を検討し、考察を行うために数値解析例として2種類の問題を取り上げる。まず、Cavity 内の流れの問題を取り上げ、定常解を持つ問題に対し確実に誤差ノルムが収束、コントロールできていることを示す。次に、非定常解を持つ断面辺長比4の矩形断面まわりの流れを取り上げる。このことにより、本手法が非定常流れの問題に対しても的確に誤差ノルムをコントロールしていることを示す。

2. 解析手法

2.1 基礎方程式

流れ場を非圧縮粘性流れと仮定すると、基礎方程式は、非圧縮 Navier-Stokes の運動方程式と連続式により記述される。これらを無次元化することによって以下の運動方程式と連続式によって表現することができる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u}$, p は流速と圧力、 $\mathbf{f}$ は外力項、 ν は $1/Re$ 、 Re は Reynolds 数をそれぞれ表す。また、 Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域で、境界 Γ は Γ_1 と Γ_2 に分けられ、以下の境界条件が規定される。

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\{-p\mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}\} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位テンソル、 $\mathbf{n}$ は境界 Γ の外向き法線ベクトルである。

2.2 時間方向の離散化と分離型解法

運動方程式 (1) に2次精度となる Crank-Nicolson 法を適用することにより、式 (5) が得られる。さらに連続式 (2) を完全陰的に表すと、式 (6) が得られる。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+1} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1})/2$ であり、移流項の非線形項は移流速度を既知流速 $\mathbf{u}^n$ により近似する。

本解析では圧力 Poisson 方程式を導くことによって、流速と圧力を分離して解く手法である分離型解法⁵⁾を適用する。運動方程式 (5) の発散をとり、連続式 (6) を代入することによって以下のような圧力 Poisson 方程式が得られる。

$$\Delta t \nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^n - \Delta t \nabla \cdot \{\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}\} \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

分離型解法では上式から圧力を求めるが、陰的解法の場合には右辺項に未知流速 $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ が含まれることから、運動方程式 (5) と圧力 Poisson 方程式 (7) を連立して解く形となる。そこで、本論文では流速場と圧力場を完全に分離するために、未知流速 $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ を既知流速 $\mathbf{u}^n$ により近似することにより、以下のような圧力 Poisson 方程式を用いる。

$$\Delta t \nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^n - \Delta t \nabla \cdot \{\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n - \mathbf{f}\} \quad \text{in } \Omega \quad (8)$$

2.3 分離型解法と空間方向の離散化

圧力 Poisson 方程式の重み付き残差方程式の導出は、通常の Galerkin 法を用いる。また、補間関数に関して、流速と圧力の重み関数と試行関数の同次補間である三角形1次要素の P1P1 要素を用いる。補間による近似関数をそれぞれ w_h , q_h , u_h , p_h とすると、式 (8) の重み付き残差方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta t \nabla q_h \cdot \nabla p_h^{n+1} d\Omega &= - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^n d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \Delta t \nabla q_h \cdot \{\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \mathbf{f}_h\} d\Omega \end{aligned}$$

$$- \int_{\Gamma_1} q_h \{ \hat{u}_h^{n+1} - \hat{u}_h^n \} \cdot n d\Gamma \quad (9)$$

式(9)の右辺第2項には、実際には粘性項が含まれるが、1次要素を用いたとき2階微分をすることにより結果的にゼロとなる。

次に、運動方程式(5)の重み付き残差方程式は、重み関数と試行関数に異なった補間関数を用いる Petrov-Galerkin 法の考え方にに基づき導くことが可能な IBTD (Improved Balancing Tensor Diffusivity) 法⁴⁾を用いる。IBTD 法による運動方程式の重み付き残差方程式は、SUPG (Streamline Upwind / Petrov Galerkin) 法⁶⁾による安定化パラメータを $\frac{\Delta t}{2}$ に置き換えた形となる。従って、式(5)の重み付き残差方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + u_h^n \cdot \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}} \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \{ -p_h^{n+1} \mathbf{I} + \nu \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}} \} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} u_h^n \cdot \nabla w_h \\ & \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + u_h^n \cdot \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}_h \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} w_h \cdot \mathbf{f}_h d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \mathbf{t}_h d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)の左辺第3項が Galerkin 法による離散化の安定化項である。ここでも、実際には粘性項が含まれるが1次要素を用いたとき、2階微分することにより結果としてゼロとなる。第1項の移流項と第3項に含まれる時間微分項を陽的部分と陰的部分にまとめると、次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_h^n \cdot \{ w_h \cdot \nabla u_h^n - \nabla w_h \cdot u_h^n \} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_h^n \cdot \{ w_h \cdot \nabla u_h^{n+1} + \nabla w_h \cdot u_h^{n+1} \} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \{ -p_h^{n+1} \mathbf{I} + \nu \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}} \} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} u_h^n \cdot \nabla w_h \cdot \{ u_h^n \cdot \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}_h \} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} w_h \cdot \mathbf{f}_h d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \mathbf{t}_h d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、式(11)の左辺第5項が人工粘性項である。従来型の BTd 法⁷⁾では移流項のみが考慮されていたが、IBTD 法では、圧力項および外力項まで考慮に入れて人工粘性項を構築する。これにより、時間ならびに空間方向で完全に2次精度を確保し、解の数値的な散逸誤差を軽減している。また、有限要素法特有の時間微分項の空間方向の離散化の際に生じる質量行列があるため、位相誤差も少なく見積もることができる。さらに、移流項の陰的部分が対称形であり、代数方程式を

導いた際も対称行列となるため、計算効率に非常に優れている。

3. 適応型有限要素法

3.1 事後誤差評価

誤差評価には、事後誤差評価に基づく Zienkiewicz-Zhu の方法²⁾を用いる。この方法によれば、各要素領域 Ω_e における誤差測度に次式で定義する誤差ノルムを用いる。

$$E_e = \sqrt{a_e(u_* - u_h, u_* - u_h)} \quad (12)$$

ここで、 u_* は厳密解を近似した準厳密解、 u_h は有限要素解であり、 $a(\cdot, \cdot)$ はエネルギーノルムである。また、解析領域全体 Ω の誤差ノルムは次のようになる。

$$E = \sqrt{\sum_{e=1}^{n_e} E_e^2} \quad (13)$$

ここで、 n_e は総要素数である。

準厳密解 u_* には、通常の補間誤差による事後誤差評価⁸⁾では、有限要素解 u_h の補間関数より高次の補間関数による有限要素解を用いるが、Zienkiewicz-Zhu の方法では、有限要素解を平滑化することによって得られる関数を用いている。高次の補間関数による有限要素解を用いる方法は、数学的にも最適な誤差評価が行えるのに対して、Zienkiewicz-Zhu の方法は、一種の簡易法であり十分に欠けるが、計算効率に優れている点と要素再分割の段階で誤差推定が厳密に反映されないことを考慮に入れれば十分であるといえる。

解析領域全体における有限要素解のクオリティーを計る指標として、誤差ノルム率 (Quality Index) QI を次のように定義する¹⁾。

$$QI = \frac{E}{E^{\exp}} \quad (14)$$

ここで、 $E^{\exp}$ は解析領域全体のエネルギーノルムであり、次のように定義される。

$$E^{\exp} = \sqrt{\sum_{e=1}^{n_e} a_e(u_h, u_h)} \quad (15)$$

この誤差ノルム率 QI は要素再分割の指標として用いる。目的誤差ノルム率 QI_{aim} を設定し、誤差ノルム率 QI が目的誤差ノルム率 QI_{aim} に近づくように要素再分割を行うものとする。

目的誤差ノルム率 QI_{aim} から得られる解析領域全体の最大許容誤差をすべての要素に均等に分配すると、各要素の最大許容誤差 $E_e^{\max}$ は次のように得られる。

$$E_e^{\max} = QI_{\text{aim}} \frac{E^{\exp}}{\sqrt{n_e}} \quad (16)$$

新しい最大許容要素長 h_e^{new} は、補間誤差の関係式⁹⁾を

変形した次式により計算できる。

$$h_e^{\text{new}} = h_e^{\text{old}} \left(\frac{E_e^{\text{max}}}{E_e} \right)^{\frac{1}{k+r}} \quad (17)$$

ここで、 k は補間関数の次数、 r はセミノルムの要素長の次数への寄与分である。本論文では、2次元の三角形1次要素を用いているので $k = 1, r = 1$ である。また、最大許容要素長 h_e^{new} には、下限値 $h_{\min}$ と上限値 $h_{\max}$ を設定している。

3.2 非定常問題の事後誤差評価

非定常問題の場合、時間ステップごとの誤差ノルムが定義されるため何らかの工夫をしなければならない。文献³⁾では、非定常流れの問題に節点ごとの平均流速変化のある時間ステップまでの総和が基準値を越えた場合に、その時間のデータを誤差ノルムの算出に用いて要素再分割を行っている。しかしながら、この方法ではある瞬間の誤差ノルムしか考慮に入れられない。

そこで本論文では、一定の時間ステップ N における時間ステップごとの誤差ノルムの統計量から非定常問題の事後誤差評価を行い、要素分割は時間に依存させず単一のものを用いる。ここで、時間ステップ N は流れ場のもつ非定常性を考慮に入れて十分に長いステップ数に設定する。具体的には、一定の時間ステップ N の間の各要素の最大許容要素長 h_e^n を計算し、その最小値 $h_e^{\min}$ 、平均値 h_e^{ave} 、RMS 値 h_e^{rms} から最大許容要素長 h_e^{new} を次式により決定している。

$$h_e^{\text{new}} = \max(h_e^{\text{ave}} - h_e^{\text{rms}}, h_e^{\min}) \quad (18)$$

$$h_e^{\min} = \min_{n=1}^N h_e^n,$$

$$h_e^{\text{ave}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h_e^n, \quad h_e^{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h_e^{n2}} \quad (19)$$

図-1 に非定常問題の最大許容要素長 h_e^n の時刻歴のモデルを示す。最大許容要素長に平均値 h_e^{ave} を用いて要素再分割を行うと十分に誤差が低下しないケースが考えられる。一方、最小値 $h_e^{\min}$ からでは、極端に細かい要素再分割が行われる可能性がある。そこで本論文では、その中間的な平均値 h_e^{ave} から RMS 値 h_e^{rms} を引いた値を用いた。ただし、 $h_e^{\text{ave}} - h_e^{\text{rms}}$ が最小値 $h_e^{\min}$ より小さくなることも考えられるので、最小値 $h_e^{\min}$ によって制約条件を設けている。

3.3 誤差ノルムの導出

Zienkiewicz-Zhu の方法では、要素ごとの誤差ノルムを以下のように定義している。

$$E_e^2 = \int_{\Omega_e} \{[\sigma(u_*) - \sigma(u_h)]\} \{[\varepsilon(u_*) - \varepsilon(u_h)]\} d\Omega \quad (20)$$

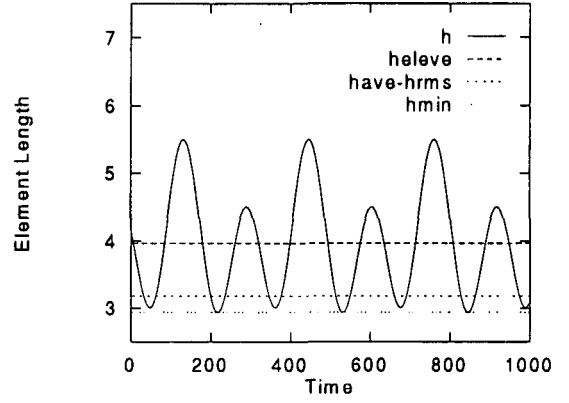


図-1 非定常問題の最大許容要素長 h_e^n の時刻歴のモデル

ここで、 $\sigma(u)$ は応力、 $\varepsilon(u)$ は歪み速度であり、次のように書ける。

$$\sigma(u) = -pI + 2\nu\varepsilon(u) \quad (21)$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \{ \nabla u + (\nabla u)^T \} \quad (22)$$

応力 $\sigma(u)$ に含まれる圧力 p の掛かる項の影響は、非圧縮性流れの場合、 $\varepsilon_{ii}(u) = \nabla \cdot u = 0$ となるので非常に小さい。また、厳密解 u の代わりに準厳密解 u_* を用いた場合に圧力 p が含まれると、式(20)の定義による誤差ノルムは非負性が保証されない。そこで本論文では、要素ごとの誤差ノルムに式(20)から圧力項を取り去った以下の式を用いた。

$$E_e^2 = \int_{\Omega_e} 2\nu \{ [\varepsilon(u_*) - \varepsilon(u_h)] \} \{ [\varepsilon(u_*) - \varepsilon(u_h)] \} d\Omega \quad (23)$$

準厳密解 $\varepsilon(u_*)$ を求めるのに、厳密解は要素境界上でも連続性が保たれていることを考慮すると、有限要素法によって得られた歪み速度 $\varepsilon(u_h)$ を要素境界上で C^1 連続になるようにするために、以下のように三角形1次要素による補間関数 N を用いて補間することにより準厳密解を導出する。

$$\varepsilon(u_*) = N^T \varepsilon_* \quad (24)$$

ここで、 ε_* は有限要素法によって得られた歪み速度 $\varepsilon(u_h)$ を面積重み付き平均法により節点量に振り分けた量である。面積重み付き平均化法は、以下のように表される。

$$\varepsilon_* \Big|_j = \frac{\sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} \varepsilon(u_h) d\Omega}{\sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{\Omega_e} d\Omega} \quad (25)$$

ここで、 $\varepsilon_* \Big|_j$ は節点 j における歪み速度の準厳密解、 n_{elm} は節点 j のまわりに隣接する要素数である。これを総節点分の計算を行うことにより、準厳密解 ε_* の節点量が求まる。

式(24)を式(23)に代入すると要素ごとの誤差ノルム E_e が以下のように得られる。

$$E_e^2 = \int_{\Omega_e} 2\nu [N^T \epsilon_* N^T \epsilon_* - N^T \epsilon_* \epsilon(u_h) - \epsilon(u_h) N^T \epsilon_* + \epsilon(u_h) \epsilon(u_h)] d\Omega \quad (26)$$

3.4 三角形要素分割

節点の発生および三角形要素分割には、Shewchuk によって開発された高品質メッシュ生成および Delaunay 三角形分割プログラム Triangle Ver.1.3¹⁰⁾ を使用した。このプログラムのソースコードは、Web ページ (<http://www.cs.cmu.edu/quake/tripaper/triangle0.html>) から入手することも可能である。

Triangle には、様々なオプションが用意されていて目的に合った要素分割が可能である。本論文において主に用いたオプションを以下に示す。

- p: 境界データから領域内に三角形要素を生成する。
- q: 生成される三角形の内角に拘束条件を与える。
- a: 要素ごとに最大要素面積の拘束条件を与える。
- r: 事前の要素分割を元に要素再分割を行う。

Triangle では、要素再分割の際に事前の節点移動したり消去することではなく、新しく節点を発生させ要素の結合状態を変更することになる。また、新しく発生した節点量は事前の要素分割を用いて 1 次補間することによって与える。

これらのオプションと事後誤差評価を組み合わせることによって h 法による三角形要素分割が可能となる。本論文では、最大要素面積の拘束条件に事後誤差評価により得られた最大許容要素長 h_e^{new} を用いて次式により定義している。

$$A_e^{new} = \frac{1}{2} (h_e^{new})^2 \quad (27)$$

図-2 に Triangle による各オプションを用いた場合の三角形要素分割のモデルを示す。要素分割 A, B, C, D は、それぞれ、-p, -pq, -pqa, -pqar のオプションにより作成したものであり、要素分割 C は、最大要素面積を領域全体で一定となるような拘束条件を与え、要素分割 D は、要素分割 C を事前の要素分割として、要素分割 C の要素ごとに最大要素面積の拘束条件を与えることによって領域の中心付近の要素が細くなるように要素再分割を行ったものである。

4. Cavity 内の流れ

定常解を有する数値解析例として、Cavity 内の流れの 2 次元解析を行った。ここでは、通常の有限要素法と本研究で提案する適応型有限要素法の解の特徴を把握することを主な目的としているため、Reynolds 数

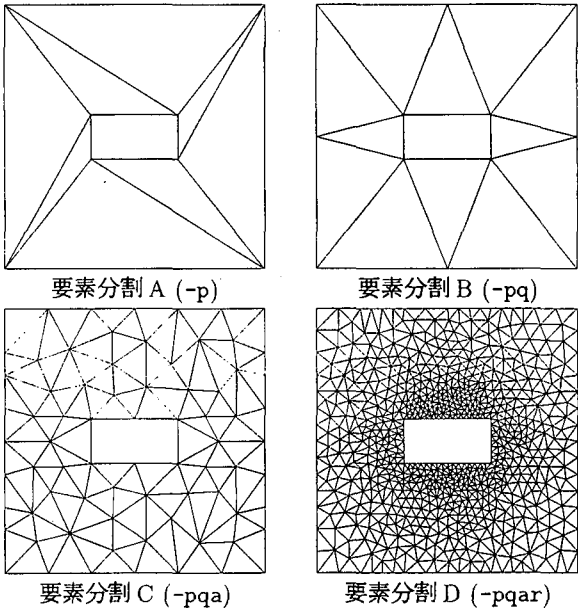


図-2 Triangle による三角形要素分割のモデル

表-1 適応型有限要素法における解析条件 ($Re = 1000$)

無次元時間増分 Δt	0.01	0.001
目的誤差ノルム率 QI_{aim}	0.05	0.05
最小要素長 h_{min}	0.01	0.01
総時間ステップ数	10000	20000
繰返し計算数	10	10

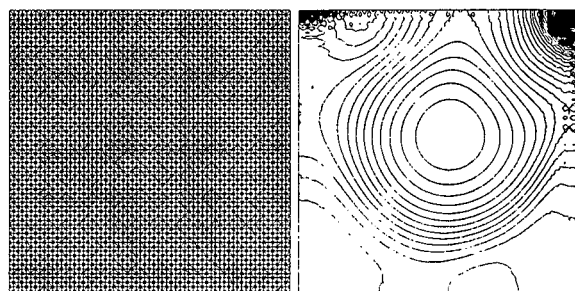
は変化させず、Reynolds 数 を $Re = 1000$ の 1 ケースのみとした。

4.1 解析条件

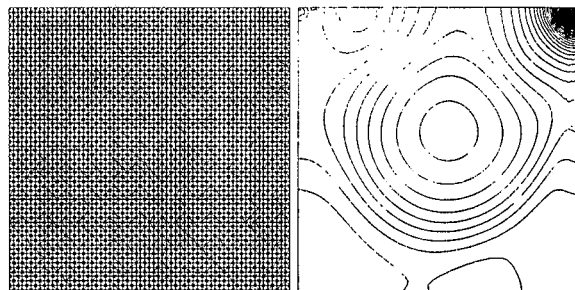
通常の有限要素解析では、 64×64 の均等要素分割を用いて定常解に収束するまで計算を行い、適応型有限要素解析では誤差ノルム率 QI が収束するまで計算を行った。無次元時間増分は、 $\Delta t = 0.01, 0.001$ の 2 ケースに設定した。表-1 に適応型有限要素法における解析条件を示す。最小要素長は、 $h_{min} = 0.01$ と設定した。総時間ステップは、それぞれ、10000, 20000 と設定しており、最終の時間ステップの結果を定常解と仮定し、これにより事後誤差評価を行う。

4.2 解析結果

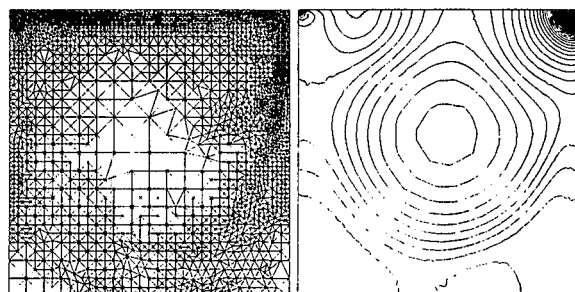
図-3 に要素分割と圧力コンターによる解析結果の比較を示す。適応型有限要素法では、圧力解は全く振動していない。通常の有限要素法では、 $\Delta t = 0.001$ のときを見ると、圧力解が振動していることがわかる。これは、文献⁴⁾に指摘しているように本解析手法の運動方程式と連続式の安定化の項が時間増分 Δt に依存す



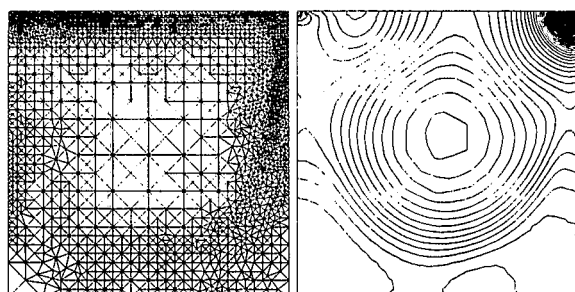
(a)-1 有限要素解 ($QI = 0.245, \Delta t = 0.001$)



(a)-2 有限要素解 ($QI = 0.227, \Delta t = 0.01$)



(b)-1 適応型有限要素解 ($QI = 0.203, \Delta t = 0.001$)



(b)-2 適応型有限要素解 ($QI = 0.190, \Delta t = 0.01$)

図-3 要素分割と圧力コンターによる解析結果

るためである。特に、時間増分 Δt が小さい場合には不安定になりやすい傾向を示す。実際には、要素分割によっても数値的な粘性効果が入るため、物理現象に即した要素分割を行う必要があるが、適応型有限要素法では初期の要素分割と時間増分 Δt を考慮しないで、高 Reynolds 数の計算を行っても解が振動しにくい。

図-4、図-5 に適応型有限要素法を用いた場合の総節点数および誤差ノルム率 QI の適応型有限要素法によるイタレーションに対する変化を示す。図-4 より、 $\Delta t = 0.001, 0.01$ の解析では総節点数が 2421, 2743

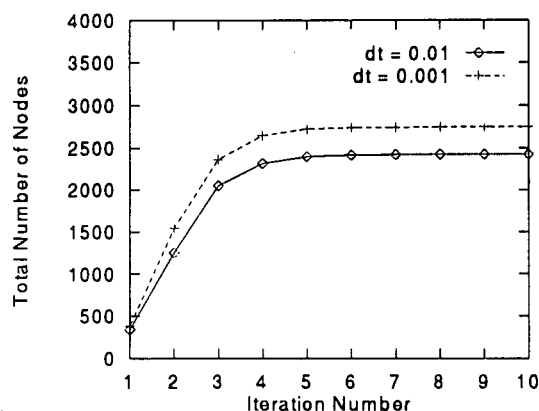


図-4 総節点数の適応型有限要素法によるイタレーションに対する変化

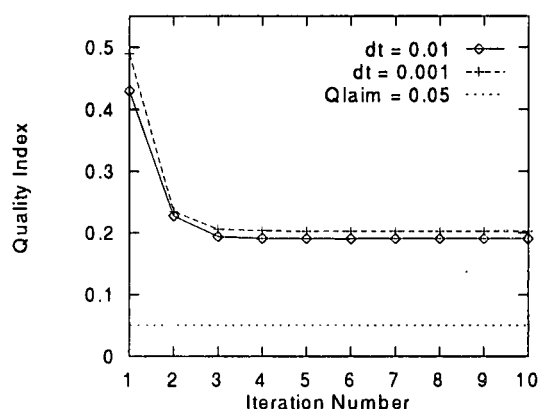


図-5 誤差ノルム率 QI の適応型有限要素法によるイタレーションに対する変化

に収束した。また、図-5 より、どちらのケースも誤差ノルム率 QI が約 0.20 に収束している。ここで、どちらのケースも目的誤差ノルム率の $QI_{aim} = 0.05$ の近傍に収束していないのは、解析条件において最小要素長を $h_{min} = 0.01$ とするような制約条件を設けているため、誤差大の領域でも最小要素長 h_{min} よりも細かくは、要素再分割をしないためである。最小要素長 h_{min} を比較的大きくしたのは、Babuska¹¹⁾によって指摘されている不連続境界値問題 (Babuska's paradox) を考慮に入れているためである。Cavity 上側両端では境界値を二つ持つことになり、h 法を繰り返し行い要素分割を細分化するほど誤差測度が発散してしまう恐れがあるためである。

5. 断面辺長比 4 の矩形断面まわりの流れ

非定常流れの問題の数値解析例として、断面辺長比 4 の矩形断面まわりの流れの 2 次元解析を行った。矩形断面まわりの流れに代表される剥離を伴う流れでは、Reynolds 数が高くなると、3 次元的な流れが存在する

ことが指摘されている¹²⁾¹³⁾。平野ら¹³⁾によれば、断面辺長比4の矩形断面における2次元解析の適用範囲は、Reynolds 数800以下と指摘していることから、本論文では、非定常流れをターゲットとして、Reynolds 数を300と設定した。

ところで、事後誤差評価に基づく適応型有限要素分割を行う際、初期の要素分割の作成が重要になる。例えば、初期の要素分割に粗い要素分割を用いた場合、高Reynolds 数の解析では解が不安定のまま解析を行うことになり、初期の事後誤差評価が正確に行えないことが考えられる。一方、ある程度、細かい要素分割を用いた場合、誤差の小さい領域に初めから節点が配置されてしまうことが考えられる。そこで本論文では、効率のよい初期の要素分割を作成するために、定常流れとなる低いReynolds 数による適応型有限要素分割を行い、それにより作成された要素分割を高いReynolds 数の解析に用いることを試みた。具体的には、 $Re = 300$ の解析を行うための初期の要素分割の作成に、 $Re = 3, 30$ の2段階のReynolds 数にわけ、適応型有限要素解析を行っている。

5.1 解析領域および境界条件

解析領域および境界条件は、図-6に示す。矩形断面の流れと鉛直方向の長さを代表長 D とすると、流れの方向に $40D$ 、流れと鉛直方向に $20D$ である。ここでの閉塞率は5.0%である。矩形断面は、解析領域に左端から $10D$ の位置に断面の中心がくるように配置した。境界条件は、左端を流入境界とし、ここから一様な流れ U_0 を与える。また、矩形断面まわりではno-slip条件 ($u, v = 0$)、上下の境界面ではslip条件 ($v = 0$)、右端下流端では圧力を $p = 0$ と与えている。

ただし、 $Re = 3, 30$ の解析では、解析結果が矩形断面を中心とする x 軸に対称な定常解を持つものと仮定できるので、半分の領域により解析を行っている。また、非定常流れとなる $Re = 300$ の解析でも、要素再分割の段階のみ半分の領域で行い、これを全体領域に拡張することによって全体領域の要素分割を作成している。これにより要素分割の対称性を保持したまま適応型有限要素法を用いることが可能になる。

5.2 初期条件

$Re = 3$ の適応型有限要素法によるイタレーション1回目の初期条件のみ解析領域全体で $u = 0$ とし、2回目以降は要素分割を行う際の前の適応型有限要素法によるイタレーションで得られた最終時間の解析結果を次の適応型有限要素法によるイタレーションの初期条件に用いる。Reynolds 数を上げるときも低い方のReynolds 数の解析結果を初期条件として用いる。

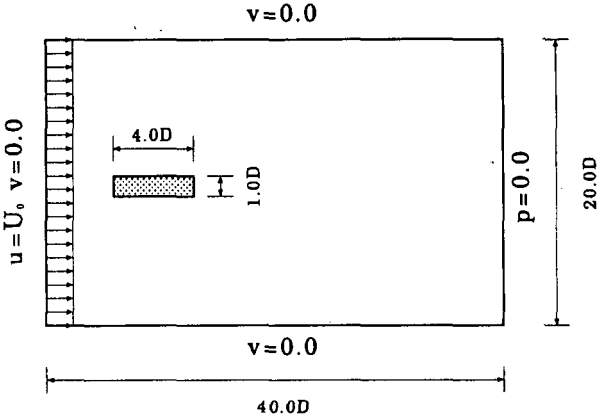


図-6 解析領域および境界条件

表-2 矩形断面まわりの流れの解析条件

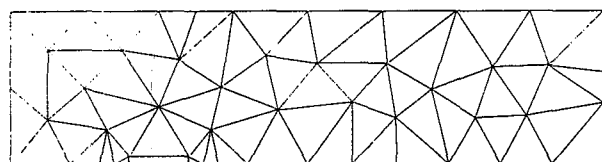
Reynolds 数	3	30	300
無次元時間増分 Δt	0.2	0.1	0.05
目的誤差ノルム率 QI_{aim}	0.2	0.2	0.2
最小要素長 h_{min}	0.02	0.01	0.005
イタレーション1回目	250	500	5000
総時間ステップ数 (統計量算出用)	(—)	(—)	(1000)
イタレーション2回目以降	250	500	2000
総時間ステップ数 (統計量算出用)	(—)	(—)	(1000)
繰返し計算数	10	10	10

5.3 解析条件

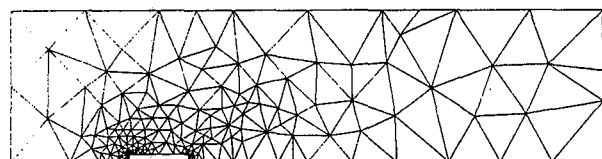
表-2に矩形断面まわりの流れの解析条件を示す。ここで、最小要素長 h_{min} は、無次元時間増分 Δt の1/10としている。 $Re = 3, 30$ における総時間ステップ数は、無次元時間50となるように設定し、無次元時間50での結果を定常解と仮定し、これにより事後誤差評価を行う。 $Re = 300$ における流れ場の統計量の算出には、初期条件による解の影響を回避するため、計算初期の時間ステップの値を用いず、後ろの1000ステップ(無次元時間50)を用いることとする。また、対称な $Re = 30$ の流れを初期条件としている適応型有限要素法によるイタレーションの1回目だけ総時間ステップ数を5000ステップと多く設定している。 $Re = 3$ における初期の要素分割は、Triangleの-aオプションを使用し、最大要素面積を10.0としている。繰返し計算数は、すべて10回と固定している。

5.4 $Re = 3, 30$ の解析結果

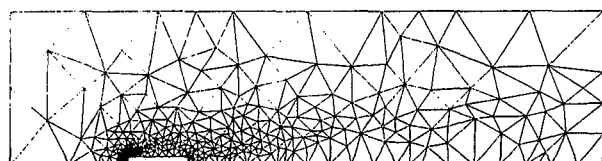
$Re = 3, 30$ の解析では、適応型有限要素法によるイタレーション10回目の計算結果を用いて、11回目の適応型有限要素分割を行ったところ、節点数がそれぞれ10回目と同様の187節点、398節点に収束した。



初期の要素分割 (総節点数: 51, 総要素数: 69)



$Re = 3$ の要素分割 (総節点数: 187, 総要素数: 317)



$Re = 30$ の要素分割 (総節点数: 398, 総要素数: 713)

図-7 要素分割の履歴図

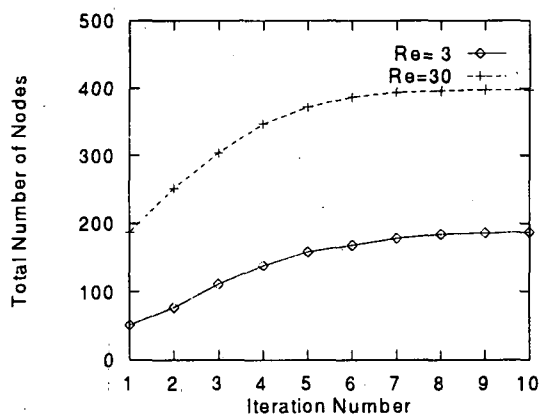


図-8 総節点数の適応型有限要素法によるイタレーションに対する変化

図-7 に要素分割の履歴図を示す。矩形断面の風上側縁端に集中的に節点が発生していることがわかる。矩形断面のような風上側縁端を剥離点とする物体まわりの流れでは、本論文で用いている誤差測度を用いると剥離点付近に微細な要素分割が行われる特徴がある。

図-8、図-9 に総節点数および誤差ノルム率 QI の適応型有限要素法によるイタレーションに対する変化を示す。誤差ノルム率 QI は、ほぼ目的誤差ノルム率 QI_{aim} に一致している。

5.5 $Re = 300$ の解析結果

$Re = 300$ の解析では、適応型有限要素法によるイタレーション 10 回目の計算結果を用いて、11 回目の適応型有限要素分割を行ったところ、10 回目が 6030、

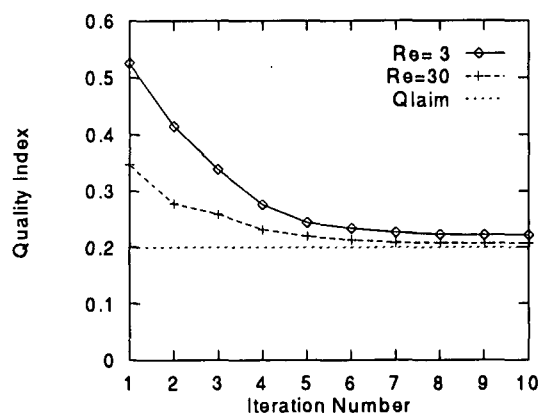


図-9 誤差ノルム率 QI の適応型有限要素法によるイタレーションに対する変化

11 回目が 6105 となり、一致せず完全に収束しなかったが、節点量の増分が全体に対して 1.2% 程度であったので 10 回で計算を終了した。

図-10 に適応型有限要素法によるイタレーション 10 回目の要素分割を示す。Reynolds 数 300 の場合、矩形断面の風上側縁端に集中的に節点が発生しているだけでなく、カルマン渦が流下する範囲に沿って節点が発生している。一方、解析領域の上流側と中心から離れた側部では、ほとんど節点が発生していないことがわかる。

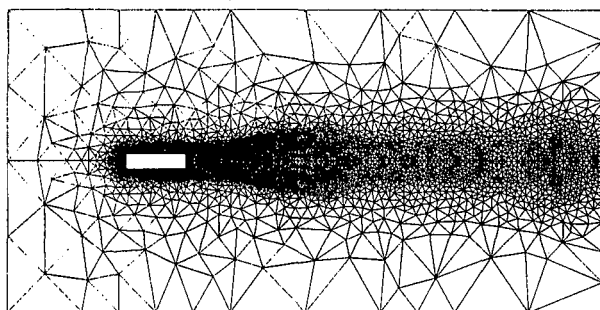
図-11、図-12 に総節点数の適応型有限要素法によるイタレーションに対する変化と誤差ノルム率 QI の時刻歴の 2 回目と 10 回目の比較を示す。10 回目の誤差ノルム率 QI は、目的誤差ノルム率 QI_{aim} よりやや低い値となっている。これは、本論文における非定常流れに対する事後誤差評価のための最大要素長 h_e の設定は、平均値 h_e^{ave} から h_e^{rms} を引いた値を用いているので非定常性の強いところで、やや厳しい誤差評価をしていることが原因である。

図-13 に圧力コンター図の 2 回目と 10 回目の比較を示す。10 回目の結果は、角柱後方でのカルマン渦の流下を明確にとらえていることが確認できる。

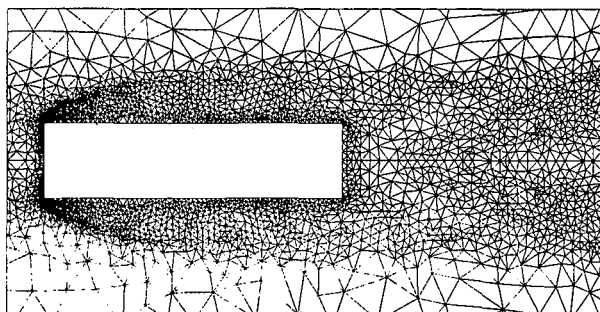
6. おわりに

本論文では、2 次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する定常・非定常流れ問題に適応型有限要素法を適用することを試みた。非圧縮 Navier-Stokes 方程式には、著者ら⁴⁾によって検討してきた大規模流体解析に対して有効性を発揮する同次補間を用いた解析手法を用い、事後誤差評価には補間誤差定理に基づき計算効率に優れる Zienkiewicz-Zhu の方法を用いることにより大規模な非定常流体解析に対し有効な手法を開発、検討した。

定常解を持つ Cavity 内の流れの解析において、同



全体図



拡大図

図-10 $Re = 300$ の要素分割 (総節点数: 6030, 総要素数: 11798)

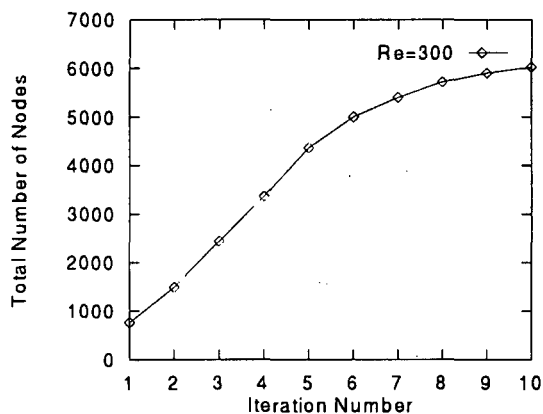


図-11 $Re = 300$ における総節点数の適応型有限要素法によるイタレーションに対する変化

次補間を用いた場合に問題となる時間増分 Δt の大きさに依存した圧力の空間振動に対して、本手法の適応型有限要素法により圧力振動を回避でき、また誤差ノルムを的確にコントロールすることができた。

従来の方法では非定常流れの問題の事後誤差評価には、ある瞬間の誤差ノルムのみしか考慮されておらず、要素再分割するまでの間の非定常的な流れの動向を的確に要素再分割の適応化に反映されてはいなかった。このことは、本来の適応型有限要素法の目的である要素分割を適応化した高効率の解析からは若干かけ離れ、ある瞬間の適応化した要素分割図に流れのパター

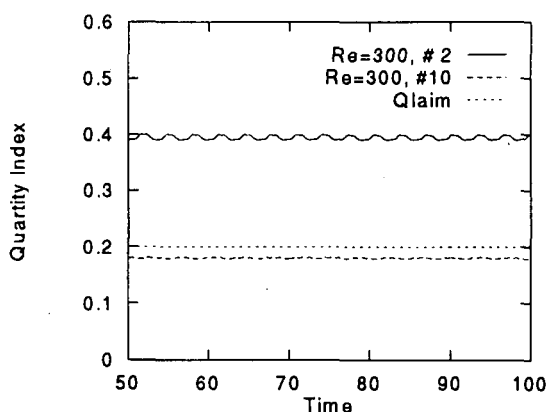
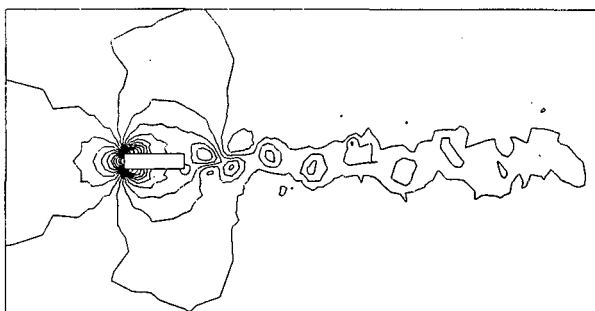
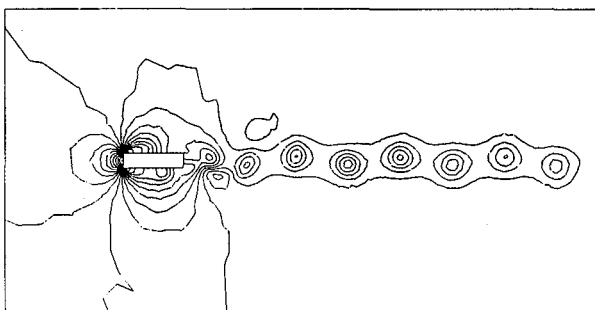


図-12 $Re = 300$ における誤差ノルム率 QI の時刻歴の2回目と10回目の比較



2 回目



10 回目

図-13 $Re = 300$ における圧力コンターの2回目と10回目の比較)

ンを見出すことで各々の研究を納得していた傾向があると思われる。本研究では、適応型有限要素法の目的の原点に帰り、非定常流れの問題に対して一定の時間ステップにおける誤差ノルムの統計量から事後誤差評価を行い、要素分割は時間に依存せず単一のものを用いた。このことにより、非定常問題に対して要素再分割の回数を減少させ、要素再分割するまでの間の流れの解析結果に対して的確に誤差ノルムをコントロールできることを断面辺長比4の矩形断面まわりの流れの解析において確認した。

参考文献

- 1) 手塚明, 菊池昇: アダプティブ法による有限要素自動分割(第3報: h 法での誤差測度と要素寸法の関係及び収束状況), 日本機械学会論文集(A編), 58巻555号, 1992.
- 2) Wu, J., Zhu, J.Z., Szmelter, J. and Zienkiewicz, O.C.: Error estimation and adaptivity in Navier-Stokes incompressible flows, *Comp. Mech.*, Vol. 6, pp.259-270, 1990.
- 3) 矢川元基, 矢敷達朗, 奥田洋司: 節点密度コントロールによるアダプティブ有限要素流体解析, 第7回計算力学シンポジウム, pp.121-126, 1992.
- 4) 丸岡晃, 太田信二, 平野廣和, 川原睦人: 同次補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.383-394, 1997.
- 5) Hayashi, M., Hatanaka, K. and Kawahara, M.: Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.13, pp.805-840, 1991.
- 6) Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 95, pp.221-242, 1992.
- 7) Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, R.L. and Uppson, C.D.: A modified finite element method for the solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, Part 1 & 2, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 4, pp.557-598 & pp.619-640, 1984.
- 8) Babuska, I. and Rheinboldt, W.C.: Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method, *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*, pp.67-108, 1980.
- 9) Hughes, T.J.R.: The finite element method, pp.185-192, pp.263-275, 1987.
- 10) Jim Ruppert: A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation, *Journal of Algorithms*, Vol. 18(3), pp.548-585, 1995.
- 11) Babuska, I.: Optimal Shape, 1987.
- 12) Tamura, T., Ohta, I. and Kuwahara, K.: On the Reliability of two-dimensional simulation for unsteady flows around a cylinder-type structure, *J. of Wind Engrg. and Indust. Aerodyn.*, Vol. 35, pp.275-298, 1990.
- 13) 平野廣和, 渡邊茂, 丸岡晃, 佐野健一: 断面辺長比4の矩形断面の空力特性に関する2次元・3次元数値流体解析, 土木学会論文集, (投稿中).

(1998年4月25日受付)