

破面を有する岩盤内の流れ解析のための有限要素モデル生成に関する一考察

A Study on Finite Element Modeling for Numerical Analysis of Groundwater Flow and Transport through Fractured Rock Matrix

谷口健男*, ハラルド・カスパー**, オラフ・コルディッツ***, ベルナー・チルケ****
Takeo TANIGUCHI, Harald KASPER, Olaf KOLDITZ, Werner ZIELKE

*正会員 工博 岡山大学教授 環境理工学部 700 岡山市津島中 2-1-1

**Institut fuer Stroemungsmechanik, Universitaet Hannover, Hannover, Germany

***理博 Institut fuer Stroemungsmechanik, Universitaet Hannover, Hannover, Germany

****工博 教授 Institut fuer Stroemungsmechanik, Universitaet Hannover, Hannover, Germany

In this paper new hexahedral mesh generation methods are proposed for the finite element analysis of groundwater flow and transport through fractured rock matrix. Proposed methods are based on Delaunay triangulation to divide whole domain into tetrahedra, and successively tetrahedra are subdivided into hexahedra. Through numerical testing of the proposed mesh generation methods we examine their efficiency and also the numerical solutions.

Key Words: 3D composite domain, hexahedral elements, Delaunay triangulation

1. はじめに

放射性廃棄物や化学廃棄物等のデポジットサイトとして地下空間の利用が考えられているが、その安全性の検討のため数値実験による地下水流れと物質移動の検討が要求される。そこで用いられる数値解析法としては複雑な境界条件の処理が容易であること、岩盤内に存在する破面(ここでは断層や寸法の大きな割れを示す)の数や大きさ・位置が調査とともに変化すること等の理由により、有限要素モデルの新規作成や一部修正等が容易な有限要素法が最も望ましいものと考えられている。そのためにはこれらの諸要求を充足できる有限要素モデルの生成法が不可欠であることより、今日その研究が行われている。本研究の主目的はこの有限要素解析を前提としたとき必要となる有限要素モデル、特にその幾何学モデルの生成法の提案とその検討にある。

多くの破面を有する岩盤といった数値解析の対象となる3次元地下空間の幾何学形状は、全体としては直方体のような簡単な形状である。しかしながら、それを分断する形で多くの破面(平面で近似する)が存在することより、直方体が多くの部分領域の集合体となる。それぞれの破面が直方体を分断するものと仮定すれば、

個々の3次元部分領域の形状は凸であり、また表面は凸多角形で覆われていることになる。よって、ここで扱う3次元領域は凸形状をした3次元部分領域よりなる凸3次元領域である。

有限要素解析では解析対象領域を有限要素モデルに置き換えることが要求され、従来提案されてきた要素分割法は Structured Grid と Unstructured Grid の2種類に大別できる。前者は有限差分法で扱われる格子構造をもった要素であり、後者はそれ以外の四面体、三角柱あるいは六面体といった3次元要素を用いた有限要素モデルを言う。前者の生成法として、従来から多くの手法が提案されて、良好な数値解を得ることが可能であることが知られている。その反面、境界の形状を変更したり、また領域内の破面位置やその数を変更する場合、そのモデル構築に多大の労力が要求されるという欠点を持つ。一方、後者、特に四面体要素を用いたモデル生成は対象形状の変更等の要求に対して比較的容易に対応できるという利点を有している。しかしながら、今日多くの分野で要求の多い六面体有限要素モデルの作成が困難であることが知られている。なお、現時点での六面体要素生成法として、Blacker, Tautges 等の研究 1), 2), Schneider の研究 3), Tam と Armstrong の共同研究 4), Taniguchi 等の研究 5) が挙げられる。

Blacker 等の研究は Advancing Front Method の考えの 3 次元への拡張であり境界から内部に向かって六面体要素を生成することを目指しているが未完成の方法である。Schneiders 等の方法は逆に内部から境界表面に向かって要素を生成することより、領域の中心部には良好な六面体を生成出来るが、境界近傍に生成される六面体要素の形状は良好とはいえない。また、この方法の欠点として複合領域への展開が困難であることが挙げられる。Tam と Armstrong の考えは対象領域を 3 種類の単純な部分領域 (primitive と呼ぶ) に分割した後六面体に細分割する方法であり、部分領域への分割を手動に頼らざるを得ない欠点を有する。Taniguchi 等の研究は対象を四面体に分割後、それぞれの四面体を 4 個の六面体に細分割する方法であって、全自動という利点を有する反面、良好な六面体形状が得られないという欠点を有する。

複合領域に対する有限要素モデル生成では、互いに隣接する部分領域間に位置する面には同じ要素分割が要求される。この要求を満足させるのは、上に示した手法のうち Tam & Armstrong 等の研究と Taniguchi 等の研究が挙げられるが、全自動の手法として後者が残される。以上の考察より、本研究では上に示した Taniguchi 等の研究を更に進め、より良好な六面体要素を自動生成する手法の提案を行い、その結果を実際の問題に適用して、その有効性を探る。

2. 複合領域の六面体要素生成の考え方

有限要素モデルではトポロジー (要素と節点関係) と幾何学量の両者の生成が要求される。目的が六面体要素の場合、この要素のもつトポロジー (8 頂点, 12 稜線, 6 四辺形, 1 頂点に集まる稜線数が 3 本) を満足させるとともに、得られる六面体の形状が良好でなければならない。2 次元領域を三角形で近似表現出来ることは良く知られた事実であり、同様に任意形状をした 3 次元領域を近似的に四面体で埋め尽くすことも可能である。しかしながら、任意 3 次元領域を六面体要素で分割することは上に示した二つの特性を満足させようとする困難である。一例を挙げる。いま、ピラミッド形状を考えたとき、その頂点には 4 本の稜線が集まっていることより、まずこの頂点の次数 (点に集まる線数) の処理が要求される。このため、この頂点を 2 分割してピラミッドを二つの四面体に分割してから、六面体に細分割する方法が今日見出

されている唯一の六面体生成法である。この一例からも“任意” 3 次元領域を対象としたとき、その六面体要素生成が困難であることが理解できよう。さらに言えば、現時点で六面体分割が可能である領域の形状は、“四面体”, “三角柱”, “六面体” の 3 種類とそれらの組み合わせで出来た 3 次元領域だけである。図 1 はこれら 3 種類の基本形状の六面体要素分割を示したものである。

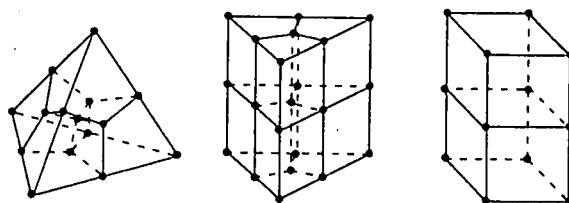


図 1 基本形の六面体分割

以上のことから、もし 3 次元領域をこれら 3 種類の形状 (以降では基本形状と呼ぶ) に分割できれば、六面体要素生成が可能であることになる。なお、上に示した Tam & Armstrong 等の研究では対象形状を六面体要素への分割が可能ならこれらの 3 種類の基本形状に手動で分割した後、自動的に六面体要素に細分割する方法である。また、Taniguchi 等の研究 5) はこの基本形状の内四面体だけを用いた六面体要素生成技術であると言える。本研究では四面体だけでなく他の 2 種類の基本形状も用いた六面体要素への完全な自動細分割法を提案しようとするものである。よって、3 種類の基本形状を用いる点に違いは無いものの、Tam & Armstrong の方法は半自動であるのに対して、本研究で提案する手法は完全な自動要素分割法となっている。

3. 六面体要素分割の 4 つの手法

ここに示す方法は二つの段階から構成される。前半部は対象領域の四面体分割、後半部は四面体分割された領域の六面体要素への細分割であって、本研究ではこの後半部について 4 つの方法を説明する。

前半部：領域の四面体分割

ここでは簡単のため、凸形状の 3 次元領域として直方体領域を想定し、任意に m 個の平面でもってこの直方体を小領域に細分割する。この結果得られる各部分領域は凸多角形で覆われた凸多面体となる。要素分割ではこれらの凸多面体集合の六面体要素分割するとともに、部分領

域間に位置する凸多角形には同じ四辺形分割を与えることが要求される。まず、これらの多面体集合の四面体分割を行うが、これには既に提案された手法 5) を利用する。

まず、多面体集合の全ての頂点（その個数を n 個とする）を、例えば原点からの距離が遠いものから近いものへの順に並べ直す。次に、それぞれの部分領域（凸多面体）の頂点群に 3 次元 Delaunay Triangulation^{6), 7)} を適用して四面体分割するが、その時の頂点の導入順序は上で得られた点順序に従って行う。この四面体分割での点順序を守ることにより、互いに隣接しあう二つの多面体間に位置する凸多角形上の三角分割（正確には凸多面体の四面体分割の内表面上に現れる三角形群）を例え二つの凸多面体を独立に四面体分割しても一致させることができる。（二つの互いに隣接する多面体を独立して四面体分割することは隣接面である多角形を 2 度独立して三角分割することになることより、独立して分割を行っても同一の三角分割を得る保証が必要となる。）なお、この証明については文献 5) を参照されたい。以上の操作を全ての凸多面体に繰り返して、領域全体の四面体分割を終了する。この結果、直方体が四面体に分割されると同時に、破面として導入した全ての面が三角形で分割できたことになる。

この前半部の事例を示す。図 2 は立方体に 2 個の破面を導入して計 4 個の部分領域が得られる場合の四面体要素分割結果を示す。図 2-1 は複合領域全体の概観を示し、図 2-2 は四面体要素分割した後の表面上の三角分割結果を示す。

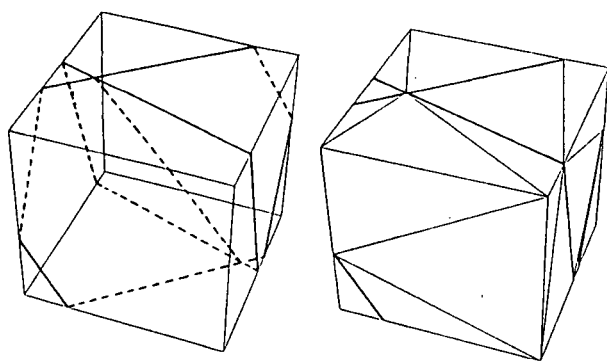


図 2-1 全体図 図 2-2 四面体分割後

次に、四面体分割された領域全体を六面体要素に細分割する方法を述べる。

後半部：六面体要素分割

方法 1 5)

1 個の四面体を考える。6 本の稜線の中点、4 個の表面三角形の重心位置、および四面体の重心位置に合計 11 個の点を追加する。その後、各三角形について、稜線の中点と三角形の重心位置を線で結び表面三角形を 3 個の小三角形に細分割する。さらに、表面三角形の重心位置と四面体の重心位置を結合して、最終的に四面体を 4 個の小四面体に細分割する。この操作を領域内に生成された全ての四面体に繰り返すと、結果として全領域が六面体集合で表現できることになる。方法 1 を図 1 に示された四面体の六面体への分割法そのものである。

この方法は最も簡単な六面体要素生成法であり、四面体数の 4 倍の六面体要素を生成する。図 1 から明らかなように、四面体の頂角が得られた六面体にそのまま残ることより、一般に幾何学的に良好な要素とは言い難い反面、本研究の主テーマである領域の形に関する凸条件を外した任意 3 次元領域にもそのまま利用できる利点を有する。すなわち、任意 3 次元領域が何らかの方法で四面体要素に分割できていれば、上記手法で六面体要素に切り替えることができる。

方法 2

この方法も 1 個ずつの四面体を対象とする六面体生成法である。領域内部の 1 個の四面体を取り上げてその六面体への切り替えを説明する。

四面体要素の体積を適当に縮小した相似形（以降、核と呼ぶ）を作成した後、核を元の四面体の重心位置に相似な面同士が向かい合うように置く。次いで、核の表面三角形を元の四面体の表面三角形に写す。なお、射影された三角形と元の表面三角形の重心位置を一致するように置く。核の外部には未分割の部分（以降、表皮部と呼ぶ）が存在することになる。以下では、この表皮部の分割を説明する。

核の表面三角形と射影された三角形をつなぎ、表皮部内に 4 個の三角柱を作る。残る未分割の表皮部については次の様な分割を行う。元の四面体の各稜線上に頂点から稜線長の $1/4$ の位置に点を追加し、その点と射影三角形の頂点とを結合する。これにより、元の四面体の各頂点周辺に六面体が、また稜線周辺に三角柱が生成され、これらでもって表皮部の分割が終了する。まとめると、核は 1 個の四面体で、表皮部は 4 個の六面体と 10 個（= 4 個 + 6 個）の三角柱

に分割できる。残された仕事はいま得られた四面体，三角柱，六面体を六面体に細分割することであり，これは容易に出来る。

以上を示した四面体の六面体分割を示したのが図3である。この図においてKとSはそれぞれ核と表皮部を示し，上から二番目の図は四面体を部分領域に分割できた時の表面の分割を示す。3番目の図は六面体分割後の表面上の分割である。

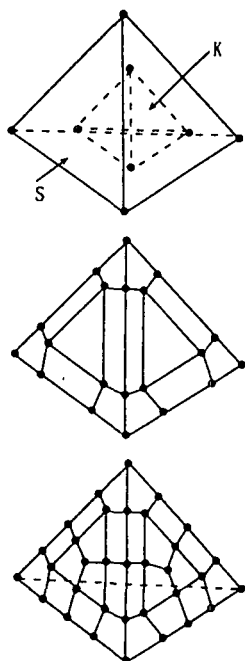


図3 方法2の説明

方法3

四面体分割できた一つの凸な部分領域を取り上げる。部分領域全体の体積を縮小させた元の部分領域と相似な多面体（以降これを核と呼ぶことにする）を作り，元の多面体部分領域の重心位置に一致するように，そして元の部分領域と核の相似な面同士が向かい合う位置に置く。なお，元の部分領域表面上の三角形を残したままとする。以上の操作でもって，元の部分領域は四面体分割できた核とその外部に位置する未分割な部分（以降表皮部と呼ぶことにする）に分けられる。

表皮部に位置する体積の要素分割を説明する。表皮部の表面上の凸多角形と相対する元の凸な部分領域表面上の凸多角形は相似な三角形分割であることより，相対する三角形同士をつなぐことより，表皮部の体積は表面上の三角形と同数の三角柱に分割できる。

以上の操作でもって，元の部分領域は四面体

分割できた核部，三角柱に分割できた表皮部に置き換えられたことになる。なお，三角柱と四面体は食い違いなく接合されている。よって，得られた四面体と三角柱については図1に示した分割法でもって六面体に細分割する。これにより，四面体分割できていた部分領域は六面体に細分割できることになる。この方法を領域内部の全ての部分領域に繰り返し適用して，領域全体を六面体モデルに切り替える。この方法を示したのが図4である。同図において，一番上の図は核（K）と外皮部（S）を示し，2番目と3番目の図で外皮部の一部を取り出したときの三角柱への分割を示している。

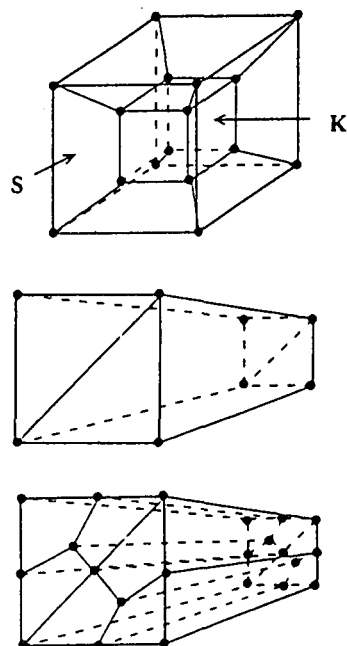


図4 方法3の説明

方法4

この方法は方法3と同様に四面体分割された凸な部分領域を対象に六面体を作る方法である。1個の四面体分割された部分領域を選び出し，方法3と同様にその体積を縮小して相似系（以降，核と呼ぶ）を作り，元の領域の重心位置に置く。なお，相似な凸多角形の面同士は相対する位置に置く。その後，元の部分領域の表面凸多角形上の三角形を全て消去する。よって，元の部分領域の表面は凸多角形で覆われることになる。なお，以上の操作では，核は四面体に分割され，その外部（表皮部と呼ぶ）は未分割のままである。

核の表面を覆う三角分割された凸多角形を相対する多角形の上に重心位置を一致させて写像

し、その部分を三角柱で分割する。これを全ての表面について繰り返し行う。これにより、表皮部の体積の大部分が三角柱で埋められたことになる。元の部分領域の表面において、写像で得られた多角形と元の多角形の頂点同士をつなぎ、また元の多角形の頂点と核の頂点とをつなぐと、元の個々の稜線周辺に2個ずつの三角柱を形成することが出来る。すなわち、元の稜線数 $\times 2$ 個の三角柱が表皮部の残る部分に作られる。以上の操作により、表皮部は全て三角柱で細分割出来たことになる。まとめると、核部は四面体で、表皮部は三角柱で分割できる。この操作を領域にある全ての部分領域に繰り返した後、四面体を4個の六面体に、また三角柱を3個の六面体に細分割して、六面体への切り替えを終了する。ここに示した方法を図示したのが図5である。この図も図4と同様に、全体の概観、外皮部の一部とその三角柱分割を示している。

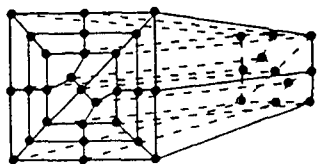
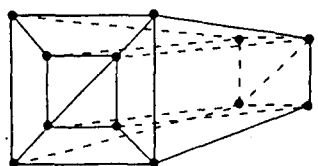
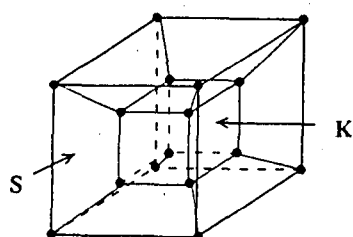
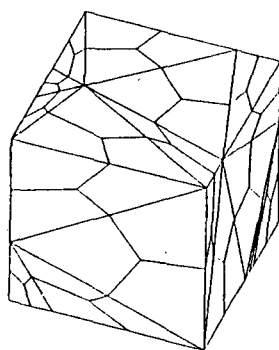
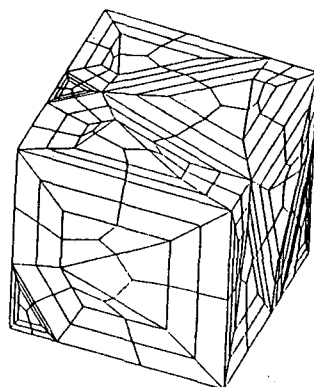


図5 方法4の説明

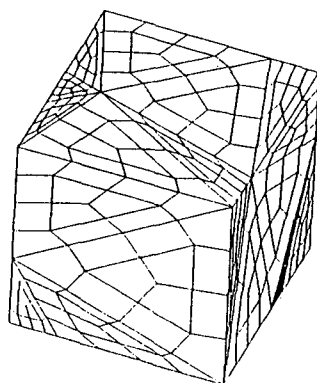
以上提案した4つの六面体生成法の適用例を図6に示す。これらは同じ対象系(図2に示した事例)に対し、それぞれの手法でもって六面体を作り上げた得られた表面上の三角分割結果を図示したものである。なお、図6—1は方法1と方法3の適用結果を示す。これらは表面上に現れる四辺形分割は全く同じ結果となる。図6—2と6—3はそれぞれ方法4と2の適用結果である。



方法1 & 2の結果



方法3の結果



方法4の結果

図6 六面体要素の生成事例
(表面上の四辺形を示す)

4. 六面体有限要素モデルの適用例 8)

以下において、本研究で示した六面体要素を用いた有限要素解析の事例を示して、この幾何学形状を有した有限要素の検討を行う。ここに示す事例は破面を有する岩盤の中の地下水流れ

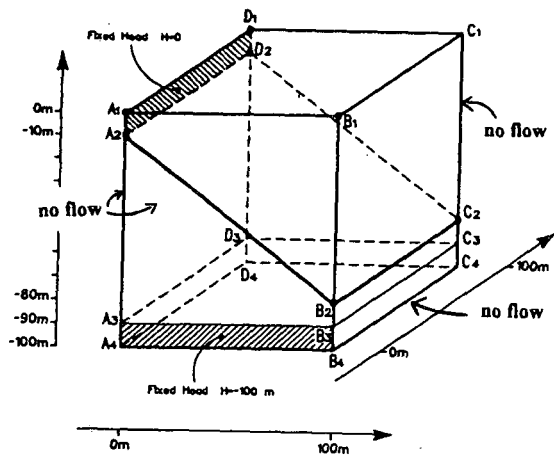


図7 数値解析の事例の説明図

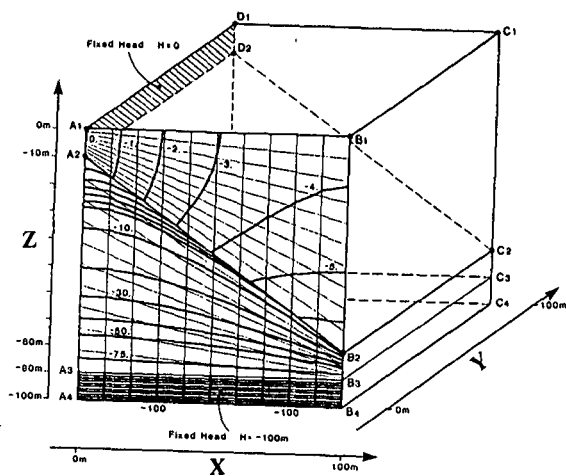


図8 格子構造要素による数値解

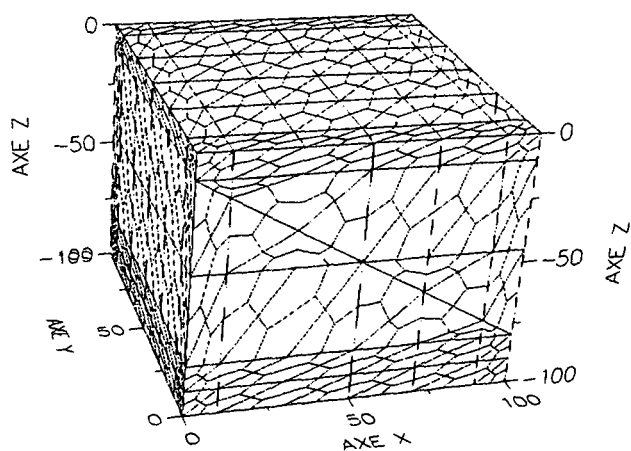


図9-1 六面体有限要素モデル

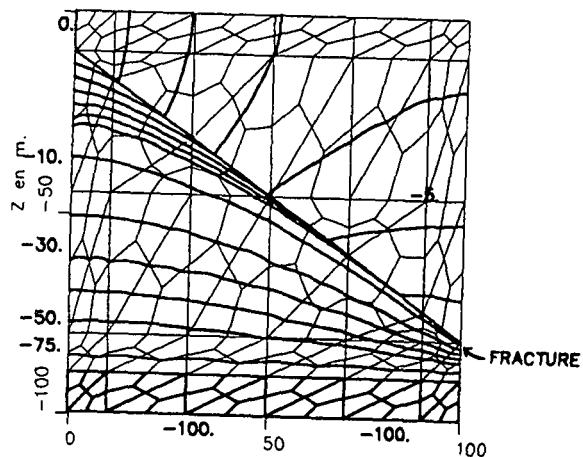


図9-2 非構造有限要素モデルの解

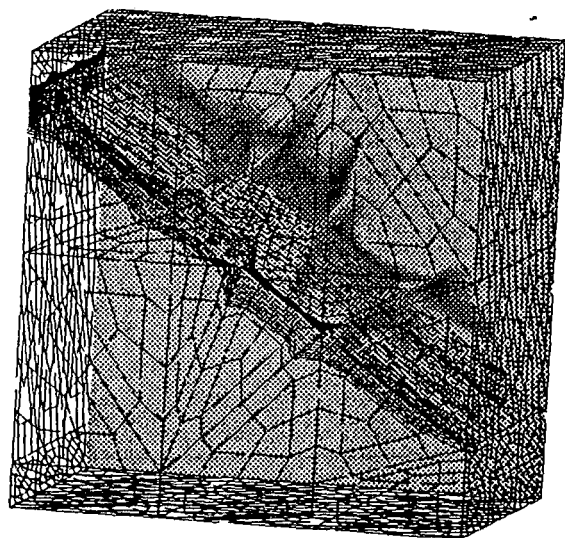


図10-1 方法1による数値解

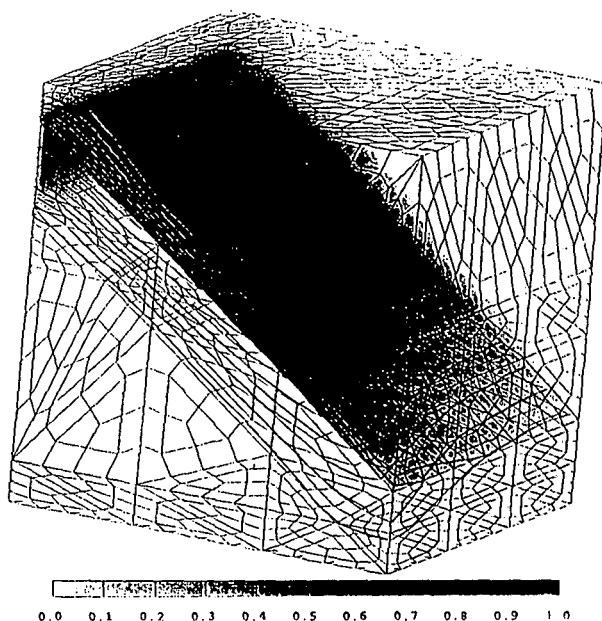


図10-2 方法2による数値解

と物質移動の数値解析であり、近年核廃棄物や化学廃棄物による環境汚染の状況を数値解析法で把握しようとする事例研究である。

対象とする領域は直方体の岩盤であり、その内部には多くの破面が存在する場合が多い。適用事例1は唯一つの破面が存在する簡単な場合である。地下水の主たる流れは岩盤と破面の透水係数の違いにより破面をモデル化した2次元要素を通じて流れるものの、岩盤を多孔物質としてモデル化することにより、地下水の一部は岩盤内にも生じることになる。図7は解析対象系の幾何学条件や境界条件などを示したものである。縦・横・奥行き共に100mの立方体領域内部に傾斜した一つの破面を設定している。同図の左上部斜線部から流入した水が図中に示した斜めの破面を通じて流れ前面の下部の斜線部から流出する現象を解析しようとするものである。なお、ここでは破面の透水係数は岩に比べて1000倍としている。この数値計算例はSauty Cubeとして良く知られたものであり、等ポテンシャルの数値解として図8に示した結果が既に得られている。この図からも分かるように、この数値解は格子構造をもった有限要素モデルを用いた解析結果である。図9-1は上記六面体モデル生成法の中の方法1によって得られた六面体有限要素モデルを、そして図9-2はその数値解を示す。図8と図9-2を比較すると両者の解が良く一致していることが分かり、この結果地下水の流れに関しては方法1で十分良好な解が得られると言える。

一方、この事例における物質移動現象は破面に沿った方向に、そして破面に大体平行に移動しなければならない。しかしながら、図9-1と同様な有限要素モデルを用いて計算すると、図10-1に示しようにある時刻での物質分布が破面からの垂直方向には滑らかでない結果を得た。この図中に示されるメッシュ図と数値解を対比すると、数値解はメッシュに大きく支配されていることがうかがえる。すなわち、破面近傍での数値解は破面から垂直方向への要素厚さに大きく支配されていることに気付く。そこで、破面の上下に破面に平行に2枚の面を追加して部分領域を作成することにより、破面からの垂直方向への六面体要素の厚さを制御できるようにした。その後、方法2により六面体要素を生成し数値実験を行ったが、十分な解の改良を図ることが出来なかった。そこで、領域のx, y, z方向への寸法を全て1/10に、すなわち(10m x 10m x 10m)の立方体領域に縮小して解析したところ、図10-2に示すよ

うな期待していた解を得ることが出来た。以上の数値実験より、メッシュ寸法を小さく出来れば、本研究で示した六面体要素モデルで数値解の改良が出来ると思われる。このことは、今後の電算機性能の向上により大容量計算が可能となれば、本研究で示した六面体要素生成法を用いた有限要素モデルで良好な数値解が得られることが出来ることを示している。

本研究で提案した最も簡単な六面体生成法である方法1の大規模系への適用事例として参考文献8が挙げられる。この数値解析は実際のテストサイトであるスウェーデンのAespoe Test Siteで得られた地下水の流れの観測値と、方法1の六面体有限要素モデルを用いた有限要素解を比較したものである。この数値解析で扱った領域は1km x 1km x 1kmの大規模な岩盤であり、そこには合計21個の破面が存在することが確認されたことより、それら破面を全て導入した3次元領域を扱った事例である。なお、これら21枚の破面と数値解の改良を図るため導入した3枚の面で、合計24枚の面を導入したことより、領域全体は約400の部分領域より構成される複合系である。個々の部分領域を手法1でもって六面体要素分割して有限要素モデルを作り、地下水流れ解析プログラム：ROCKFLOW（本論文の共著者等がハノーバー大学で開発中のプログラム）を用いて、フランス・BRGMのE. FillionとMarie-Luce Noyerが数値解析を行った結果である。計測値と計算結果を比較すると両者は良好な一致を示していると言えよう。なお、物質移動に関しては前例からも明らかなように未だ良好な解は得られない状況にある。

以上の2つの事例から下記の結論を導くことが出来る。

- 1) ここに示した六面体生成法は少なくとも地下水の流れ解析には利用できる方法である。
- 2) 物質移動の数値解析についてはメッシュサイズの問題から、現時点では対象と出来る領域の大きさには制限があり、現在得られる数値解には乱れが見受けられる。今後、更に高性能の計算機が利用できるようになれば、ここに示した六面体要素生成でもって十分に良好な数値解を求めることが期待出来る。

5. あとがき

本研究では近年特に流体解析等の分野で要望の高い六面体有限要素モデルの生成法を4種類提案し、その内の二つの六面体生成法を用いて

破面を有する岩盤の有限要素モデルを作成し、地下水流れと物質移動の現象の数値解析を行い、結果の検討を行った。

ここに示した六面体要素生成法は本研究で扱ったような任意の凸形状をした複合系に対して、完全に、そして自動的にその六面体モデルを生成出来るものであり、破面数の変更や破面位置の変更があっても、容易にその有限要素モデルを生成出来る利点を有している。

本研究で示した計算事例は全てワークステーションで行ったものである。従って、ワークステーションの有する機能（容量と演算速度）を考え、領域内の有限要素数等を決め、それに合ったメッシュ分割を行った。本研究で示した数値実験結果より、提案した六面体有限要素モデルは少なくとも地下水流れ現象を構造格子モデルと同程度の良好な数値解を与えることが判明した。また、本研究で示した物質移動現象の数値実験から下記の重要な結論を得た。有限要素モデルのメッシュ寸法が解の良否を決める重要な要因であり、それを十分に小さく出来る場合にはここに示した有限要素モデルで良好な数値解を与えることができることが判明した。このことは大規模な領域を対象とした物質移動現象の解明にはより大規模なメモリーを有した電算機を利用する必要があることを示している。

本研究で提案した六面体生成法は基本的には汎用的なものであり、例えば対象領域の形状が非凸領域であっても、またその様な非凸部分領域から構成される複合系に対しても利用できる方法である。なぜなら、

(1) 任意3次元領域は少なくとも四面体の集合でその形状を近似できること、

(2) 今日デローニー三角分割といった幾何学的分割法で任意3次元領域を四面体分割する方法が提案されつつあること、より一度対象領域が四面体に分割できれば、ここに示した六面体生成法をそのまま適用して、全領域を六面体有限要素モデルに変更できるからである。なお、部分領域が非凸の場合、その部分領域を凸部分領域の集合に分割した後、本手法を利用すればよい。

参考文献

- 1) Blacker, T. & R.J. Meyers : Seams and Wedges in Plastering; A 3-D Hexahedral Mesh Generation Algorithm, Engineering with Computers, Vol.9, pp.83-93, 1993
- 2) Tautges, T.J. & S.A. Mitchell : Progress Report on the Whisker Weaving All-Hexahedral Meshing Algorithm, Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation, pp.659-670, 1996
- 3) Schneider, R.: Remshing-Algorithmen fuer dreidimensionale Finite-Element-Simulationen von Umformprozessen, Aachener Beitrage zur Informatik, Band 4, 1993
- 4) Tam, T.K.H. & C.G. Armstrong : Finite Element Mesh Control by Integer Programing, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.36, pp.2581-2605, 1993
- 5) Taniguchi, T. & E. Fillion : Numerical experiments for 3-dimensional flow analysis in a fractured rock with porous matrix, Advances in Water Resources, Vol.19, No.2, pp.97-107, 1996
- 6) Bowyer, A. : Computing Dirichlet tessellations, The Computer Journal, Vol.24, No.2, pp.162-166, 1981
- 7) Watson, D. F. : Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes, The Computer Journal, Vol.24, No.2, pp.167-172, 1981
- 8) Fillion, E. & Marie-Luce Noyer : Flow modelling in a dual porosity domain with automatic mesh generation and parameter calibration: application to the Aesoe site, Journal of Hydrology, 1996

(1998年4月24日 受付)