

群積による直方体ソリッド要素の 剛性行列のブロック対角化法

THE BLOCK-DIAGONALIZATION METHOD APPLIED TO THE STIFFNESS MATRIX OF
SOLID FINITE ELEMENTS BY GROUP PRODUCT

有尾 一郎*

*正会員 博士(工学) 広島大学助手 工学部第四類(建設系) (〒739-8527 東広島市鏡山1-4-1)

In the solid elements problem with symmetry, it is a numerical calculation with a large scale FEM that assembles the stiffness matrix of the solid elements analysis. It is taken away this problem, as the method improved analysis efficiency, the block-diagonalization method(BDM) based on "group theory" has come to be utilized to exploit structural analysis of the symmetric finite elements. In this paper, it is expressed the outline of the BDM by the group products of symmetry, applied to high-symmetry of the solid elements using with simple symmetries. By the application of the finite solid elements, this group product is considered very useful method.

Key Words : block-diagonalization method, BDM, group theory, group product, symmetric structures

1. はじめに

ソリッド要素による有限要素解析は、実構造物の設計モデルへの利用という点で汎用性があるが、大規模な構造計算につながる問題を抱えている(例えば 1)~ 4)。最近、岩崎・林⁵⁾による各種の要素部材に適用可能な 8 節点ソリッド要素が開発され良好な解析結果が得られている。しかしながら、一般的に、回転自由度を含まない中実な直方体要素でも 24×24 サイズのフル要素剛性行列を形成してしまい、離散化要素の増加に伴う計算量の増加や計算精度のばらつきが生じるなどの問題がある。これらの問題を解決する一つの方法として、例えば折返し対称性や領域分割法などが用いられてきたが、これはある限られた対称性を利用したものであった。

対称性の記述法としては、対称性を表す群^{6),7)}を用いるのが標準的である。特に、対称な系の支配方程式が、その系の対称群からなる座標変換により、幾つかの独立な方程式に分解できることから対称性の利用法として確立している^{8)~ 16)}。しかしながら、構造工学分野では 3 次元有限要素における対称性の応用には至っていなかった。その理由として、3 次元空間の対称性は高次の対称性を持つので、個々の対称性固有の特性があり、全ての対称性を網羅することが容易ではなかったことにある。

本研究は、Ikeda・Murota¹⁵⁾による $D_\infty \times D_\infty$ 不変系の標準分解定理を用いて、2 次元および 3 次元空間上の要素剛性行列に高次対称性の記述や利用を試みるものである。特に、この論文では低次元の対称性の変換則に着目し、それらから組立てられる高次元の対

称性を記述表現し、各構造部材に対する対称性の適合性および考え方を提案するものである。具体的には、3 次元直方体ソリッド要素における高次元の対称性を基本的な対称変換の組合わせ(群積)を用いて、剛性行列のブロック行列の直交化を図り、その分解法の妥当性と有効性を調べる。構造解析例では高次対称性の仕組みを理解する問題として、対称構造物の構造解析で陥りやすい解析例を取り上げた。このように、群積を利用することは、構造物が持つ対称群の仕組みを理解する上で重要である。

2. 直方体の対称性

この章では、3 次元直方体の幾何学的対称性の対称操作を記述することとする。

直方体の領域

$$\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{R}^3 | -1 \leq (\xi, \eta, \zeta) \leq 1\} \quad (1)$$

を考える。ここに、 ξ, η, ζ は各辺の半分の長さで正規化した変数とする。この領域の定義から、原点 $(0,0,0)$ を含む X, Y, Z 方向の鏡映面とした折返し対称性(鏡映対称性)が存在する。直方体ソリッド要素の対称性を考えるにあたり、低次の対称変換を定義しておく。

2.1 1 次元空間の対称変換

ある 1 点の自由度を ξ 方向のみをとり、対称操作によって及ぼされる変換を考える。最も基本的な 1 次元空間上の対称変換は鏡映変換操作と回転変換操作があり¹⁾、対称操作の位置によって変換が異なる。図-1,2 に

¹⁾ 対称変換の空間と点の自由度の空間は一般に異なる。

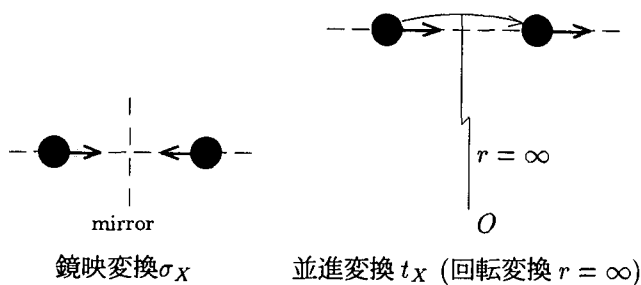


図-1 左右対称性に対する変換元

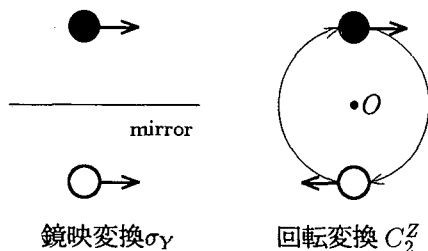


図-2 上下対称性に対する変換元

示されるように、対称操作を点の移動方向と一致する線上と、それとは垂直な位置となる2つの変換を考える。ここでは便宜上、これらを左右対称性に対する変換元と上下対称性に対する変換元と呼ぶこととする。図-2の白丸は上下対称性に対する変換後の点を表す。左右対称性に対する対称操作は

$$\sigma_X : (\xi, \eta) \mapsto (-\xi, \eta), \quad t_X : (\xi, \eta) \mapsto (\xi + \xi_0, \eta) \quad (2)$$

の X 方向に関して鏡映変換となる σ_X と X 方向に平行移動させる t_X が存在する。また、上下対称性に対する対称操作は

$$\sigma_Y : (\xi, \eta) \mapsto (\xi, -\eta), \quad C_2^Z : (\xi, \eta) \mapsto (-\xi, -\eta) \quad (3)$$

の Y 方向に関する鏡映変換 σ_Y と反転変換となる C_2^Z の対称変換が記述できる。左右対称性に対する対称群 G_{1X} は

$$G_{1X} = \langle \sigma_X, t_X \rangle = \{t_X, \sigma_X t_X\}, \quad \sigma_X, t_X \in g \quad (4)$$

によって与えられる。ここに、括弧 $\langle \rangle$ 内は対称操作の群元 g を、 G_i は i 次元空間に対する群をそれぞれ示すものとする。対称操作 $\sigma_X t_X$ は右から左の順序で実行される。 $\sigma_X t_X$ の作用は

$$\sigma_X t_X : \xi \mapsto -(\xi + \xi_0) \quad (5)$$

によって与えられ、 ξ に対して $-2\xi - \xi_0$ の平行移動と等価である。また、同様に上下対称性に対する対称群 G_{1Y}, G_{1Z} はそれぞれ

$$G_{1Y} = \langle \sigma_Y, C_2^Z \rangle = \{C_2^Z, \sigma_Y C_2^Z\}, \quad \sigma_Y, C_2^Z \in g$$

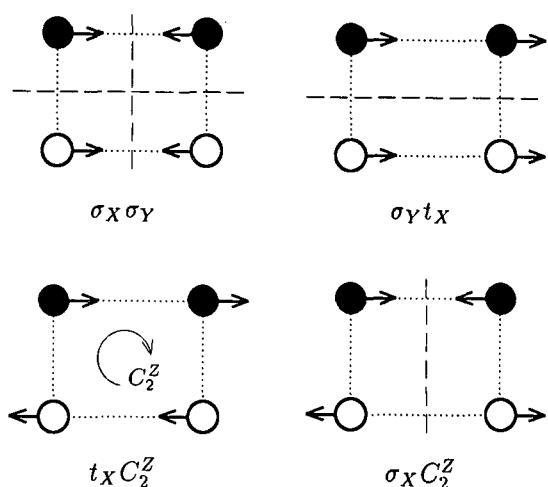


図-3 長方形の対称性

$$G_{1Z} = \langle \sigma_Z, C_2^Y \rangle = \{C_2^Y, \sigma_Z C_2^Y\}, \quad \sigma_Z, C_2^Y \in g \quad (6)$$

と与えられる。

2.2 長方形の対称変換

1 節点 1 自由度の長方形の対称性 G_2 の記述は、例えば、式 (4) と (6) の対称群 G_{1X} と G_{1Y} の群積

$$G_2 = G_{1X} \otimes G_{1Y} \quad (7)$$

によって表現することができる。ここに $\otimes$ は群積の演算子とする。この群積は左右対称性と上下対称性を共有する二面体群 D_2 を持つ。この群は長方形に限らず菱形配置の節点にも適合する対称性を持つ。この群の対称変換は

$$G_2 = \langle \sigma_X, t_X, \sigma_Y, C_2^Z \rangle = \{\sigma_X \sigma_Y, \sigma_Y t_X, t_X C_2^Z, \sigma_X C_2^Z\} \quad (8)$$

からなり、図-3に示されるような4種類の対称性が現れる。このように、この論文では基本的な対称性を組み合わせることにより、高次元の対称性を把握する方法をとる²。

2.3 直方体の対称変換

前節同様に、長方体の対称性 G_3 の記述は、 XY -平面群 G_2 と線群 G_{1Z} の群積

$$G_3 = G_2 \otimes G_{1Z} = G_{1X} \otimes G_{1Y} \otimes G_{1Z} \quad (9)$$

によって表現することができる。この群積は二面体群からなる空間群³を表す。この群は、図-4に示されるよ

² このことは、同一の群下の群元の組み合わせからなる群元もその群の作用下となることを利用したものである (式 (22) を参照)。

³ この群は直方体だけに限定されるのではなく、対称変換が適合する点や要素の配置からなるものであり、点群によって支配される (例えば正8面体もこの群に属する)。

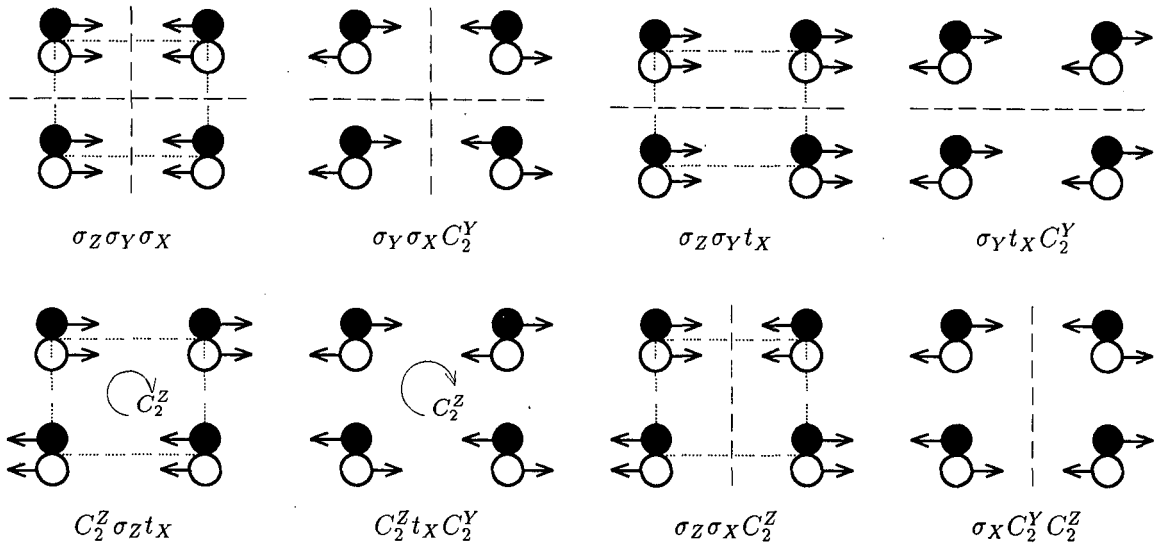


図-4 直方体 (点群) の対称性

うに 8 個の変換の組合わせが存在する。すなわち、直方体に対する対称変換は

$$G_3 = \langle \sigma_X, t_X, \sigma_Y, C_2^Z, \sigma_Z, C_2^Y \rangle$$

$$= \{ \sigma_Z\sigma_Y\sigma_X, \sigma_Y\sigma_XC_2^Y, C_2^Z\sigma_Zt_X, C_2^Zt_XC_2^Y, \sigma_Z\sigma_Yt_X, C_2^Y\sigma_Yt_X, \sigma_Z\sigma_XC_2^Z, \sigma_XC_2^YC_2^Z \} \quad (10)$$

となる。通常、折返し対称性 (例えば 1/4 領域分割法) は変換 $\sigma_Z\sigma_Y\sigma_X, \sigma_Y\sigma_XC_2^Y$ の 2 つ対称変換だけを利用しており、全ての空間の対称性を考えているわけではないことに注意が必要である。また、この群は式 (10) で定義される空間の対称性を持つ要素を指すものであり、直方体はその中の 1 つの要素である。したがって、この直方体がトラスで構成された骨組構造、平板要素で囲まれた中空箱シェル構造および中実のソリッド要素であっても同一の群に属することとなる。

このように群積を利用することは、3 次元要素の対称性の組合わせを理解し、対称群の利用を正確にかつ簡素化できる長所を持つ。

2.4 回転変位に対する対称変換

回転変位に対する対称性は、図-5 に示されるように並進変位の対称変換と異なる。x 軸回りの回転変位 θ_x に対する対称操作は、

$$\begin{aligned} \sigma_X : (\xi, \theta_x) &\mapsto (-\xi, \theta_x), \\ C_2^Z : (\xi, \theta_x) &\mapsto (-\xi, -\theta_x), \\ \sigma_Y : (\eta, \theta_x) &\mapsto (-\eta, -\theta_x), \\ t_Y : (\eta, \theta_x) &\mapsto (\eta + \eta_0, \theta_x) \end{aligned} \quad (11)$$

である。これらの基本的な対称操作の組合わせにより、並進変位と同様に 2, 3 次元の対称変換が表現できることになる。並進変位に対する対称変換と回転変位に対

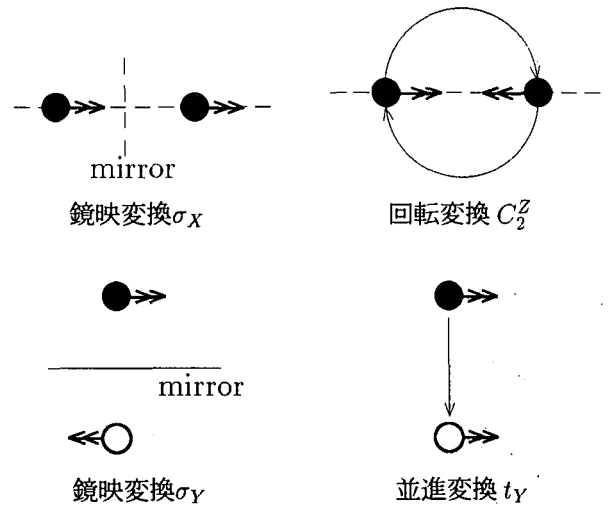


図-5 回転変位に対する変換元

する変換との対応関係は、

$$\begin{aligned} \sigma_X(\xi) &\mapsto \sigma_Y(\theta_x), & t_X(\xi) &\mapsto t_Y(\theta_x) \\ \sigma_Y(\xi) &\mapsto \sigma_X(\theta_x), & C_2^Y(\xi) &\mapsto C_2^Z(\theta_x) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、同一の対称変換を持つ。

2.5 節点列の対称性

線状に分布する節点列の対称性を三角関数の直交性を利用することを試みる。図-6 に示される節点列に対応する変位関数の対称性を考える。両端は固定端とし、黒丸の節点数 n に対応して自由度 n を持ち、このときの変位関数を n 次の正弦波形までを仮定する。この節点列の両端 (白丸) を循環させた位相 $[0, \pi x/L]$ とする

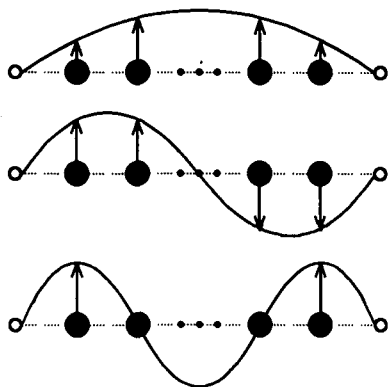


図-6 節点列の正弦波の対称性 ($k = 1, \dots, 3$)

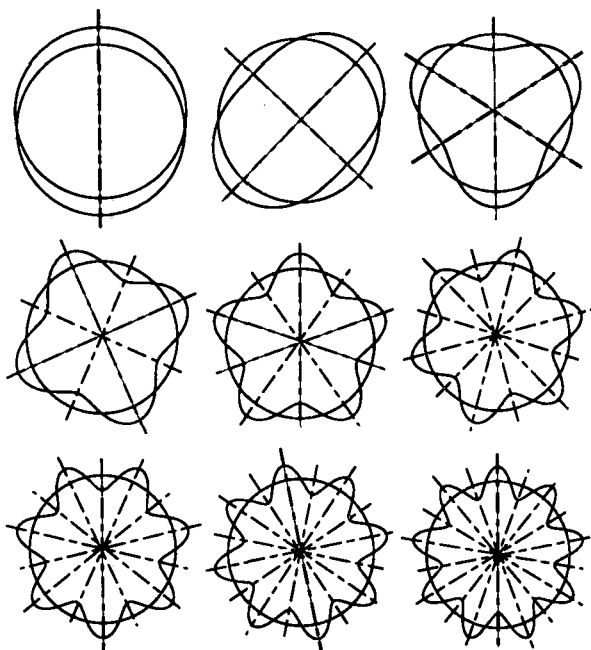


図-7 軌道の対称性 ($k = 1, \dots, 9$)

基準半径 r_0 を持つ極座標系を考える⁴。この座標系上の仮想変位に伴う半径 r を

$$r = r_0 + a_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

の k 次正弦波形として表す。ここに、 a_k はある定数を表す。文献^{17), 18)}に従って、解空間を $0 \leq \theta \leq 2\pi x/L$ に拡張すると図-7に示されるような対称性が出現する。この波形の対称性は n 個存在し、 k 本の軸対称性 D_k を持つ。 k の極限は対称軸が無数個存在する円となり無限群 D_∞ と呼ばれる。 n による個々の波形は三角関数の直交性が利用できる。この関数をもとの線状の節点列 ($j = 1, 2, \dots$) に置き換えると、各点の値は

$$\varphi_{kj} = \sin \left(k \frac{j}{n+1} \pi \right), \quad k, j = 1, \dots, n \quad (14)$$

⁴ このとき節点列は軌道構造を持つことになる

となり。また k 次正弦波の変位関数を

$$N_k(x) = a_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad k = 1, \dots, n \quad (15)$$

と表す。ここに、重み係数 a_k は

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \varphi_{kj}^2}} \quad (16)$$

とノルムで正規化する。この関数は節点列に対するノルムで正規化された k 次正弦波の対称性に対応し、節点列の対称変換を可能とするものである。

2.6 対称変換の自由度

節点の自由度の取扱い方によって対称変換もそれに対応して異なるが、この空間の座標系を各基底ベクトルの線形結合として表すこととする。したがって、これまでの対称変換の自由度を基底ベクトルとして、それらの基底ベクトルを張る空間を考えると。例えば、 X, Y, Z 方向の自由度を持つ直方体の対称変換群は

$$G_3(X, Y, Z) = G_3(X) \oplus G_3(Y) \oplus G_3(Z) \quad (17)$$

X, Y, Z のそれぞれの方向の基底ベクトルの直和で表す。これにより、直方体の変形は X, Y, Z 方向の対称な変形の線形結合として表現できる。

3. 各対称変換の座標変換行列

この章では、群積から得られた対称変換を表現行列に表し、座標変換行列の仕組みを考えると。

3.1 群積による表現行列

空間群 G_3 は 1 次元の対称群 G_1 の群積であり、表現行列の記述法は Ikeda・Murota に準拠するものとする。 $G_3 (\simeq D_2 \otimes D_2 \otimes D_2 \simeq O(3))$ の非同変な既約表現の類を

$$R(G_3) = \{\mu \equiv +, -, 1, 2, \dots\}. \quad (18)$$

とする。ここに、 μ は既約表現を表し、 $+, -$ は 2 種類の 1 次既約表現を、 $1, 2, \dots$ は 2 次以上の既約表現を表す¹⁵⁾。1 次元の 1 次既約表現行列は

$$\begin{aligned} T^{(+)}(t_X) &= 1, & T^{(+)}(\sigma_X) &= 1, \\ T^{(-)}(C_2^Z) &= 1, & T^{(-)}(\sigma_Y) &= -1. \end{aligned} \quad (19)$$

と表される。ここで、 $T^{(\mu)}(\cdot)$ は親要素の作用を表現している表現行列を示す。2 次既約表現に対する表現行列は

$$\begin{aligned} T^{(n)}(t_X) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & T^{(n)}(\sigma_X) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ T^{(n)}(C_2^Z) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & T^{(n)}(\sigma_Y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

$n = 1, 2, \dots$

であり、また指標は

$$\begin{aligned}\chi^{(n)}(t_X) &= 2, & \chi^{(n)}(\sigma_X) &= 0, \\ \chi^{(n)}(C_2^Z) &= -2, & \chi^{(n)}(\sigma_Y) &= 0.\end{aligned}\quad (21)$$

である。

同一の群下の任意の群元の間に $g_i g_j = g_k$ という関係があるとき、これに対応して表現行列の間にも

$$T(g_i)T(g_j) = T(g_k), \quad g_i, g_j, g_k \in G \quad (22)$$

と積表現の関係がある。たとえば、前章の長方形の対称変換の σ_X と σ_Y との間の積表現は

$$T^{(\mu)}(\sigma_X)T^{(\mu)}(\sigma_Y) = T^{(\mu)}(\sigma_X \sigma_Y), \quad \forall \mu \in R(G) \quad (23)$$

と表現できる。

3.2 並進と回転変位の表現行列の対応

本節は文献¹⁶⁾による節点 i の並進変位ベクトル v^i と回転変位ベクトル θ^i に対応する表現行列の関係を述べる。並進変位 v^i と回転変位 θ^i がそれぞれ独立であるので、1 節点 6 自由度の一般化変位の表現行列 $T(g)$ は

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_v(g) & 0 \\ 0 & T_\theta(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G \quad (24)$$

と、並進変位と回転変位の変換に関する表現行列 $T_v(g)$ と $T_\theta(g)$ の直和の形に表せる。回転操作 r は並進変位と回転変位に同じ作用を及ぼすので、両者の表現行列には

$$T_\theta(r) = T_v(r) \quad (25)$$

という関係がある。

ある節点の並進変位ベクトルは鏡映変換 s に対して、図-1,2に示すように変換される。一方、回転変位ベクトルは、図-5のように並進変位方向と逆向きとなっている。これは、並進変位は極性ベクトルであるのに対し、回転変位は軸性ベクトルであるためである。これらの結果をまとめると

$$T_\theta(s) = -T_v(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

という関係が得られる。表現行列 $T_\theta(s)$ と $T_v(s)$ が符号が逆で成分が同じであるという関係が、鏡映変換が並進変位と回転変位に及ぼす作用の違いを表している。これより、既約表現毎の座標変換行列

$$H^\mu = \begin{pmatrix} H_v^\mu & 0 \\ 0 & H_\theta^\mu \end{pmatrix}, \quad \forall \mu \in R(G) \quad (27)$$

が直和の形として表現できる。

4. 対称変換による要素剛性の適用

有限要素の各種部材要素の対称変換を考えるにあたり、その対称性に基づいた座標変換行列を組み立て

る。ここでは、基本的な各種要素剛性に対して適用例を示す。

4.1 トラス要素とはり要素

軸方向のトラス要素剛性の対称性を考えよう。このときの節点間の対称性は図-1に対応する。すなわち、その対称変換操作からもたらされる正規化された座標変換行列は

$$H_t = \{h_v^{(+)}, h_v^{(-)}\} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

となる。これを利用して座標変換すると

$$\tilde{K}_t = H_t^T K_t H_t = \text{diag} \left[\frac{2EA}{\ell}, 0 \right] \quad (29)$$

となり、対称変換によって剛性行列が軸圧縮(引張)方向の剛性成分と、平行移動による剛体変位モードに対応する成分が現れる。

たわみとたわみ角の1 節点 2 自由度を持つはり要素は並進変位と回転変位が共有する空間である。この空間の座標変換行列は式(27)より

$$h_v^\mu \oplus h_\theta^\mu, \quad \forall \mu \in R(D_2) \quad (30)$$

と分解できる。この要素は図-1の回転変位と図-2の並進変位の対称変換に対応する対称性を持つ。既約表現 μ に対する座標変換行列 $h_b^{(+)} = \{h_v^{(+)} \oplus h_\theta^{(+)}\}$, $h_b^{(-)} = \{h_v^{(-)} \oplus h_\theta^{(-)}\}$ は

$$\begin{aligned}H_b &= \{h_b^{(+)}, h_b^{(-)}\} \\ &= \{h_v^{(+)} \oplus h_\theta^{(+)}, h_v^{(-)} \oplus h_\theta^{(-)}\} \\ &= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

と組み立てられる。この変換行列を用いると、 4×4 の密な要素剛性行列 K_b は

$$\begin{aligned}\tilde{K}_b &= H_b^T K_b H_b = \frac{2EI}{\ell^3} \left[\begin{array}{cc|cc} 12 & 6\ell & & \\ 6\ell & 3\ell^2 & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 0 & \ell^2 \end{array} \right] \\ &= \text{diag.} [\tilde{K}_b^{(+)}, \tilde{K}_b^{(-)}] \end{aligned} \quad (32)$$

と既約表現 $(+), (-)$ で直交化される。また、既約表現単位では

$$\tilde{K}_b^\mu = (H_b^\mu)^T K_b H_b^\mu, \quad \mu = (+), (-) \quad (33)$$

と可換である。

4.2 長方形要素の剛性行列の対角化

1 節点 2 自由度の平面矩形要素の対称変換は2つの線群の組合せとして図-3に示したとおりである。この群 D_2 の部分群は $D_2, C_2, D_1 \times 2$ の4つの対称群を持つ。この部分群の内、 D_2, C_2 は1次既約表現に、 D_1 は2次

既約表現にそれぞれ対応する。図-3に示される対称変形モードとなる座標変換行列を組立て、式(33)のように変換すると、密な要素剛性行列は

$$\tilde{K}_r = K_0 \begin{bmatrix} 1 & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & & & \\ & & c_1 & -c_1 & \\ & & -c_1 & c_1 & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & c_2 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

とブロック対角形となる。ここに、 $K_0 = Et/(1-\nu^2)$, $c_1 = (1-\nu)/2$, $c_2 = (3-\nu)/6$ である。

もし、要素の対称性が正方形であれば、さらに対称性の位数があがり、対称群は

$$D_2 \longrightarrow \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_2 \end{Bmatrix}, \quad C_2 \longrightarrow \begin{Bmatrix} C_4 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

と分解される。これに伴って、1次既約表現 μ も

$$(\pm)_{D_2} \longrightarrow \begin{Bmatrix} (+,+)_{D_4} \\ (+,-)_{D_4} \end{Bmatrix}, \quad (-)_{D_2} \longrightarrow \begin{Bmatrix} (-,+)_{D_4} \\ (-,-)_{D_4} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

と表される。ここに、 $(\cdot, \cdot)_n$ は位数 n を持つ既約表現を表す。したがって、群 D_4 の部分群は $D_4, C_4, D_2, C_2, D_1 \times 2$ の6個の部分群が存在する。すなわち、1次既約表現に対する正方形の要素剛性は、さらに

$$\begin{aligned} \text{diag} [\tilde{K}_r^{(+,+)_{D_4}}, \tilde{K}_r^{(+,-)_{D_4}}] &= K_0 \begin{bmatrix} 1+\nu & \\ & 1-\nu \end{bmatrix}, \\ \text{diag} [\tilde{K}_r^{(-,+)_{D_4}}, \tilde{K}_r^{(-,-)_{D_4}}] &= K_0 \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1-\nu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

と分解でき、独立なブロックの個数も増加する。このように、対称性の位数が増加することにより、既約表現の個数も増加し、ブロック行列の細分化が図れる。

内部節点を持つ長方形平面要素の形状関数に節2.5の三角関数を用いて剛性行列のブロック対角化を考える。ここでは境界条件は周辺単純支持とし n 次の正弦波を適用する。式(15)を x, y 方向の形状関数 N_{ij} を

$$N_{ij} = N_i(x) \times N_j(y), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (38)$$

として剛性行列を組立てると、非常にスパースな剛性行列が出現する。これを正弦波の対称性によって行と列を置換すると、4個のブロック対角行列が現れる。例えば、4次までの波数を用いると、図-8に示されるようなブロック対角形が得られる。これによりブロック毎に独立に計算が可能であるので、並列計算にも可能となる。

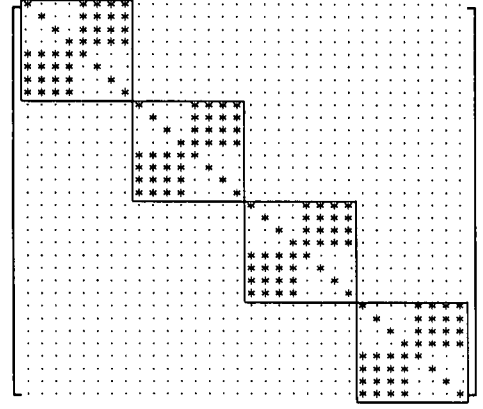


図-8 sine 波を形状関数としたときの剛性行列 ($n = 4$)

5. 3次元ソリッド要素の対角化

5.1 要素剛性行列

8節点並進変位3自由度の計24自由度を持つソリッド要素の要素剛性行列のブロック対角化を、線群の組合わせによる座標変換に着目する。図-4に示したように1節点1自由度であれば、8個の対称変換の組合わせが考えられ、これが3軸方向あるから合計24個の対称変換が存在する。例えば対称変換 $\sigma_Z \sigma_Y \sigma_X$ は

$$h(\sigma_Z \sigma_Y \sigma_X) = \frac{1}{\sqrt{8}} (-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1)^T \quad (39)$$

の列ベクトルによって構成される。このような変換ベクトルは図-9に示されるように24種類が存在する。図中の変換群を既約表現毎に $\mu = (+), (-), (1), (2), (3), (4)$ と分類する。個々の変換群によって、ブロック対角化後のブロックが支配される。これらの変換群を用いて 24×24 サイズの要素剛性行列 K_s を変換すると、図-10に示されるようなソリッド要素に対するブロック対角形が出現する。この変換後の剛性行列は14個のブロックが現われ、個々のブロック間は独立な関係となる。このブロック対角化後の各ブロックは既約表現の次数に応じて

$$\tilde{K}_s = \text{diag} [\tilde{K}_s^{(+)}, \tilde{K}_s^{(-)}, \tilde{K}_s^{(1)}, \tilde{K}_s^{(2)}, \tilde{K}_s^{(3)}, \tilde{K}_s^{(4)}] \quad (40)$$

と分解される。さらに、 $\tilde{K}_s^{(1)}$ は

$$\tilde{K}_s^{(1)} = \text{diag} \left[\begin{bmatrix} c_2 & c_2 \\ c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_2 & c_2 \\ c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_2 & c_2 \\ c_2 & c_2 \end{bmatrix} \right] \quad (41)$$

と同一のブロックが3つに分解できる。このようなブロックは数値計算上特に有利となる。

また、この要素剛性行列のポアソン比を $\nu = 0.3$ としたときのブロック対角後の対角成分の値を図-11の左側に示す。ブロック内の対角成分の値は同一の値を示し、各対称変換に対する変形モードのひずみエネルギー量に相当する。同一の既約表現類に対するブロックの対角成分は同じひずみエネルギーを持ち、ひずみエネルギーに対する内部エネルギーの準位を表す。各

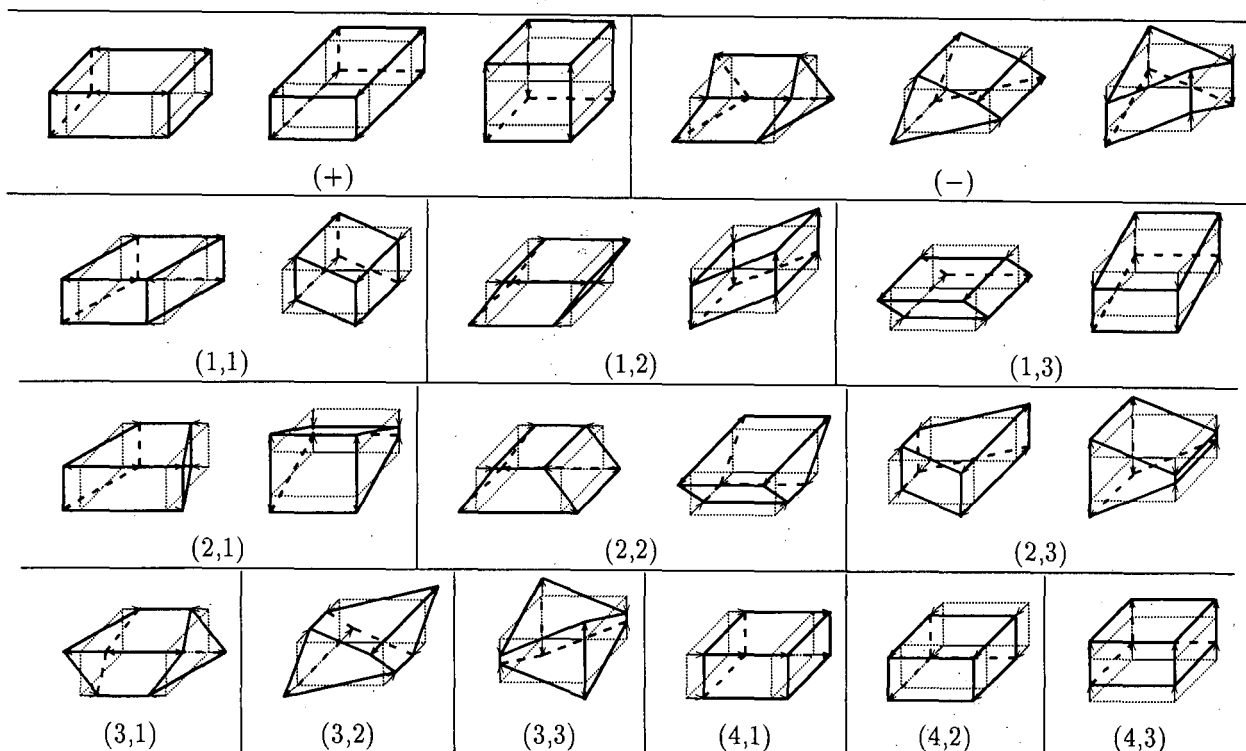


図-9 直方体要素の変換群

$$\tilde{K}_s = K_0$$

$$K_0 = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, c_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, c_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},$$

$$c_3 = (1+c_2)/3, c_4 = c_1/3, c_5 = 2c_2/3, c_6 = c_2/3, c_7 = (1+2c_2)/9$$

図-10 直方体ソリッド要素のブロック対角化

ブロック行列の固有値計算結果を図-11の右側に示す。ブロック分解後、ブロック内の計算だけで幾つかの固有値を正確に求められる。例えば、ブロック $\tilde{K}_s^{(+)}$ は

$$\tilde{K}_s^{(+)} = K_0 \begin{bmatrix} 1 & -c_1 & c_1 \\ -c_1 & 1 & -c_1 \\ c_1 & -c_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

であるが、対角ブロックの直交性を利用しこのブロックに対する固有値は容易に

$$\{(1-c_1)K_0, (1-c_1)K_0, (1+2c_1)K_0\} \quad (43)$$

を得ることができる。この計算法は式 (41) のように多重根を持つ固有値を正確に求められるという利点がある。

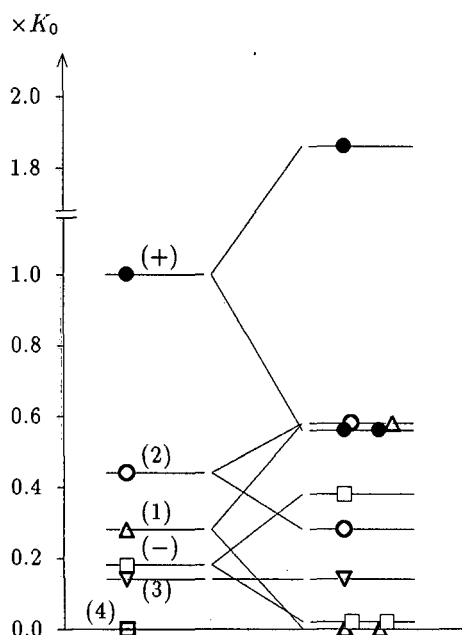


図-11 ひずみエネルギー量と固有値

行列サイズについては、剛体変位モードを除いた有効な行列成分は45成分あり、これは全体の7.8%を占め、その内のブロック $\tilde{K}_s^{(+)}$ は全体の1.6%ほどである。この要素に対する剛性行列の圧縮率および並列化処理による演算効率率は大幅に向上する。このように、直方体ソリッド要素における対称性の利用価値は大きく、従来の剛性行列の所要配列容量および計算時間の大幅な短縮が期待できる。

5.2 構造解析例

前節では直方体要素の対称性を取り上げたが、ここでは要素の組合わせからなる構造全体の対称モデルを考える。通常、場の対称性と外力ベクトルの対称性とが一致するときに解析領域を分割し、切断部の境界条件を適合させて構造解析を行うが、外力ベクトルの対称性が崩れるともはやこの関係は成立しない。本解析例は、8節点ソリッド要素からなる96要素192節点576自由度を持つ対称構造物の対称性を取り上げる。この対称性を満足する境界条件として外郭の隅角部を固定とする。この構造モデルのサイズは外郭寸法を $1.2\text{m} \times 1.2\text{m} \times 0.6\text{m}$ 、内郭寸法を $0.4\text{m} \times 0.4\text{m} \times 0.6\text{m}$ とし、1メッシュ間隔は0.2mに相当する。また、物性諸元を $E = 21000\text{kgf/mm}^2$ 、 $\nu = 0.3$ とし、3次元ソリッド要素による弾性変形解析を行なった。

この構造物の対称性は、要素と節点の配置構造の対称性と境界条件の対称性ならびに外力の対称性に支配されるが、外力の対称性は文献¹⁴⁾より既約表現の線形結合として表現できる。さらに、この構造は外郭の実要素部と内孔部の対称性ならびに境界条件は同一の D_{4h}

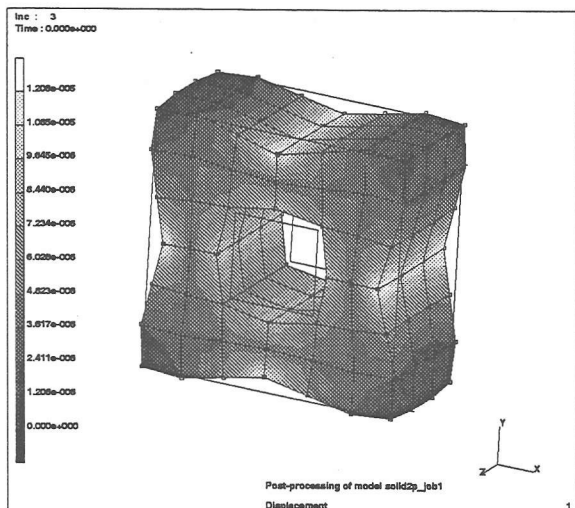
群を保持している。通常、このような構造物の剛性行列は大規模な帯行列を形成するが、文献¹³⁾の軌道概念を用いると直方体ソリッド要素のブロック対角化と同様に14個の独立なブロックに分解できる。例えば、1/4領域分割に可能な D_{4h} 不変な外力ベクトルを作用したときには、その変形状態も当然図-12(a)に示されるように D_{4h} 不変な変形となる。しかしながら、図-12(c)のような D_{2h}^2 不変群に対応する外力ベクトルが作用すると対称性を考慮した領域分割法では系全体の変形挙動をとらえられないが、本手法では既約表現の直交性を利用しているので D_{2h}^2 群のブロックのみから計算が可能である。また、 D_{2h}^2 と D_{2h} 不変群が組み合わせられたような非対称の外力ベクトルが作用するときには、各ブロック単位で計算後図-12(b)と図-12(c)の変形の結合として図-12(d)と求められる。外力ベクトルをこれらの既約表現に分解することにより、所要のブロック計算のみで構造解析が可能となる。

6. 結 論

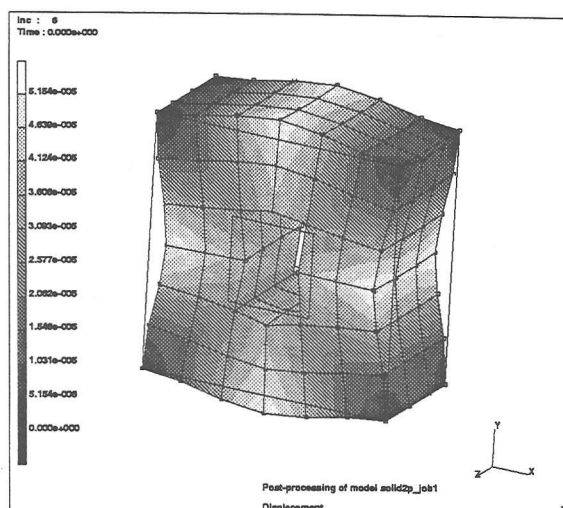
本論文では、平面および空間における部材要素の対称性を、群積という低次元の対称変換を組み合わせを用いることにより、その系に対する対称変換を表現し、その作用に対して可換であることが示された。このことは、空間要素の対称性を記述する上で利用しやすい変換法であり、さらなる対称性の利用法を拓けるものである。

参考文献

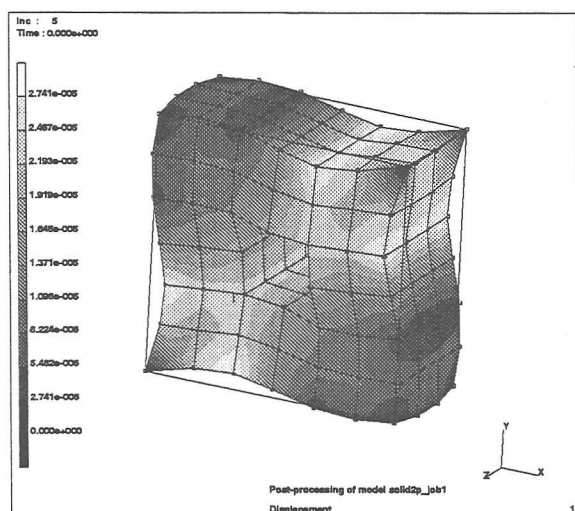
- 1) A.M.Yunus, S.Saigal and R.D.Cook : On improved hybrid finite elements with rotational degrees of freedom, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol.28, pp.785-800, 1989.
- 2) A.Ibrahimbegovic and E.L.Wilson : Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol.31, pp.1393-1414, 1991.
- 3) Z.S.Tian, J.S.Liu, and Fang, B : Stress analyses of solids with rectangular holes by 3-D special hybrid stress elements, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.3, No.2, pp.193-199, 1995.
- 4) K.Y.Sze, A.K.Soh and Y.S.Sim : Solid elements with rotational dofs by explicit hybrid stabilization, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol.39, pp.2987-3005, 1996.
- 5) 岩崎 英治・林 正 : はり部材や板シェル部材に適用可能なソリッド要素の開発, 計算工学講演会論文集 Vol.2, 1997.
- 6) Baumslag, B., and Chandler, B. : Theory and Problems of G-Group Theory, Outline Series in Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1968.
- 7) Kettle, S.F.A. : Symmetry and Structure, John Wiley, Chichester, 1985.
- 8) Van der Waerden, B.L. : Group Theory and Quantum Mechanics, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 214, Springer, 1980.
- 9) Zloković, G. : Group Theory and G-vector Spaces in Vibrations, Stability and Statics of Structures, ICS, Beograd, (In English and Serbo-Croatian), 1973.



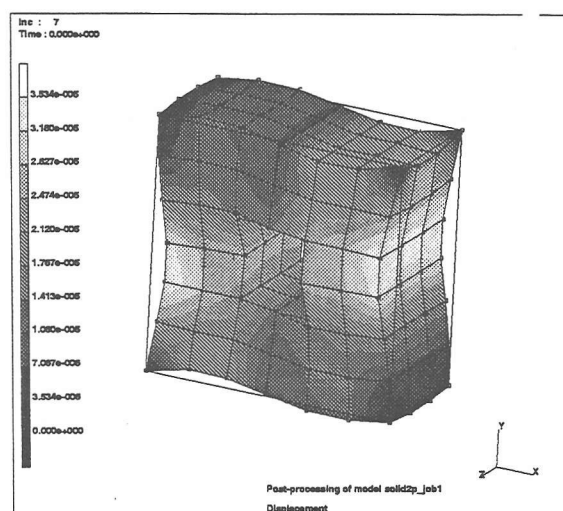
(a) D_4 対称群



(b) D_2 対称群



(c) D_{2h}^2 対称群



(d) 非対称外力による変形

図-12 対称群を利用したソリッド要素の構造解析

- 10) Dinkevich, S. : Finite symmetric systems and their analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 27(10), pp. 1215-1253, 1991.
- 11) Healey, T.J. and Treacy, J.A. : Exact block diagonalization of large eigenvalue problems for structures with symmetry, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, pp.265-285, 1991.
- 12) Murota, K. and Ikeda, K. : Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *SIAM Journal on Statistical and Scientific Computing*, 12(2), pp.273-297, 1991.
- 13) Ikeda, K. and Murota, K. : Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 86(2), pp.215-243, 1991.
- 14) Ikeda, K., Ario, I. and Torii, K. : Block-diagonalization analysis of symmetric plates, *International Journal of Solids and Structures*, 29(22), pp.2779-2793, 1992.
- 15) Ikeda, K., Murota, K. and Nakano, M. : Echelon modes in uniform materials, *International Journal of Solids and Structures*, 31(19), pp.2709-2733, 1994.
- 16) Ario, I., Ikeda, K. and Murota, K. : Block-diagonalization method for symmetric structures with rotational displacements, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE*, No.489/I-27, pp.27-36, 1994.
- 17) Fujii, H. and Yamaguti, M. : Structure of singularities and its numerical realization in nonlinear elasticity, *J. Math. Kyoto Univ.*, 20, pp.498-590, 1980.
- 18) Ikeda, K., Nakazawa, M. and Wachi, S. : Degeneration of bifurcation hierarchy of a rectangular plate due to boundary conditions, *J. Struct. Mech. Earthquake Eng., JSCE*, No.507/I-30, pp.65-75, 1995.

(1998年4月24日 受付)