

## ボクセル被覆による 3 次元ソリッドのメッシュレス解析

## The Meshless Analysis of Solid Structure Using Voxel Cover

鈴木克幸<sup>1)</sup>, 大坪英臣<sup>2)</sup>, 寺田賢二郎<sup>3)</sup>, 関勝載<sup>4)</sup>, 金伝栄<sup>5)</sup> 中西克嘉<sup>6)</sup>Katsuyuki SUZUKI, Hideomi OHTSUBO, Kenjiro TERADA, Seungjae MIN,  
Chuanrong JIN, and Katsuyoshi NAKANISHI

- 1) Ph.D. 東京大学助教授 工学系研究科環境海洋工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)
- 2) 工博 東京大学教授 工学系研究科環境海洋工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)
- 3) 正員 Ph.D. 東北大学講師 工学系研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)
- 4) Ph.D. 東京大学助手 工学系研究科環境海洋工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区 7-3-1)
- 5) Ph.D. 東京大学大学院 工学系研究科環境海洋工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区 7-3-1)
- 6) 東京大学大学院 工学系研究科環境海洋工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区 7-3-1)

The concept of "cover" is employed from manifold method into voxel analysis and applied to 3D solid analysis. The regular square or cubic cover is used and appropriate weight functions, cover function is defined. Also proofs are given on the linear independency of the approximate functions. The accuracy control by changing the degree of polynomials in each cover is carried out.

**Key Words :** Finite Cover Method, Manifold Method, Accuracy control, Meshless Method

## 1 緒言

有限要素法は、CAE の枠内では解析における中心的な役割を担うまでになっているが、現状では解析と設計はそれぞれ独立した業務として成り立っており、統合的な設計業務が行われているとは言い難い。その原因の 1 つとして、解析モデルの生成、なかでも有限要素モデルの生成に莫大な労力を要することが挙げられる。これに対し、近年対象をメッシュ分割することなく解析を行おうというメッシュレス法が注目を集め、多くの研究が行われている<sup>1)</sup>。しかし、現在までこのメッシュレス法を本当にメッシュ生成が困難である 3 次元ソリッドへの適用を試みた例はほとんどない。これは、おもに積分の問題、境界条件の設定の問題、剛性マトリックスのスパース性が少なくなる等の問題があるためであると思われる<sup>2)</sup>。

一方において、3 次元ソリッドのメッシュを容易に生成しようという考え方に基づいたボクセル解析<sup>3)</sup>は、基本的に従来の有限要素解析の考え方をベースにしているため、上記のような問題が生じず、すでに VOXELCON として実用化されている。しかし、モデルをボクセルとしてギザギザの形状で近似するため、精度に関しては多少問題があり、また十分な精度で境界を表現しようとするとも自由度が莫大になってしまう。また、全体を一様なメッシュで分割するため、有限要素法のようにメッシュサイズを部分的に細かくして精度コントロールを行うことができない。

筆者らは、Shi らの Manifold Method<sup>4,5)</sup>に規則的な被覆を

導入することにより、有限被覆法 (FCM)<sup>6)</sup>を提案した。これは、物理領域とは独立に規則正しい数学被覆を定義し、その数学被覆上で多項式を用いて近似関数を定義するという方法で、積分は物理領域に対して正確に行うことにより十分な精度で解析を行えることを示した。また、各被覆における多項式の次数をコントロールすることにより、有限要素法のような精度コントロールも容易に行える。この論文では、この有限被覆法を 3 次元ソリッドに拡張することにより、設計モデルから解析モデルの生成、そしてその解析という一連の流れが非常にスムーズに、しかも高速に行えることを示す。また、この有限被覆法に用いるべき被覆関数、重み関数に関して具体的に示す。

## 2 有限被覆法

## 2.1 Manifold 法

Manifold 法に基づいた有限被覆法の特徴的な考え方とは、図-1 のように「近似関数の定義される数学的な部分領域」と「支配方程式が満たされるべき物理的な部分領域」を別々にとらえることにある。すなわち、物体形状とは無関係に数学的な関数領域である「被覆」を設定できるため、どんなに複雑な形状をしている物体でも規則的な形状の被覆を設定することで解析が可能となる。離散化の概念自体は従来の有限要素法と同様であり、数学的な部分領域である被覆によって変位を離散化した後、支配方程式の弱形式に代入して物体の存在する領域で積分を行う。

しかし、この数学的な被覆は全く任意に配置できるわけ

ではなく、後述するような重み関数の条件を満足する関数が定義できなければならない。また、用いた数学被覆に対して適当な重み関数を見つけることができた場合にも、剛性マトリクスや荷重ベクトルの計算にはその数学被覆と物理領域の共通領域で積分を行う必要があり、任意の数学被覆においてこの積分を行うのは容易ではない。

そのため、数学的には連続体から不連続体まで扱える非常に汎用的な方法であるが、ほとんどの適用例は地盤問題などの不連続体である。

## 2.2 有限被覆法

Manifold 法を鋼構造等の連続体に適用する場合に問題となるのは、以下の2つの点であると思われる。

- ・ どのような数学的な被覆を用いるか
- ・ その被覆上で、どのような関数（重み関数、被覆関数）を用いるか。

有限被覆法では、図-2のように互いに重なり合う正方形（2次元の場合）または立方体（3次元の場合）の被覆を用いて物理領域をおおう。この図では、4つの正方形のブロックが1つの被覆に相当する。3次元の場合は、8つのボクセルが1つの被覆になる。また、任意の物理領域は必ず4つ（2次元の場合）または8つ（3次元の場合）の数学被覆によって覆われることになる。

このような数学被覆を用いるメリットとして、以下のようことが考えられる。

- ・ 被覆の生成が非常に容易に行える。これは、被覆をある意味の「要素」と解釈すれば、領域に対する要素生成が容易に行えるというボクセル解析法のメリットと共通する。これは特に3次元領域において大きなメ

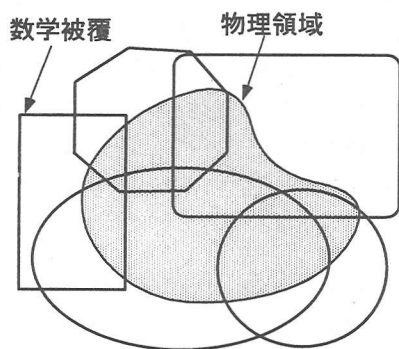


図-1 マニフォールド法における数学被覆と物理被覆

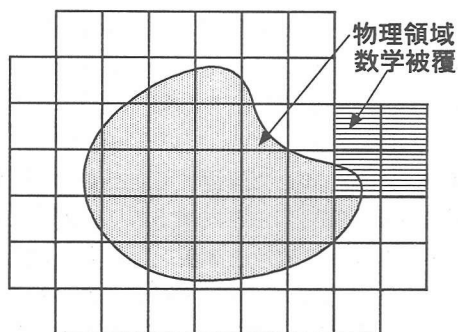


図-2 有限被覆法における物理領域と数学被覆

リットとなる。

- ・ 重み関数を定義することが容易にできる。一般に、任意の数学被覆において後述するような条件を満足する重み関数を定義するのは容易ではないが、ここに述べる規則的な正方形(立方体)の被覆に対しては適当な重み関数を定義することができる。
- ・ 領域の積分を容易に行える。一般に任意形状の領域の積分にはガウス積分等の高精度な積分法を用いることは困難で、領域を細かいセルに分割する必要がある。この数学被覆の場合、被覆を分割したものをそのままセルとして用いることによって積分が容易に行える。

## 2.3 重み関数、被覆関数の定義

それでは、有限被覆法として使うべき具体的な重み関数、被覆関数を考えてみよう。各数学被覆において、変位は以下のように近似される。

$$u(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x) w_i(x) \quad (1)$$

ただし、

$f_i(x)$  : 被覆関数  
 $w_i(x)$  : 重み関数

であり、積分を行う必要のある物理領域は  $k=4$  (2次元の場合) または  $k=8$  (3次元の場合) となる。

重み関数は、 $U_i$  を各数学被覆と物体領域の共通領域（これを物理被覆と呼ぶ）とすると、以下の条件を満足する。

$$\begin{cases} w_i(x) \geq 0 & x \in U_i \\ w_i(x) = 0 & x \notin U_i \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum w_j(x) = 1 \quad (3)$$

(3)式の条件は、すべての重み関数を足し合わせると1となる（逆にいえば、1をいくつかの関数に分解した）という意味で Partition of Unity と呼ばれる。また、被覆関数は基本的に任意に設定できるが、これらの関数は、被覆ごとの被覆関数と重み関数の積がお互いに一次独立性を保つように定義しなければならない。ここでは被覆関数として多項式を用いることとする。

上記の条件を満足する重み関数として、最も簡単なものとして、各座標軸方向に線形関数を用いた双1次関数を用いることができる。図-3は2次元の場合の双1次関数をプロットしたものである。

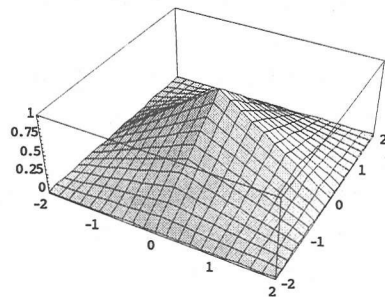


図-3 双1次の重み関数

しかし、このような重み関数を用いることができるのは被覆関数の多項式として0次関数（定数関数）のみを用いる場合だけである。例えば、1次元において以下のような例を考えてみる。

$$w_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x \quad (4)$$

$$f_i(x) = d_{i0} + d_{i1}x \quad (5)$$

この時2つの被覆 $U_i$ 、 $U_{i+1}$ の重なり合った領域での変位の近似関数 $u(x)$ はそれぞれの被覆関数に重み関数をかけた和となり、

$$\begin{aligned} u(x) &= w_i(x)f_i(x) + w_{i+1}(x)f_{i+1}(x) \\ &= g_0(d_{i0}, d_{i+10}) + g_1(d_{i0}, d_{i1}, d_{i+10}, d_{i+11})x \\ &\quad + g_2(d_{i1}, d_{i+11})x^2 \end{aligned} \quad (6)$$

となる。 $u(x)=0$ とすると、 $1, x, x^2$ は一次独立であるから次式が成り立つ。

$$\begin{cases} g_0(d_{i0}, d_{i+10}) = 0 \\ g_1(d_{i0}, d_{i1}, d_{i+10}, d_{i+11}) = 0 \\ g_2(d_{i1}, d_{i+11}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

しかしこれは4元の連立方程式であるから、解は不定である。すなわち、このような場合重みつき被覆変位関数はお互いに一次独立ではない。同様のことが2次元、3次元に対しても言うことができ、1次以上の被覆関数を用いる場合に、被覆の異なる近似関数間での一次独立性を保つためには、重み関数にさらにいくつかの条件を科す必要がある。それでは、被覆関数が複数の互いに1次独立な関数の和で表現されるとき、近似関数の1次独立性が満足されるような重み関数の十分条件を検討してみよう。

#### (1) 重み関数に対する条件 1

被覆 $i$ に対する被覆関数を以下のように定義する。

$$\Phi_i(x) = \sum_{j=0}^{n_i-1} d_{ij}\phi_j(x) \quad (8)$$

ただし、 $\phi_j$ は互いに独立な被覆関数で、 $d_{ij}$ はそれぞれの関数に対する係数である。

定理 1:

重み関数 $w_i$ が次の条件を満たす時、 $w_i\Phi_i$ は $i$ に対して互いに1次独立である。

$$\begin{cases} w_i(x) \geq 0 & x \in U_i \\ w_i(x) = 0 & x \notin U_i \end{cases} \quad (9)$$

$$\sum_i w_i = 1 \quad (10)$$

$$\begin{cases} w_i = 1 \\ w_j = 0, j \neq i \end{cases} \quad \text{at } O_i \quad (11)$$

$$w_j^{(k)} = 0, k = 1, 2, \dots, n_j - 1, \text{ for all } O_i \quad (12)$$

ただし、 $O_i$ は被覆 $U_i$ の中心点（実際は被覆内の任意の点でよいがFCMへの適用を容易にするため、中心点と考える。）上付き添字 $(k)$ は $k$ 階の微分を意味する。

(9)、(10)式は重み関数の一般的な条件である。ここでは1次元で示すが、これを多次元に拡張する際にはそれぞれの次元で独立に関数を定義して、それらを掛け合わせれ

ばよい。

証明:

全領域で

$$u = \sum_i w_i \Phi_i = 0 \quad (13)$$

の場合に、 $w_i\Phi_i$ の $n_j-1$ 階までの微分が $O_i$ で0となることを数学的帰納法で証明すれば、一次独立性は出てくる。

i) 0階の場合

(13)式が成り立つとすると、(11)式より、

$$\Phi_i = 0 \quad \text{at } O_i \quad (14)$$

が成り立つ。

ii)  $\Phi_i$ の $m-1$ 階までの微分が $O_i$ で0であるとする。すなわち、

$$\Phi_i^{(j)} = 0 \quad \text{at } O_i, j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (15)$$

その時、 $m$ 階の微分は(13)式から

$$u^{(m)} = \sum_i \sum_{l=0}^m C_m^l w_i^{(l)} \Phi_i^{(m-l)} = 0 \quad (16)$$

が成り立つ。(11)、(12)式と合わせて、

$$\Phi_i^{(m)} = 0 \quad \text{at } O_i \quad (17)$$

が言える。よって $\Phi_i$ の $n_j-1$ 階までの微分は $O_i$ で0となる。

証明終わり

実は、この意味では普通の有限要素法(FEM)はFCMの特例と見ることもできる。すなわち、FEMにこの一時独立性の問題がないのは、今の条件がすべて満たされているからである。つまり、普通の有限要素法の形状関数を重み関数、被覆関数を定数と考えると、(9)~(11)式の条件は普通の有限要素法の形状関数が満たしている上、被覆関数が0次であるから、(11)式の条件は不要になる。ただし、形状関数の構築は近似関数の完備性のため面倒になってしまう。

以上の条件は非常に一般的であるが、これによって重み関数を構築すると被覆関数の次数が上がるに伴って、重み関数の次数もどんどん上がり、それに伴い近似関数の次数は非常に高くなってしまふ。特に、剛性行列を作る時、積分関数の次数が高すぎると、厳密な積分に必要なサンプリング点の数が急速に増加し、計算時間が増加するのみでなく、高次の近似を行うガウス積分の点や重みをあらかじめ計算しておくのが非常に大変になる。また、被覆関数の次数を変えるたびに重み関数も変化させなければならないのは非常に不便である。そこで、もう一つの十分条件を考え、重み関数の次数が被覆関数の次数と無関係になるように構築することを考える。

#### (2) 重み関数に対する条件 2 ~ 2次の重み関数

前述のように、ここでは別の定義により、被覆関数の次数と無関係に定義できる重み関数を考える。ここでも1次元で述べるが、前述のようにそれぞれの次元の関数を掛け合わせるにより多次元への拡張は容易に行うことが

できる。

すなわち、図 - 4 に示すような、それぞれの数学被覆の中心である  $O_1$  と  $O_2$  の中点  $C$  の左右で異なる、微係数が連続な 2 次関数よりなる重み関数を考える。式であらわすと、以下になる。

$$w_i(x) = \begin{cases} w_{il} & x \leq C \\ w_{ir} & x > C \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

$$w_{1l} = -a(x - O_1)^2 + 1, \quad w_{1r} = a(x - O_2)^2 \quad (19)$$

$$w_{2l} = a(x - O_1)^2, \quad w_{2r} = -a(x - O_2)^2 + 1 \quad (20)$$

ただし、

$$a = 2/(O_2 - O_1)^2$$

この関数は明らかに、(2)、(3) 式の条件を満足する。

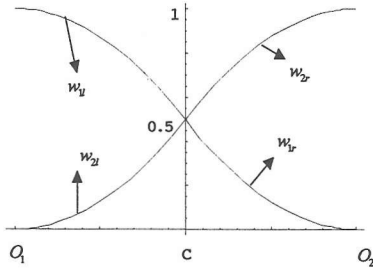


図 - 4 2 次の重み関数

定理 2 :

(18)~(20) 式で定義された重み関数および(8) 式で定義される被覆関数を用いたとき、 $w_i \Phi_i$  は  $i$  に対して互いに 1 次独立である。

証明 :

$O_1$  と  $O_2$  の間で恒等的に

$$u = \Phi_1 w_1 + \Phi_2 w_2 = 0 \quad (21)$$

であるとする。明らかに、その中の 1 点  $C$  でも

$$u^{(k)}(C) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (22)$$

となる。 $k \geq 2$  の時、 $C$  点で、右側と左側から別々に  $k$  階の微分を求めると、

$$u^{(k)}(C) = \sum_{l=0}^2 C_k^l (\Phi_1^{(k-l)} w_{1l}^{(l)} + \Phi_2^{(k-l)} w_{2l}^{(l)}) = 0 \quad (23)$$

$$u^{(k)}(C) = \sum_{l=0}^2 C_k^l (\Phi_1^{(k-l)} w_{1r}^{(l)} + \Phi_2^{(k-l)} w_{2r}^{(l)}) = 0 \quad (24)$$

となる。(22)~(24)式より、

$$\Phi_1^{(k)}(C) = \Phi_2^{(k)}(C), k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (25)$$

つまり、 $O_1$  と  $O_2$  の間で、

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (26)$$

その上、

$$w_1 + w_2 = 1 \quad (27)$$

であるから、 $O_1$  と  $O_2$  の間で、

$$u = \Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad (28)$$

となる。これより、近似関数の 1 次独立性がいえる。

この重み関数を用いれば、被覆関数の次数はいくらあがっても、近似関数が一次独立性を保つ。また、各被覆間において  $\Phi_i$  の次数は独立に定義することができるので、局所的に次数を上げる場合にもこれは成立する。

表 - 1 は各被覆で同じ  $n$  次の被覆関数を定義した場合の各関数の次数を示している。積分すべき関数としては変位の近似関数を 1 回微分したものをひずみとして、エネルギーを積分することになる。例えば、2 次の被覆関数を用いたい場合、(1)の項で示した重み関数を用いると近似関数は 7 次となり、積分するべき多項式はそれらを変位として剛性の形に掛け合わせるので 12 次になっていしまう。また、3 次の被覆関数では 18 次になっていしまう。このような高次のガウス積分のスキームは非常に多くのサンプリング点を要し、その積分点、重みを求めるのも困難である。(2) の項で示した 2 次の重み関数であれば、2 次の被覆関数に対して 6 次、3 次の被覆関数に対して 8 次の関数を積分するスキームを用いればよい。

表 - 1 関数の次数の比較

|          | 被覆関数 | 重み関数   | 近似関数   | 積分関数   |
|----------|------|--------|--------|--------|
| (1)の重み関数 | $n$  | $2n+1$ | $3n+1$ | $6n$   |
| (2)の重み関数 | $n$  | 2      | $n+2$  | $2n+2$ |

そこで、以後重み関数として式(18)で定義した関数を使うことにする。これを、2 次元、3 次元に拡張するにはそれぞれの座標軸方向に対してこの関数を掛け合わせればよい。図 - 5 に 2 次元の場合の 1 枚被覆に対する重み関数を示す。

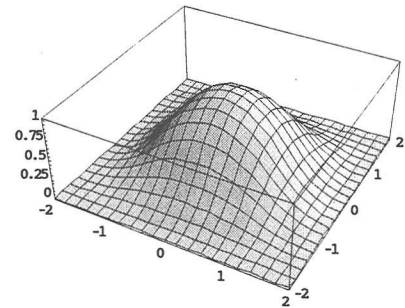


図 - 5 2 次元の重み関数

被覆関数に関しては、FCM では任意の 1 次独立な関数を定義できる。ここでは被覆変位関数として(29)式のように最大 2 次までの完全多項式を用い、多項式のそれぞれの項に独立した自由度を与える。完全多項式であるから、被覆変位関数として 1 次関数、2 次関数を用いる場合には、各被覆は、それぞれ一軸方向あたり 4, 10 個の自由度を持つ

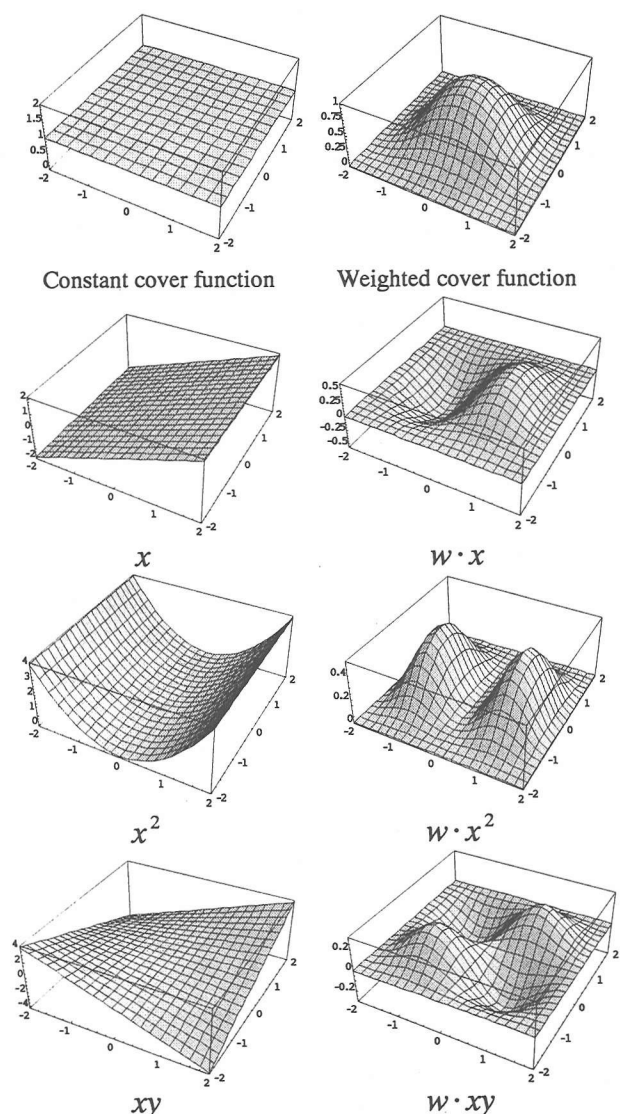


図 - 6 被覆関数と近似関数の例

ことなる図 - 6 にいくつかの被覆関数と、重み関数をかけた近似関数の例を示す。

$$f_i(x, y, z) = a_0 + b_1x + b_2y + b_3z + c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + c_{12}xy + c_{23}yz + c_{31}zx \quad (29)$$

この被覆関数の次数は被覆ごとに変えることができるため、FEM のように高次の近似関数を導入するために内部節点を新たに設けるといった作業は全く必要なく、容易に高次被覆を導入できる利点がある。

## 2.4 剛性マトリクス、荷重ベクトルの計算

次に、このようにして定義された近似関数を変位として使い、Galerkin 法に基づき剛性マトリクス、荷重ベクトルを計算する。FCM においては、ボクセル解析法のように境界をギザギザの形状で近似するのではなく、実際の物理領域で表現し、その領域で積分が行われる。

剛性マトリクスは、物理領域に対して

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (30)$$

と計算することができる。ただし、 $[D]$  は材料定数マトリ

クス、 $[B]$  はひずみの近似を  $\{\varepsilon\}$ 、未知定数を  $\{d\}$  としたとき

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (31)$$

となるマトリクスである。

一般に、有限要素法においてはこの積分にガウス積分が用いられるが、これは積分を行う領域の形状が 2 次元の場合 3 角形や 4 角形、3 次元の場合 4 面体や 6 面体といった比較的単純な領域であるため行うことができるのであり、複雑な形状の領域に対してはガウス積分を行うことは難しい。そこで、境界上の被覆に対してはその被覆をさらに細分化した、実際の領域をよりよく近似したデータをあらかじめ定義しておき、それを用いて積分を行う。たとえば図 - 7 のように 3 次元の被覆（立方体）を  $8 \times 8 \times 8$  に分割し、それぞれの細分化された立方体が物体内部に存在するか外部に存在するかを示すフラッグ（内部なら 1、外部なら 0 の値を持つ）を持たせる。これらは、境界のボクセル要素の詳細な形状を表現するので、「形状ボクセル」と呼ぶ。

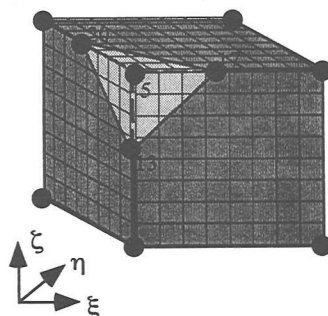


図 - 7 形状ボクセルを用いた積分

この情報を使い、物体内部にある形状ボクセルに対して各形状ボクセルの中央の点で積分すべき関数の値を評価し、以下のように形状ボクセルの体積を重みとしてかけて以下のように和を取る。

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \approx \sum_{in-voxels} [B]^T [D] [B] V_e \quad (32)$$

ただし、 $V_e$  は形状ボクセルの体積である。

境界条件は、図 - 8 に示すように変位拘束、荷重、滑り条件ともに以下のように与える。すなわち、被覆の重なり合う部分（ここでは 1 つのボクセルと解釈できる）に (a) のように変位の拘束条件  $\bar{u}(x)$  が境界  $\Gamma_u$  上にある場合には

$$u(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x) w_i(x) = \bar{u}(x) \text{ on } \Gamma_u \quad (33)$$

の条件が自由度間への線形の拘束として導入される。これは、ペナルティとして容易に実装することができる。

また、(b) のように、境界荷重  $\bar{t}(x)$  が境界  $\Gamma_t$  上にかかっている場合には、以下のように弱形式の積分を行うことにより各自由度に対する等価な荷重にすることができる。

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \int_{\Gamma_i} \left( \sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x}) \right) \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (34)$$

これらを3次元の一般形状に対するプログラムとして実装する場合には、境界条件を前述の形状ボクセルに対して与えるものとする。

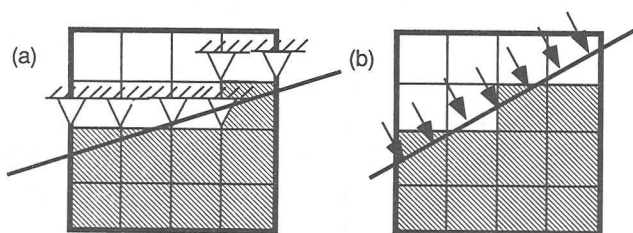


図 - 8 境界条件

連立方程式の解法としては、必要な記憶容量がクリティカルになってくるため、反復法が好ましい。ここでは、対角項を前処理行列として用いた共役勾配法を用いた。

## 2.5 有限被覆法とボクセル解析法

この有限被覆法におけるボクセル被覆と、文献3)や文献6)のボクセル解析法におけるボクセル要素の関係は、図-9のようになる。3次元の互いに重なり合うボクセル被覆は8つのボクセル要素と解釈することができ、ボクセル要素の数と等しいボクセル被覆の数はほぼ同じになる。

有限被覆法において重み関数として1次関数、被覆関数として定数関数を定義した場合には、立方体に対するHEXA要素の形状関数と一致し、文献3)や文献7)のボクセル解析法と同じになる。しかし、ここで定義した2次の重み関数を用いると、従来の有限要素法とは大きく異なってくる。

ボクセル解析法においては全体を一様の要素に分割し、すべての要素に同じ形状関数を用いるため、より詳しく応力状態を知りたい場所により多くの解析自由度を与えるといった精度コントロールができなかったが、有限被覆法を用いると、被覆単位で独立に近似関数を設定することができ、2.3節で示したように関数の1次独立性も保障されるので、容易に精度コントロールを行うことができる。この「被覆」の中央点は、ボクセル解析における「節点」と1対1に対応するため、これは見方を変えれば節点単位で精度をコントロールする方法であると解釈することもできる。すなわち、p法などのアダプティブ法は要素の「辺」に対して精度コントロールを行うため、通常の要素の情報に加え「辺」の情報も必要になるのに比べ、もともとある「節点」単位でアダプティブ法が行えると思われる。

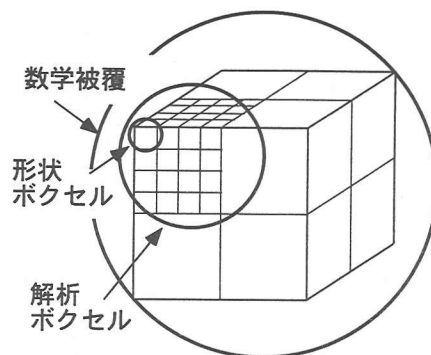


図 - 9 数学被覆と解析ボクセル

## 3 解析例

単位内圧を加えた圧肉球殻の1/8のモデル(図-10)を、ここに述べた、2次の被覆関数までを用いた有限被覆法を用いて解析した。この問題は、解析解があるため、精度の評価を行うことができる。解析ボクセルの分割数は5×5×5、境界上のボクセルに関しては、4×4×4の境界形状ボクセルに分割して解析を行った(図-10)。全部で解析ボ

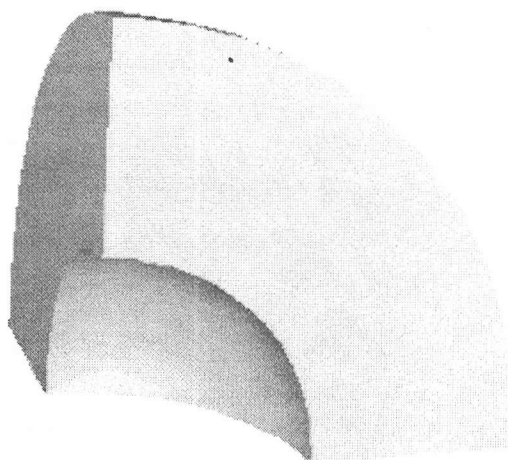


図 - 10 1/8 球モデル

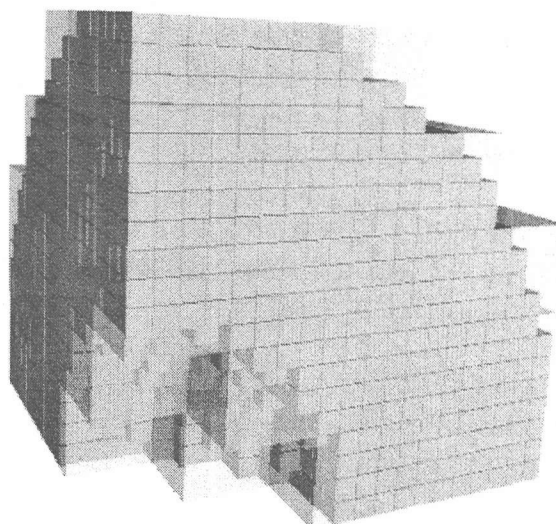


図 - 11 ボクセル被覆



クセル数は 86 となり、被覆数は 168 となった。先述のように、被覆変位関数に完全多項式を用いているため、被覆変位関数が 1 次、2 次の場合、一つの被覆の持つ自由度は一軸方向あたりそれぞれ 4,10 となる。したがって系全体の自由度はそれぞれ 2,016、5,040 となっている。

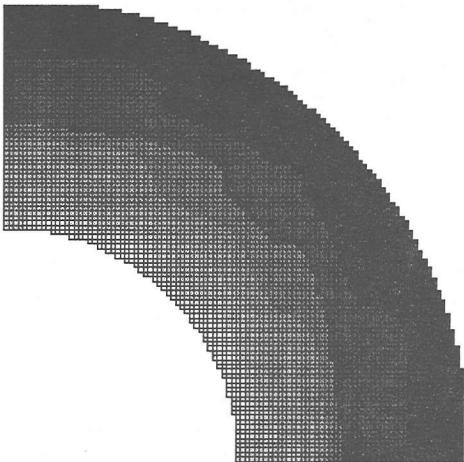
ここでは被覆変位関数として 1 次以上の多項式を用いるため、前述のように異なる被覆の関数間の一次独立性を保つために図 - 5 のような 2 次の重み関数を用いた。

図 - 12 は球殻の中心を通る断面での von Mises 応力の分布である。(a)、(b)はそれぞれ、すべての被覆に被覆変位関数として 1 次と 2 次の完全多項式を設定した場合である。図から、被覆変位関数の次数が上がるにつれて応力の分布が滑らかになっている様子がわかる。

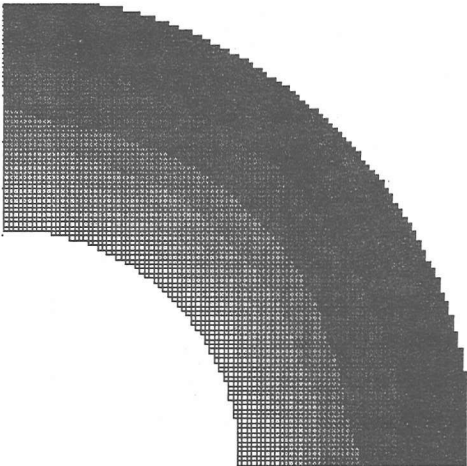
表 - 2 は、von Mises 応力の領域全体での誤差ノルムを比較したものである。やはり二次の場合のほうが解析精度が向上していることが定量的にも確認できる。また、前述のように高次被覆を局所的に配置することも可能であり、図 - 13 のように全被覆数 168 個のうち、球殻の内壁寄りの約半数の 87 個の被覆に 2 次の被覆変位関数を設定し、残りの被覆については 1 次の被覆変位関数を設定したもので、図中球で表している個所が 2 次関数を設定した被覆であ

表 - 2 解析自由度と誤差の比較

|                                                  | Degree of freedom | Error norm |
|--------------------------------------------------|-------------------|------------|
| Linear cover function                            | 2,016             | 0.011253   |
| Combination of Linear & quadratic cover function | 3,528             | 0.0081271  |
| Quadratic Cover function                         | 5,040             | 0.0080297  |



(a) 1 次の被覆関数を用いた場合



(b) 2 次の被覆関数を用いた場合

図 - 12 ミーゼス応力分布

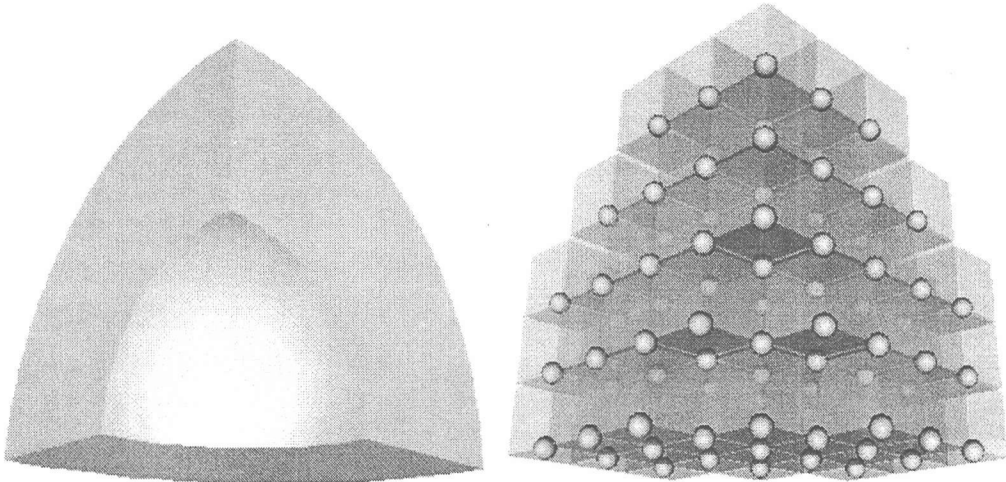


図 - 13 2 次関数の部分的な配置

る。この場合、系全体での自由度は 3,528 となる。このように局所的に高次被覆を設定したモデルで解析した場合の誤差ノルムを、表 - 2 に併せて表示してある。全ての被覆で 2 次の関数を設定した場合とほぼ同程度に解析精度が向上していることがわかる。

#### 4 結論

物理的な領域と近似関数を定義する数学被覆を別個に定義することのできるマニフォールド法に、規則的な正方形(立方体)の互いに重なり合う被覆を導入することでボクセル解析との親和性を図った。重み関数として、一次関数では近似関数の 1 次独立性に問題の生じることを指摘し、関数の一次独立性を保つための数学的な十分条件を示した。より低次の関数で一次独立性を満たす関数として、部分 2 次関数を示した。さらに、3 次元ソリッドに対して、形状ボクセルを用いた剛性マトリクスの積分方法、境界条件の評価方法を示した。

ここに示した有限被覆法は、容易に近似関数の次数を上げることによって精度コントロールを行えることを実例を持って示した。また、近似関数は「被覆毎」に任意に設定することができ、誤差が大きな個所に局所的に高次被覆を設定することで、効率的に高精度の解が得られることを示した。これは解の精度コントロールが行えなかった従来のボクセル解析の問題点を克服するものであり、さらに、計算後の誤差評価の後、高次被覆の再配置を自動化などすることで、ボクセル解析にアダプティブ法的な手法を導入することも可能であろう。

#### 参考文献

- 1) Belytschko, T. et. al.: Meshless Methods: An Overview and Recent Developments, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, pp. 3-47, 1996
- 2) 鈴木克幸: メッシュレス解析法、ボクセル解析法の動向, 第 3 回日本計算工学会講習会, pp 55-62, 1998
- 3) Kikuchi, N. & Diaz, A. 第 13 回 Quint セミナーテキスト、(株)くいんと, 1997
- 4) Shi, G. H. : Manifold Method of Material Analysis, Transactions of the 9<sup>th</sup> Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report No. 92-1. U.S. Army Research Office, 1991
- 5) 大西有三: Manifold 法による岩盤問題への適用性検討, 建設工学における先端計算科学技術の応用に関するワークショップ講演論文集, 先端計算科学技術研究会, 1996 年 7 月
- 6) 大坪英臣, 他: 被覆単位で精度をコントロールするマニフォールド法(FCM)、計算工学講演会論文集 Vol.2 pp399-402, 1997
- 7) 鈴木克幸, 他: 多重ボクセル情報を用いたソリッド構造の解析法、日本造船学会論文集、Vol182, pp595-600, 1997

(1998 年 4 月 24 日受理)