

均質化法による合成はりの解析 Analysis of a Composite Beam by the Homogenization Method

弓削康平*, 菊池 昇**

Kohei YUGE and Noboru KIKUCHI

* 正会員 工博 成蹊大学助教授 工学部機械工学科 (〒180 武蔵野市吉祥寺北町 3)

** Ph Dr. Professor, The University of Michigan, Dept. of Mechanical Eng. and Applied Mech, (Ann Arbor MI48109, USA)

In this paper the homogenization method, which gives homogenized elastic constants of a composite material, is applied to the existing beam theory considering the effects of bending, torsion, compression and tension. Through a numerical example effectiveness of the present algorithm is discussed.

Key Words; Homogenization Method, composite beam, Finite Element Method

1. 序

鉄筋コンクリートに代表される合成はりは、広く実用に供されているが、複雑な構造物において合成はり内部の応力を詳細に評価することは未だに困難な場合が多い。これは、一般にはりを構成する複合材の配置が複雑でこの配置を厳密に反映した有限要素解析を実施するためには大規模な計算機資源が必要なためである。これに対する一策として複合材料の配置が周期的であれば均質化法の適用が考えられる。

周期性を有する変断面からなる一次元部材の均質化された材料定数を求める試みは1967年のSpagnolo¹⁾により行われ、均質化された材料定数が幾何学的な平均値とは異なることが明らかにされた。一般的な3次元複合材料の均質化理論は、1970年代に入りフランスのLions²⁾らにより精力的に研究された。これらの基礎研究結果に基づいた均質化法による複合材の有限要素解析の定式化が1991年にGuedess & Kikuchi³⁾により示されている。さらにこの理論の拡張として、複合材の弾塑性変形の解析理論が寺田^{4),5)}により発表されている。

均質化法によれば、複合材が周期性のあるマイクロストラクチャから構成されており、個々の構成材料の材料定数が分かっているならば、マイクロストラクチャの形状、材料などに制限なく均質化された材料定数を統一的手法で導くことができる。また、全体の変位よりマイクロストラクチャ内部の詳細な応力分布を算定することも可能である。

均質化法による合成はりの解析では、次章以下に詳述するように1) 合成はりを構成するマイクロストラクチャの均質化された材料定数を算定し、2) この結果を用いたはりの解析をはり要素を用いて実施、3) 得られたはりの変位より特定部分の詳細な応力を調べる、という解析手続きを実施する。上述の1)と3)の過程ではマイ

クロストラクチャの基本周期領域のみ要素分割を施せばよい。また2)の過程では一次元要素しか用いない。従って総合的には、全体を細かく3次元の有限要素に分割するのに対して非常に少ない自由度で解析可能である。

合成はりの均質化法による解析アルゴリズムは、既に文献⁶⁾においてBernoulli-Eulerの仮定に基づくはりの曲げ理論、せん断変形を考慮したTimoshenkoはり理論に基づくものが示されている。本研究では曲げのみではなく、軸力、曲げおよびねじりを考慮した合成はりの線形弾性解析アルゴリズムを導く。近年、重要となっている地震時の合成はりの破壊メカニズムなど高度な非線形問題に対する基礎的解析理論としてもここで示す解析アルゴリズムは重要であると考えられる。

以下では、第2章において定式化を示し、第3章では具体的な数値例によってアルゴリズムを検証した後、第4章で結論を導く。

2. 定式化

2.1 はりの変位関数と仮想仕事式

本定式化では合成はりに次の仮定が成立するものとする。

- a) 合成はりは長軸方向に周期性を有し、全体の寸法に対して基本周期領域の長さは小さい。
- b) 断面に垂直な面は曲げ変形後も断面に垂直である。
- c) ねじりによって断面形状は変化しない。

a)は均質化法を適用するための基本的な条件であり、b),c)は、均質な材料からなるはりに対して一般的に用いられる仮定である。

ここでははりの座標系を図-1のようにとる。上述の仮定が成立するとき、はり内部の任意点の変位 $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ は、中立軸上の変位、および剛体変位を除去するために正規

化されたそり関数 ω を用いて次式で表される.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_3) - x_2 \theta(x_3) \\ \tilde{u}_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_3) + x_1 \theta(x_3) \\ \tilde{u}_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_3) - x_1 \frac{\partial u_1(x_3)}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial u_2(x_3)}{\partial x_3} \\ &\quad + \frac{\partial \theta(x_3)}{\partial x_3} \omega(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (1)$$

上式の $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ に関する第2項はねじりによる変位を表す. また, $\tilde{u}_3$ に関する第2項, 第3項は曲げによる変位, 第4項はねじりによる変位を表す. 上式の誘導についてはたとえば7)などに詳しい.

ここでそり関数 ω は断面 Ω 内で

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} - x_1 \right) \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\iint_{\Omega} \omega d\Omega = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

を満たし, さらに境界 Γ 上で接線方向のせん弾応力0より次式を満たす関数である.

$$\left(-\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + x_2 \right) \sin \alpha + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right) \cos \alpha = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (4)$$

上式中 $(\sin \alpha, \cos \alpha)$ は境界 Γ 上の法線ベクトルの方向余弦である. また G は断面内任意点のせん弾弾性係数である. 断面が複数の材料からなる場合は材料により異なる値となる. (2)式に重み関数 v を乗じた後に部分積分し(4)の境界条件を適用すると次の方程式を得る.

$$\int_{\Omega} G \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right) + \frac{\partial v}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} - x_1 \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (5)$$

上式より適当な2次元要素を導入した有限要素解析アルゴリズムを構成し, 断面内のそり関数 ω を算定することが可能である. なお, (2)式は本節冒頭c)の仮定と長軸方向の応力の釣り合いより導かれる.

(1)式よりひずみ成分が次のように計算される.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} = 0, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} = 0 \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \omega \\ \gamma_{13} &= \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right) \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)\end{aligned}\quad (6)$$

上式でひずみが0となる成分を除くとはりの仮想仕事の原理は次式で表される.

$$\iiint_V (\delta \varepsilon_{33} \sigma_{33} + \delta \gamma_{12} \sigma_{12} + \delta \gamma_{23} \sigma_{23}) dV = \int_L (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + m \delta \theta) dL \quad (7)$$

ここに記号 δ は任意の微少量であることを表し, σ は応力, q_1, q_2 は分布荷重, m はねじりモーメントである. また, V ははりの全体の体積, L ははりの長さである.

2.2 変位の漸近展開

前節冒頭で述べたように本アルゴリズムでは合成はりが長軸方向に周期性を有しており, 一周期の長さ全体の大きさに比べ小さいことを仮定している. そこでその基本周期領域を図-2のように取り出し, 図-1で定義した全体座標系 $\mathbf{x}$ とは向きが同じでスケールの異なる座標系 $\mathbf{y}$ を導入する. すなわち両座標系間には

$$\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y} \quad (8)$$

なる関係があり, スケール ε は十分小さい値を取るものとする.

ここで基本周期領域の変位を周期性を利用して以下のように漸近展開する.

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 u_i^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (i=1, 2, 3) \quad (9)$$

$$\theta(x_3) = \theta^0(x_3) + \varepsilon \theta^1(x_3, y_3) + \varepsilon^2 \theta^2(x_3, y_3) + \dots \quad (10)$$

ここに u_i^1, u_i^2 および θ^1, θ^2 はそれぞれ基本周期領域について周期性を有する関数である.

(9)式から, 変位の微分に関する次式の関係が導かれ

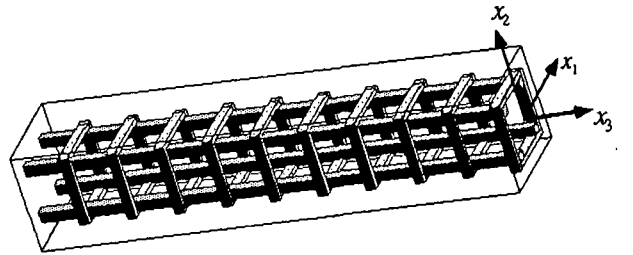


図-1 周期性を有する合成はり

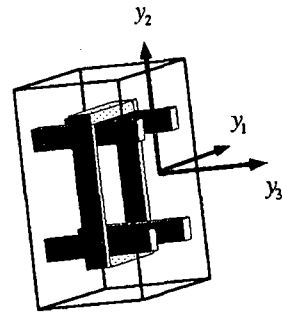


図-2 基本周期領域と座標系

る。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_3} + \left(\varepsilon \frac{\partial u_i^1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_i^1}{\partial x_3} \right) + \left(\varepsilon^2 \frac{\partial u_i^2}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial u_i^2}{\partial y_3} \right) + \dots \quad (11)$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_3^2} + \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial y_3 \partial x_3} \right) + \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial x_3^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial y_3 \partial x_3} \right) + \dots \\ &= \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_3^2} + \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial x_3^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial y_3^2} \right) + \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial y_3^2} \right) + \dots \\ &= \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_3^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial y_3^2} + \varepsilon R_i \end{aligned} \quad (12)$$

上式において最後の項 εR_i は ε の一次以上の項全てを表す。同様な式の展開により(10)式からは次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta^1}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial y_3^2} + \varepsilon R_\theta \quad (13)$$

以上の関係を変位・ひずみ関係式(6)に代入してスケール ε が十分小さいとの仮定より ε に関する一次以上の項を省略すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \omega \\ &= \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} \omega + \\ &\quad \frac{1}{\varepsilon} \left(-x_1 \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial y_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^1}{\partial y_3^2} \omega \right) + \\ &\quad \frac{\partial u_3^1}{\partial y_3} - x_1 \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial y_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 u_2^2}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial y_3^2} \omega \\ \gamma_{13} &= \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right) \\ &= \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta^1}{\partial y_3} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right) \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right) \\ &= \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta^1}{\partial y_3} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

さて上式より任意のスケール ε に対してひずみが有限であるためには $1/\varepsilon$ に関する項が 0、すなわち

$$-x_1 \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial y_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^1}{\partial y_3^2} \omega = 0 \quad (15)$$

が必要であることがわかる。

以下では(15)式が満たされるものとして定式化を続ける。

応力とひずみの関係として

$$\sigma_{33} = E \varepsilon_{33}, \tau_{13} = G \gamma_{13}, \tau_{23} = G \gamma_{23} \quad (16)$$

を仮定すれば、仮想仕事の原理を表した(7)式左辺は次のように書ける。

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\frac{\partial \delta u_3^0}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial^2 \delta u_1^0}{\partial x_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 \delta u_2^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \delta \theta^0}{\partial x_3^2} \omega \right) E \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_3} \right) - x_1 \left(\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial y_3^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - x_2 \left(\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_2^2}{\partial y_3^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial y_3^2} \right) \omega \right\} dV \\ &+ \iint_V \left(\frac{\partial \delta \theta^0}{\partial x_3} \right) G \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta^1}{\partial y_3} \right) dV \\ &\quad \left\{ \left(\frac{\partial \delta u_3^1}{\partial y_3} - x_1 \frac{\partial^2 \delta u_1^2}{\partial y_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 \delta u_2^2}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 \delta \theta^2}{\partial y_3^2} \omega \right) E \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_3} \right) - x_1 \left(\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial y_3^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - x_2 \left(\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_2^2}{\partial y_3^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial y_3^2} \right) \omega \right\} dV \\ &+ \iint_V \left(\frac{\partial \delta \theta^0}{\partial y_3} \right) G \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta^1}{\partial y_3} \right) dV \end{aligned} \quad (17)$$

以上のように仮想仕事式中では y 座標系に関しては y_1, y_2 は用いられず、 y_3 の値のみ用いられる。これは一次元部材に均質化法を適用した場合の特徴である。

上式はさらに基本周期領域の周期性、仮想変位の任意性より次の3式に分けられる。

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\frac{\partial \delta u_3^0}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial^2 \delta u_1^0}{\partial x_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 \delta u_2^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \delta \theta^0}{\partial x_3^2} \omega \right) E \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_3} \right) - x_1 \left(\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial y_3^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - x_2 \left(\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_2^2}{\partial y_3^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial y_3^2} \right) \omega \right\} dV \\ &+ \iint_V \left(\frac{\partial \delta \theta^0}{\partial x_3} \right) G \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta^1}{\partial y_3} \right) dV \\ &= \int_L (q_1 \delta u_1^0 + q_2 \delta u_2^0 + m \delta \theta^0) dL \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\frac{\partial \delta u_3^1}{\partial y_3} - x_1 \frac{\partial^2 \delta u_1^2}{\partial y_3^2} - x_2 \frac{\partial^2 \delta u_2^2}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 \delta \theta^2}{\partial y_3^2} \omega \right) E \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_3} \right) - x_1 \left(\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial y_3^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - x_2 \left(\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_2^2}{\partial y_3^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial y_3^2} \right) \omega \right\} dY = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\iint_Y \left(\left(\frac{\partial \delta \theta^1}{\partial y_3} \right) G \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right) \times \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta^1}{\partial y_3} \right) \right) dY = 0 \quad (20)$$

ここに Y は基本周期領域内部を表す。上式中, (18) は巨視的領域の支配方程式であり, (19), (20) は基本周期領域の支配方程式である。

(19) を満たす u_3^1 として次式を仮定する。

$$u_3^1 = -\chi_{u3}^1 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - \chi_{u3}^2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} - \chi_{u3}^3 \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} - \chi_{u3}^4 \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} \quad (21)$$

$$= -\chi_{u3} \cdot (\partial_x u^0)$$

ここに

$$\chi_{u3} = [\chi_{u3}^1 \quad \chi_{u3}^2 \quad \chi_{u3}^3 \quad \chi_{u3}^4] \quad (22)$$

$$\partial_x u^0 = \left[\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} \quad \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} \quad \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} \quad \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} \right] \quad (23)$$

である。なお, χ_{u3} は支配方程式を変数分離形で解くことを前提に導入された基本領域単位の周期性を有する関数で, 特性関数と呼ばれ, 第1項は中立軸の伸び変形, 第2, 3項は曲げ変形, 第4項はねじり変形に関連する項である。また ∂_x は x 座標系に関する微分演算子である。同様に(19)式中の u_1^2, u_2^2, θ^2 についても, 基本周期単位の周期性を有する特性関数 $\chi_{u1}, \chi_{u2}, \chi_{\theta}$ を導入し,

$$\begin{aligned} u_1^2 &= -\chi_{u1}^1 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - \chi_{u1}^2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} - \chi_{u1}^3 \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} - \chi_{u1}^4 \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} \\ &= -\chi_{u1} \cdot (\partial_x u^0) \\ u_2^2 &= -\chi_{u2}^1 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - \chi_{u2}^2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} - \chi_{u2}^3 \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} - \chi_{u2}^4 \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} \\ &= -\chi_{u2} \cdot (\partial_x u^0) \\ \theta^2 &= -\chi_{\theta}^1 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - \chi_{\theta}^2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} - \chi_{\theta}^3 \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} - \chi_{\theta}^4 \frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} \\ &= -\chi_{\theta} \cdot (\partial_x u^0) \end{aligned} \quad (24)$$

とくと(19)式は

$$\iint_Y \left(\left[\frac{\partial \delta u_3^0}{\partial x_3} \quad \frac{\partial^2 \delta u_3^0}{\partial x_3^2} \quad \frac{\partial^2 \delta u_2^0}{\partial x_3^2} \quad \frac{\partial^2 \delta \theta^0}{\partial x_3^2} \right] \times \begin{pmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ \omega \end{pmatrix} E \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \omega \end{bmatrix} I - \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_{u3}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial^2 \chi_{u1}}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial^2 \chi_{u2}}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial^2 \chi_{\theta}}{\partial y_3^2} \end{pmatrix} \right) (\partial_x u^0) dY = 0 \quad (25)$$

とおける。 I は単位行列である。

ここで次式を満たすよう $\chi_{u3}, \chi_{u1}, \chi_{u2}, \chi_{\theta}$ を定めれば上式は自明となる。

$$\iint_Y \left(\left[\frac{\partial \delta u_3^0}{\partial x_3} \quad \frac{\partial^2 \delta u_3^0}{\partial x_3^2} \quad \frac{\partial^2 \delta u_2^0}{\partial x_3^2} \quad \frac{\partial^2 \delta \theta^0}{\partial x_3^2} \right] \times \begin{pmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ \omega \end{pmatrix} E \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \omega \end{bmatrix} I - \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_{u3}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial^2 \chi_{u1}}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial^2 \chi_{u2}}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial^2 \chi_{\theta}}{\partial y_3^2} \end{pmatrix} \right) dY = 0 \quad (26)$$

次にもう一つの基本周期領域に対する支配方程式(20)式について考察する。(20)式を満たす関数として, 基本領域に対して周期的な関数 χ_4^1 を導入し, θ^1 を次式で仮定する。

$$\theta^1 = -\chi_4^1 \frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} \quad (27)$$

上式を代入すると(20)式は

$$\iint_Y \left(\left(\frac{\partial \delta \theta^1}{\partial x_3} \right) G \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right) \times \left(1 - \frac{\partial \chi_4^1}{\partial y_3} \right) \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} \right) \right) dY = 0 \quad (28)$$

となり, 次式を満たすよう χ_4^1 を定めれば上式は自明となる。

$$\iint_Y \left(\left(\frac{\partial \delta \theta^1}{\partial x_3} \right) G \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right) \times \left(1 - \frac{\partial \chi_4^1}{\partial y_3} \right) \right) dY = 0 \quad (29)$$

(26)式と(29)式は微視的な支配方程式を弱形式で表したものである。以下ではこれらの式を有限要素法で解くための具体的なアルゴリズムについて説明する。まず, 基本周期領域を長軸方向に一次元の有限要素に分割する。(26), (29)式中の未知数のうち, χ_{u3}, χ_4^1 は一階微分, 他の未知数は二階微分が支配方程式に表れているため, 前二者は一次の形状関数をまた, それ以外の特性関数には三次の形状関数を用いることにする。すなわち, (26)式中の χ_{u3}^1 を一次の形状関数を用いて次式で表す。

$$\chi_{u3}^1 = \left(1 - \frac{y_3}{l} \right) (\chi_{u3}^1)_1 + \frac{y_3}{l} (\chi_{u3}^1)_2 = N_L \begin{bmatrix} (\chi_{u3}^1)_1 \\ (\chi_{u3}^1)_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

ここに l は y 座標系で表された要素長さ, y_3 は要素内の

任意点の座標である($0 \leq y_3 \leq l$). また, $(\chi_{u3}^1)_1, (\chi_{u3}^1)_2$ はそれぞれ要素両端の2節点の χ_{u3}^1 の値である. 上式より次式が導かれる.

$$\frac{\partial \chi_{u3}^1}{\partial y_3} = -\frac{1}{l}(\chi_{u3}^1)_1 + \frac{1}{l}(\chi_{u3}^1)_2 = N_L' \begin{bmatrix} (\chi_{u3}^1)_1 \\ (\chi_{u3}^1)_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

同様に

$$\frac{\partial \chi_4^1}{\partial y_3} = N_L' \begin{bmatrix} (\chi_4^1)_1 \\ (\chi_4^1)_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

一方, 3次の形状関数を用いて χ_{u1}^i を次式で表すことにする.

$$\begin{aligned} \chi_{u1}^i &= \left(1 - \frac{3y_3^2}{l^2} + \frac{2y_3^3}{l^3}\right)(\chi_{u1}^i)_1 + \left(\frac{3y_3^2}{l^2} - \frac{2y_3^3}{l^3}\right)(\chi_{u1}^i)_2 \\ &\quad + \left(y_3 - \frac{2y_3^2}{l} + \frac{y_3^3}{l^2}\right)(\chi_{u1}^i)_1' + \left(-\frac{y_3^2}{l} + \frac{y_3^3}{l^2}\right)(\chi_{u1}^i)_2' \\ &= N_H \begin{bmatrix} (\chi_{u1}^i)_1 \\ (\chi_{u1}^i)_2 \\ (\chi_{u1}^i)_1' \\ (\chi_{u1}^i)_2' \end{bmatrix} \quad (i=1 \sim 4) \end{aligned} \quad (33)$$

よってその二階微分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi_{u1}^i}{\partial y_3^2} &= \left[-\frac{6}{l^2} + \frac{12y_3}{l^3}\right] \begin{bmatrix} (\chi_{u1}^i)_1 \\ (\chi_{u1}^i)_2 \end{bmatrix} - \frac{4}{l} + \frac{6y_3}{l^2} \begin{bmatrix} (\chi_{u1}^i)_1' \\ (\chi_{u1}^i)_2' \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} (\chi_{u1}^i)_1 \\ (\chi_{u1}^i)_2 \\ (\chi_{u1}^i)_1' \\ (\chi_{u1}^i)_2' \end{bmatrix} = N_H'' \begin{bmatrix} (\chi_{u1}^i)_1 \\ (\chi_{u1}^i)_2 \\ (\chi_{u1}^i)_1' \\ (\chi_{u1}^i)_2' \end{bmatrix} \quad (i=1 \sim 4) \end{aligned} \quad (34)$$

同様に特性関数 $\chi_{u2}^i, \chi_\theta^i$ についても

$$\frac{\partial^2 \chi_{u2}^i}{\partial y_3^2} = N_H'' \begin{bmatrix} (\chi_{u2}^i)_1 \\ (\chi_{u2}^i)_2 \\ (\chi_{u2}^i)_1' \\ (\chi_{u2}^i)_2' \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \chi_\theta^i}{\partial y_3^2} = N_H'' \begin{bmatrix} (\chi_\theta^i)_1 \\ (\chi_\theta^i)_2 \\ (\chi_\theta^i)_1' \\ (\chi_\theta^i)_2' \end{bmatrix} \quad (i=1 \sim 4) \quad (35)$$

と表すことにすれば次式の行列表示を得る.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_{u3}}{\partial y_3} & \frac{\partial^2 \chi_{u1}}{\partial y_3^2} & \frac{\partial^2 \chi_{u2}}{\partial y_3^2} & \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial y_3^2} \end{bmatrix}' = \partial N \chi \quad (36)$$

ここに

$$\partial N = \begin{bmatrix} N_L' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_H'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_H'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_H'' \end{bmatrix} \quad (37)$$

および

$$\begin{aligned} \chi &= [\chi^1 \quad \chi^2 \quad \chi^3 \quad \chi^4] \\ \chi^i &= \begin{bmatrix} (\chi_{u3}^i)_1 & (\chi_{u3}^i)_2 & (\chi_{u1}^i)_1 & (\chi_{u1}^i)_2 \\ (\chi_{u1}^i)_1' & (\chi_{u1}^i)_2' & (\chi_{u2}^i)_1 & (\chi_{u2}^i)_2 \\ (\chi_{u2}^i)_1' & (\chi_{u2}^i)_2' & (\chi_\theta^i)_1 & (\chi_\theta^i)_2 \\ (\chi_\theta^i)_1' & (\chi_\theta^i)_2' \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (38)$$

である.

(36)式を(25)式に代入し, さらに仮想変位の任意性より, 特性関数に関する次の方程式を得る.

$$\sum_{\text{elements}} \iint_{Y_i} \partial N' \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ \omega \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \omega \end{bmatrix} (I - \partial N \chi) dY = 0 \quad (39)$$

ここに $\sum_{\text{element}}$ は通常の有限要素解析における全体剛性方程式の組立演算を表す. また, 積分は要素内体積積分を表す.

続いてもうひとつの基本周期領域の支配方程式である(27)式より, χ_4^i に関して次の方程式を得る.

$$\sum_{\text{elements}} \iint_{Y_i} \left(N_L' G \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right) \times \left(1 - N_L' \begin{bmatrix} (\chi_4^i)_1 \\ (\chi_4^i)_2 \end{bmatrix} \right) \right) dY_i = 0 \quad (40)$$

以上の微視的領域に関する方程式(39),(40)を周期境界条件の下に解いて得られた特性関数は次節以降に示すように, 巨視的領域の支配方程式を解くための均質化された材料定数を求めること, および巨視的な変位から, 基本周期領域内の応力を算定するのに用いられる.

2.3 巨視的領域の支配方程式の解法

(39),(40)によって特性関数が全て定まると巨視的な支配方程式(18)は

$$\iint_V (\partial_s \delta u^0)' \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ \omega \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \omega \end{bmatrix} I - \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_{u3}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial^2 \chi_{u1}}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial^2 \chi_{u2}}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial y_3^2} \end{bmatrix} (\partial_s u^0) dV$$

$$+ \iiint_V \left(\left(\frac{\partial \delta \theta^0}{\partial x_3} \right) G \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right) \times \left(1 - \frac{\partial \chi_4^1}{\partial y_3} \right) \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} \right) \right) dV = \quad (41)$$

$$\int_L (q_1 \delta u_1^0 + q_2 \delta u_2^0 + m \delta \theta^0) dL$$

と表される。ここで基本領域の長軸方向長さが十分に小さく、かつ軸方向に周期性を有していることより上式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \int_L (\partial_x \delta u^0)^T E^H (\partial_x u^0) dL + \int_L \left(\frac{\partial \delta \theta^0}{\partial x_3} \right) G^H \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} \right) dL \\ & = \int_L (q_1 \delta u_1^0 + q_2 \delta u_2^0 + m \delta \theta^0) dL \end{aligned} \quad (42)$$

積分ははりの長軸方向の線積分を表す。ここに $\partial_x u^0$ は(23)式で定義した x 座標系に関する関数である。また、 $E^H G^H$ は均質化された断面の材料定数であり、それぞれ次式で定義される。

$$E^H = \frac{1}{l_y} \iiint_Y \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ \omega \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \omega \end{bmatrix} I - \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_{u3}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial^2 \chi_{u1}}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial^2 \chi_{u2}}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial^2 \chi_{\theta}}{\partial y_3^2} \end{bmatrix} dY \quad (43)$$

$$G^H = \frac{1}{l_y} \iiint_Y G \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right) \left(1 - \frac{\partial \chi_4^1}{\partial y_3} \right) dY \quad (44)$$

上式中、 l_y は基本周期領域の長軸方向の長さ、積分は基本領域内の体積積分を表す。なお、(42)式の導出にあたっては周期性のある関数の積分公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(x, x/\varepsilon) dx = \frac{1}{|Y|} \iint_{\Omega Y} \Phi(x, x/\varepsilon) dy dx \quad (45)$$

を利用した。

(42)式を有限要素解析により解けば、巨視的な変位を得ることができる。すなわち、解析対象となる合成はり(巨視的領域)をはり要素に分割して、 u_3^0 を一次の変位関数で、また、 u_1^0, u_2^0, θ^0 は3次の変位関数で表す。節点自由度として $u_3^0, u_1^0, \partial u_1^0 / \partial x_3, u_2^0, \partial u_2^0 / \partial x_3, \theta^0, \partial \theta^0 / \partial x_3$ の7自由度を与えるものとする。要素自由度は次の14自由度となる。

$$(u^0)_E = \begin{bmatrix} (u_3^0)_1 & (u_3^0)_2 & (u_1^0)_1 & (u_1^0)_2 & \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} \right)_1 & \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} \right)_2 & (u_2^0)_1 \end{bmatrix}$$

$$(u_2^0)_2 \quad \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x_3} \right)_1 \quad \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x_3} \right)_2 \quad (\theta^0)_1 \quad (\theta^0)_2 \quad \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} \right)_1 \quad \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} \right)_2 \quad (46)$$

上式中、 $(\cdot)_1, (\cdot)_2$ は要素両端に位置する節点1, 2の値であることを表す。

要素自由度と要素内任意点の(23)式で定義される $\partial_x u^0$ の間には、形状関数を適当に微分することにより以下の線形関係を導くことができる。

$$\partial_x u^0 = B(u^0)_E \quad (47)$$

上式を巨視的領域の支配方程式(42)に代入することにより次式を得る。

$$\sum_{\text{element}} \int_L B^T \begin{bmatrix} E^H & 0 \\ 0 & G^H \end{bmatrix} B(u^0)_E dL = \sum_{\text{element}} \int_L \begin{bmatrix} N_L^T q_1 \\ N_H^T q_2 \\ 0 \\ N_H^T m \end{bmatrix} dL \quad (48)$$

ここに N_L, N_H はそれぞれ(30)と(33)で定義される(ただしここでは x 座標系)一次および三次の関数である。

2.4 立体骨組み解析

前項までの式の展開では、巨視的な部材座標系の向きが全体座標系の向きと一致することを前提としていたが、立体骨組みの場合は部材の方向によって、座標変換が必要となる(図-3)。

いま立体骨組みの要素座標系 x と全体座標系 X の間の関係が

$$x_i = \alpha_{ij} X_j \quad (49)$$

で表されるなら、並進変位および回転座標系の座標変換は

$$u_i = \alpha_{ij} U_j \quad (50)$$

$$\theta_i = \alpha_{ij} \Theta_j \quad (51)$$

となる。本定式化でははりのねじり率 $\partial \theta_3 / \partial x_3$ が必要であるが、回転率に関する座標変換は

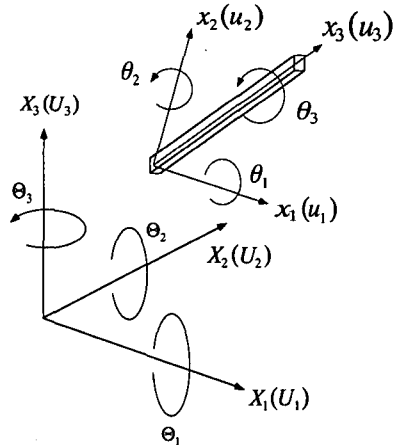


図-3 局所座標系と全体座標系

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\alpha_{ik} \Theta_k)}{\partial X_m} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} = \alpha_{ik} \alpha_{jm} \frac{\partial \Theta_k}{\partial X_m} \quad (52)$$

であるから、節点自由度として

$$(U_1, U_1, U_1, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3,$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial X_1}, \frac{\partial \Theta_1}{\partial X_2}, \frac{\partial \Theta_1}{\partial X_3}, \frac{\partial \Theta_2}{\partial X_1}, \frac{\partial \Theta_2}{\partial X_2}, \frac{\partial \Theta_2}{\partial X_3}, \frac{\partial \Theta_3}{\partial X_1}, \frac{\partial \Theta_3}{\partial X_2}, \frac{\partial \Theta_3}{\partial X_3}) \quad (53)$$

の15自由度を与えるのが一般的であろう。一要素が2節点で構成されるから要素変位自由度数は30となる。この全体座標系表示で与えられる要素自由度を $(U^0)_E$ とする。 $(U^0)_E$ と要素座標系の自由度 $(u^0)_E$ の間には(50), (51)式の関係および $\theta_1 = -\partial u_2 / \partial x_3$, $\theta_2 = \partial u_1 / \partial x_3$ より

$$(u^0)_E = R(U^0)_E \quad (54)$$

なる線形関係を導くことができる。この関係を(48)式に代入することにより立体骨組み構造に対する支配方程式

$$\sum_{\text{element}} \int_L R^T B^T \begin{bmatrix} E^H & 0 \\ 0 & G^H \end{bmatrix} B R (U^0)_E dL = \sum_{\text{element}} \int_L R^T \begin{bmatrix} N_L' q_1 \\ N_H' q_2 \\ 0 \\ N_H' m \end{bmatrix} dL \quad (55)$$

を得る。

なお、節点自由度を増加させた結果、零剛性となる回転自由度が生じるが、これには、解が不定とならないようにごく微少な仮想剛性を付加することとする。

2.5 基本周期領域内部の応力

巨視的な変位が得られると基本周期領域内任意点の応力は(6)および(16)式より次式で与えられる。

$$\sigma_{33} = E \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_3} = E \left(\left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_3} \right) - x_1 \left(\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial y_3^2} \right) - x_2 \left(\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial y_3^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta^0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \theta^1}{\partial y_3^2} \right) \omega \right) \\ = E \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \omega \end{bmatrix} (I - \partial N \chi) \cdot (\partial_x u^0) \quad (56)$$

$$\sigma_{13} = G \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right) = G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right) \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta^1}{\partial y_3} \right) \\ = G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - x_2 \right) \left(1 - \frac{\partial \chi_1^1}{\partial y_3} \right) \frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} \quad (57)$$

$$\sigma_{23} = G \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right) = G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right) \left(\frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta^1}{\partial y_3} \right)$$

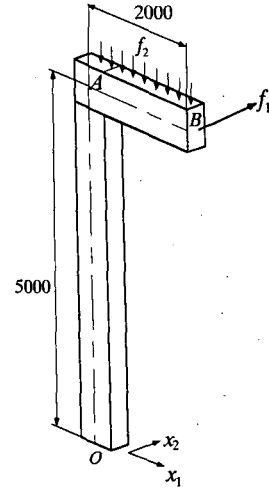


図-4 鉄筋コンクリート肘型はり (巨視的構造)

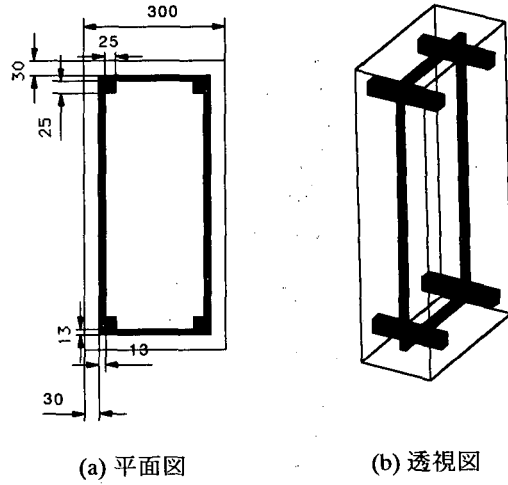


図-5 肘型はりの基本周期領域(ケース 1)

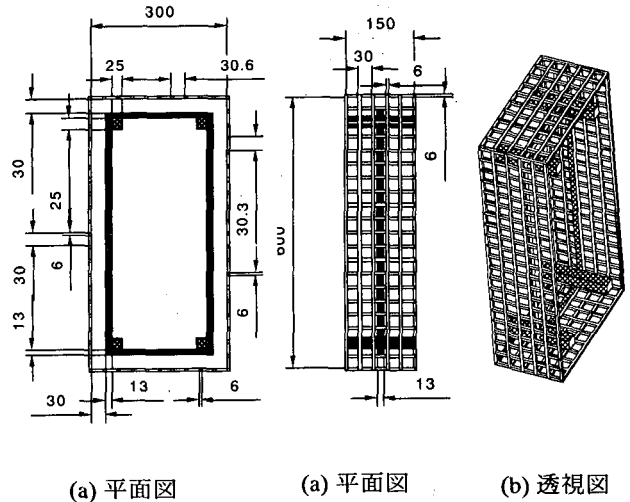


図-6 肘型はりの基本周期領域(ケース 2)

$$= G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + x_1 \right) \left(1 - \frac{\partial \chi_4^1}{\partial y_3} \right) \frac{\partial \theta^0}{\partial x_3} \quad (58)$$

以上のように巨視的な領域に対する解析結果から、ただちに基本周期領域内の応力が算定できることが均質化法の特徴である。

3. 数値例

本解析アルゴリズムの妥当性を検証するため図4に示す鉄筋コンクリート肘型はりの解析を実施した。図中のO点は完全固定とし、A点からB点にかけて分布荷重 $f_2 = -10 \text{ kN/m}$ が x_3 方向に、また、B点には $f_1 = 1 \text{ kN}$ の集中荷重が x_2 方向に作用するものとする。はり断面の強軸

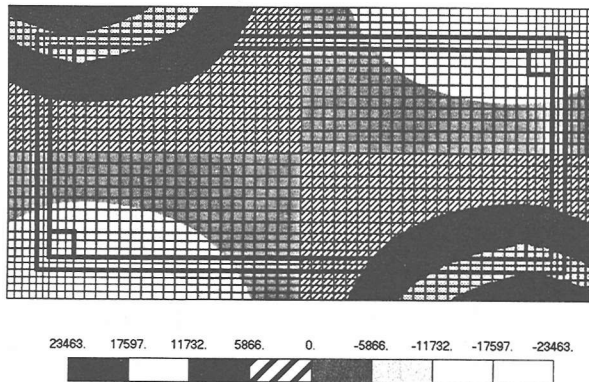


図-7 そり関数の分布(Case 1)

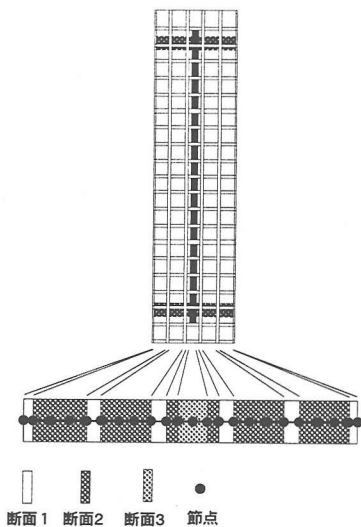


図-8 基本周期領域の一次元要素分割図(Case 2)

方向、弱軸方向は図から読みとれるとおりである。このはりの鉄筋配置として、図-5、図-6に示すような2とおりのものを仮定した。ケース1は $600 \times 300 \text{ mm}$ の矩形断面であり、長軸方向に $25 \times 25 \text{ mm}$ の角形主筋が4本、また、 150 mm 間隔で $13 \times 13 \text{ mm}$ の角形せん断補強筋が配置されている。ケース2は、ケース1のはりの外周部を金網により補強したものである。金網は格子間隔が約 30 mm で $6 \times 6 \text{ mm}$ の長方形断面を有する鉄筋で構成されている。材料定数として鉄筋はヤング率 206 GPa 、せん断弾性率 86 GPa とし、コンクリートはヤング率 33 GPa 、せん断弾性率 14 GPa とした。

はじめにケース1およびケース2のそり関数を(5)式に従い有限要素解析によって求めた。異なる断面および材料の分布に応じて、ケース1は2とおりの、また、ケース2は3とおりの解析を実施した。図-7に、ケース1の

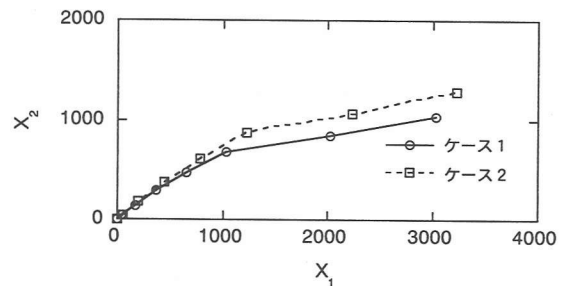


図-9 変形図(x_1 - x_2 平面)

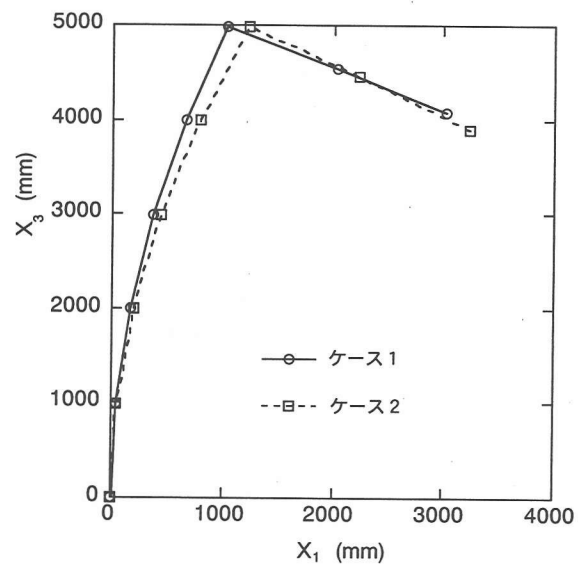


図-10 変形図(x_1 - x_3 平面)

断面のそり関数の分布を有限要素分割と共に示す。他の断面についても、ほぼ同程度の細かさの要素分割を用いた。ケース 1 は肋骨を含む断面と含まない断面との 2 断面があるが、本図は肋骨を含む断面の解析結果である。図より鉄筋とコンクリートの境界付近でもそり関数の分布の急激な変化は見られないことがわかる。これらの解析結果を(39),(40)式に代入し、基本周期領域の特性変位関数をケース 1 では 1 2, ケース 2 では 2 4 の一次元要素を用い求めた。図-8 にケース 2 の要素分割を示す。なお, (39),(40)式中の断面積分には, そり関数を求めるために用いた要素分割とその積分点を利用した。断面内の積分点は多いものの最終的に得られる方程式は未知数が数十から 1 5 0 程度で, かつ一次元要素を用いた離散化のためにバンド幅も狭く, ほとんど計算機に負荷をかけることなく解が得られた。この特性変位関数より(43),(44)式を用いて均質化された材料定数を求めた。計算された断面の材料定数を N-mm 単位系で表すと, ケース 1 は

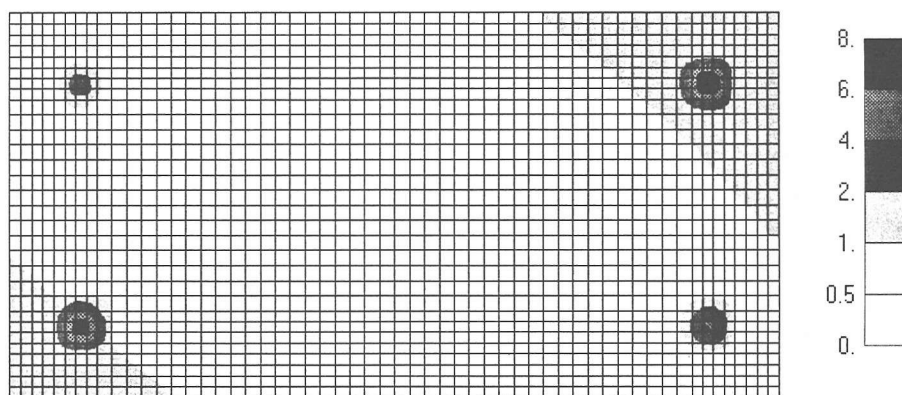
$$E^H = \begin{bmatrix} 6.28 \times 10^9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.03 \times 10^{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.80 \times 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.65 \times 10^{17} \end{bmatrix}$$

$$G^H = 5.34 \times 10^{13}$$

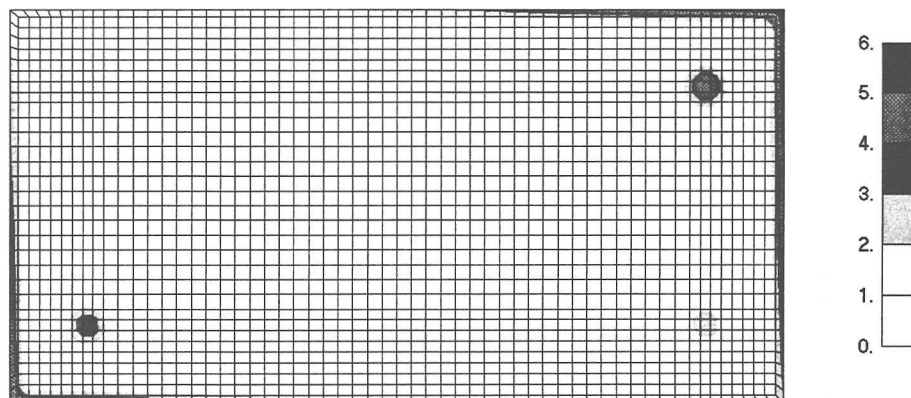
ケース 2 は

$$E^H = \begin{bmatrix} 7.11 \times 10^9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.43 \times 10^{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.20 \times 10^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.31 \times 10^{17} \end{bmatrix}$$

$$G^H = 6.10 \times 10^{13}$$



(a) ケース 1



(b) ケース 2

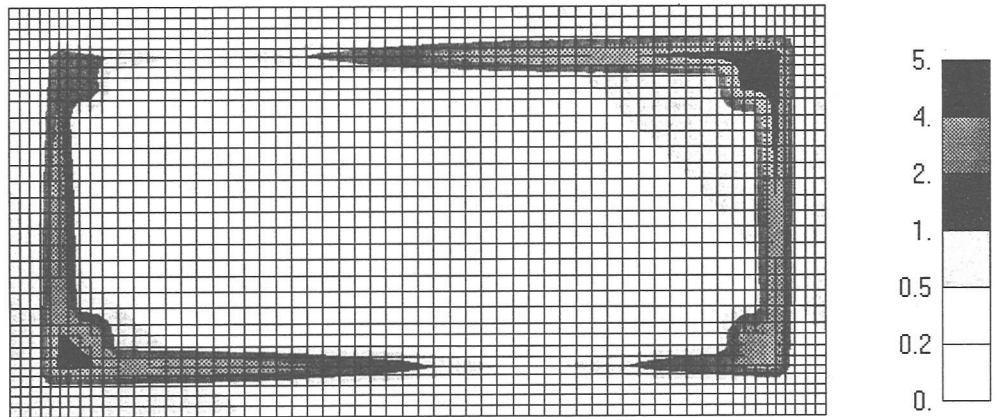
図-11 肋骨の配置されていない断面の相当応力分布 ($x_3=50\text{mm}$)

となった。断面は2軸対称性を有しており、 E^H に非対角項は生じないが、一般には非対角項が生じることになる。補強によって軸方向荷重に対しては13%、また強軸、弱軸に対する曲げに対してはそれぞれ20、29%、またねじりに対しては14%剛性が向上したことが分かる。

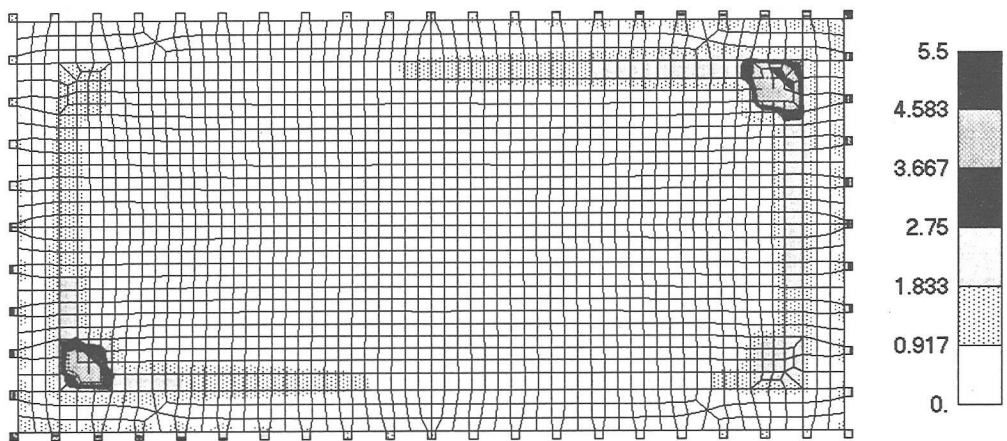
以上の断面の材料定数を用いて解析した肘型はりの変位を図-9、図-10に示す。図-9は x_1 - x_2 面の、また、図-10は x_1 - x_3 面内の変形状態を1000倍に拡大した変形図である。本解析では柱を5要素にまた、はりを2要素に分割した。複雑な周期構造を有する合成はりも均質化法を用いれば、巨視的な領域をこのように一次元要素を用いて簡単に計算することが可能である。

図-11、図-12は肘型はり固定端の上方0.5mの位置の巨視的変位分布より(56),(58)式を用いて計算したはり内部のMises式によって評価した相当応力である。断面内

の応力評価には、そり関数を求めるための有限要素分割をそのまま利用した。図-11は肋筋を含まない断面、図-12は肋筋を含む断面の応力分布である。これらの図より、ケース1およびケース2ともに2軸の曲げとねじりによって4本の主筋のうち、2本の応力が高く、他の2本の応力が相対的に低いこと、また、鉄筋に比べ、コンクリートが負担している応力は相当に低いことなど解析が合理性を有していることを示す応力分布の傾向が読みとれる。一方、本図からは、補強金網によって主筋および肋筋に生じる応力はどの程度低減しているか、また、補強金網付近のコンクリートの間にどの付着力が必要であるかを読みとることが可能であるが、このような情報を一次元部材を用いた解析によって容易に得られることが、本アルゴリズムの特徴である。



(a) ケース 1



(a) ケース 2

図-12 肋筋の配置されている断面の相当応力分布 ($x_3=50\text{mm}$)

4. 結論

本研究では、曲げねじりを考慮したはり理論に均質化法を適用することによって合成はりの解析が可能であることを示した。数値例で示したように材料の組み合わせが複雑でも本解析では容易に構造全体の挙動や断面内部の応力を算定することが可能である。ただし、ここでは、a) 合成はりでは長軸方向に周期性を有していること、全体の寸法に対して基本周期領域の長さは小さい、b) 断面に垂直な面は曲げ変形後も断面に垂直である、c) ねじりによって断面形状は変化しない、という仮定をおいているが、b), c) の仮定は必ずしも全ての合成はりに適用できるものではないと思われる。適用範囲や精度についてはさらに検討が必要である。また、せん断変形を考慮した Timoshenko はり理論を用いた定式化と本定式化との比較検討、材料非線形や幾何学的な非線形問題への応用、はり内部の 3 次元応力を考慮できる均質化理論を誘導することなどが今後の課題として挙げられる。

参考文献

1) Spagnolo, S. : Sul limite delle soluzioni di problemi di

Cauchy relativi all'equazione del calore, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 21(3), 657-699, (1967)

2) Lions, J. L. : Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control, (1981), Science Press.

3) Guedes, J. M and Kikuchi, N : Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods., *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, 83, 143-198, (1990).

4) 寺田, 弓削, 菊池 : 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第一報), 日本機械学会論文集 (A 編), 61-590, 2199-2205, (1995).

5) 寺田, 弓削, 菊池 : 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第二報), 日本機械学会論文集 (A 編), 62-601, 2072-2079, (1996).

6) Noboru Kikuchi : Course Pack of the University of Michigan,

MEAM502; *Differential Equation Methods in Mechanics*, (1996)

7) 川井忠彦, 藤谷 義信 : 有限要素法の基礎と応用シリーズ 11, 座屈問題解析, 培風館, 1991

(1998 年 4 月 25 日受付)