

ラプラス変換を用いた均質化理論に基づくアスファルト混合物の粘弾性解析

Visco-elastic Analysis of Asphalt Concrete based on Homogenization Theory using Laplace Transform

宇尾朋之 *・檜山和男 **・寺田賢二郎 ***

Tomoyuki UO, Kazuo KASHIYAMA and Kenjiro TERADA

* 工修 鹿島建設(株) 建設事業本部 東京支店 (〒107-0051 東京都港区元赤坂 1-3-8)

** 工博 中央大学助教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

*** Ph.D 東北大学講師 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

The homogenization method is applied to characterize the quasi-static behaviors of asphalt concrete. The macroscopic material properties of asphalt concrete are obtained by assuming the visco-elastic response of its microstructure consisting of aggregates and asphalt. Based on the derived homogenization formula, the numerical analysis is presented to simulate the global-local mechanical behavior of this type of composites.

Key Words : *Homogenization Theory, Visco-Elasticity, Composite Material, Asphalt Concrete*

1. はじめに

アスファルト混合物は、粘性材料であるアスファルトと弾性材料である骨材によって構成される粘弾性複合材料といえる。これまで、アスファルト混合物の力学的な物性を評価する場合、主に実験や理論に基づく検討¹⁾が行われてきた。一方、計算機の進歩により、近年数値解析において検討^{2), 3)}も行われているが、モデル化された要素内部に存在する各材料の形状や、材料定数の差異といった微視構造は考慮されておらず、全体材料を一つの材料と仮定して、弾性解析や粘弾性解析が行われている。したがって、これまでの数値解析法では、内部に介在する個々の材料の非線形性を考慮する事や、内部の各材料の応力状態を知ることは困難であった。解析領域全体に対して、アスファルト混合物の各材料の形状を正確にモデル化して解析を行うことが可能であれば、微視構造を考慮に入れることはできるが、その自由度は莫大なものとなり、最新の高性能計算機を用いても、計算機容量または計算時間の点で現実的には解析が困難となっている。

このような問題点を解決するための数値解析手法として、近年、複合材料の応力解析手法として有効性が示されている均質化法^{4), 5), 6), 7)}が注目されている。マルチスケール法を複合材料の力学分野に発展させた手法である均質化法は、漸近展開手法の一つであり、不均質な材料の材料物性を等価で均質な材料物性に置き換える事ができる。このため内部微視構造を考慮に入れた巨視的な解析が効率よく行うことが可能となり、また巨視的な変位から内部微視構造の周期的な応力や変位を求めることが可能となっている。均質化法では

等価な材料物性を求める際に、対象とする巨視的構造がある周期的な内部微視構造を有すると仮定している。アスファルト混合物の場合には、厳密にはこの周期性の仮定の適用性が問題となるが、対象とする巨視的構造に無限に続く道路等を考える場合、ある程度の大きさを持った内部微視構造を基本単位(ユニットセル)と考えることで、乱れを持った材料であっても均質化法の適用が可能となるといえる。

本論文は、アスファルト混合物の力学的特性をより定量的に把握し、ひいては、配合設計および道路構造設計の一助になり得る数値解析手法の開発を目的として、アスファルト混合物の内部微視構造を考慮に入れた応力解析を行うための手法として、ラプラス変換を用いた均質化理論⁸⁾に基づく新しい数値解析手法を提案するものである。本論文では、まず粘弾性体の構成則にラプラス変換を用いた均質化手法を適用する定式化を詳細に示した。そして、いくつかの例題を取り上げて本手法の妥当性と有効性について検討を行った。具体的には、2種類の粘弾性材料からなる簡単なモデルを用いて粘性係数の変動及び粘弾性材料の体積率の変動、微小時間増分量の変動に伴う巨視的な均質化された粘弾性係数の変動について検討を行い、提案する定式化の妥当性を検討した。さらに、実問題への適用の可能性を検討するため、仮想的なアスファルト混合物のモデルを作成し検討を行った。

2. ラプラス変換を用いた定式化

粘弾性体は時間依存性の力学的性質を持ち、その基本的な特性を表す代表的な力学モデルとして、弾性バ

ネと粘性ダッシュポットの直列結合を用いた Maxwell モデルとその並列結合を用いた Vogit モデルが考えられる。前者はひずみ入力に対する応力の応答に、後者は応力に対するひずみの応答を示すのに適している。本論文では、応力緩和問題を取り扱うことから、前者である Maxwell モデルを用いて定式化を進めることとする。また、線形粘弾性体の構成則がラプラス変換を用いることで、ラプラス空間上で、弾性体の構成則と類似した形となることが一般的に知られている。本論文においてラプラス変換を用いることで、弾性体に均質化法を適用する手順と同様の定式化が可能となり、多少の式変形が必要なものの簡単にかつ理論的に正しい定式化が行えることとなる。

2.1. 基礎方程式

次にラプラス変換を用いた粘弾性体の基礎方程式を示す。単純 Maxwell モデルにおける全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}(t)$ は弾性ばね要素のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^e(t)$ とダッシュポットによるクリープひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^c(t)$ の和で与えられる⁹⁾。

$$\dot{\epsilon}_{ij}(t) = \dot{\epsilon}_{ij}^e(t) + \dot{\epsilon}_{ij}^c(t) \quad (1)$$

さらに、それぞれの要素に対して、応力ひずみの関係が式(2)で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(t) &= D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e(t) \\ \sigma_{ij}(t) &= \eta_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^c(t) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 D_{ijkl} 及び η_{ijkl} はそれぞれ弾性係数、粘性係数を示している。ここで、式(1)、式(2)から時間(t)における構成式が得られる。

$$\dot{\sigma}_{ij}(t) = D_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl}(t) - \dot{\epsilon}_{kl}^c(t)) \quad (3)$$

さらに式(2)を用いれば、式(4)が得られる。

$$\dot{\sigma}_{ij}(t) = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}(t) - D_{ijmn} \eta_{mnkl}^{-1} \sigma_{kl}(t) \quad (4)$$

式(3)において、初期状態で次の関係が成り立つと仮定する。

$$\sigma_{ij}(0+) = D_{ijkl} (\epsilon_{kl}(0+) - \epsilon_{kl}^c(0+)) \quad (5)$$

ここで初期粘性ひずみ $\epsilon^c(0+) = 0$ とすれば、 $t = 0+$ において、次式が成り立つ。

$$\sigma_{ij}(0+) = D_{ijkl} \epsilon_{kl}(0+) \quad (6)$$

以上から、初期状態における粘弾性体の構成則が得られた。式(6)から本論で対象としている材料は、初期状態において瞬間的な弾性変形をしている事となる。ここで、 $\dot{\epsilon}^c(0+) \neq 0$ であることに注意されたい。

次に時間 $t > 0+$ における構成則を考える。本定式化では粘弾性体の構成則がラプラス空間上で弾性体の構成則と同様の形となることを利用する^{10), 11)}。式(7)にラプラス変換の公式を示す。また表-1に本定式化で用いる簡単なラプラス変換の公式を示す。ここで表

表-1 簡単なラプラス変換の公式

$f(t)$	$\mathcal{L}f(t)$
$f(t)$	$\bar{f}(s)$
$\dot{f}(t)$	$s\bar{f}(s) - f(0+)$
a	$\frac{a}{s}$
$\delta(t)a$	a
$\dot{\delta}(t)$	sa
$f(t) * g(t)$	$\bar{f}(s)\bar{g}(s)$

中の $f(t), g(t)$ は任意の関数を示し、 a は定数、 $\delta(t)$ はデルタ関数、記号*は畳み込み積分を示している。

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (7)$$

ここで、式(4)で示される $t > 0+$ における構成則をラプラス変換すれば次式が求まる。

$$\begin{aligned} s\bar{\sigma}_{ij}(s) - \sigma_{ij}(0+) &= D_{ijkl}(s\bar{\epsilon}_{kl}(s) - \epsilon_{kl}(0+)) \\ &\quad - D_{ijmn}\eta_{mnkl}^{-1}\bar{\sigma}_{kl}(s) \end{aligned} \quad (8)$$

さらに、初期条件(式(6))を代入すれば、次式が求められる。

$$s\bar{\sigma}_{ij}(s) + D_{ijmn}\eta_{mnkl}^{-1}\bar{\sigma}_{kl}(s) = sD_{ijkl}\bar{\epsilon}_{kl}(s) \quad (9)$$

以上を整理してまとめると、 $t > 0+$ において次式を得る。

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = (D_{ijkl} + s\eta_{ijkl})\bar{\epsilon}_{kl}(s) \quad (10)$$

式(10)において、ラプラス空間上で構成則が、実空間における弾性体の構成則と同様の形をしていることが分かる。これにより本構成則では、ラプラス空間上で弾性体の構成則に均質化を適用する手順を用いることで簡単に定式化が行える。

ここでラプラス変換された局所形の釣り合い式は、 $t > 0+$ において次式で表される。

• $t > 0+$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}(s)}{\partial x_i} + \bar{f}_j(s) = 0 \quad (11)$$

以上より $t = 0+, t > 0+$ における仮想仕事の原理式を導く。ここで $t = 0+$ においては、実空間上で、また $t > 0+$ においては、ラプラス空間上で、次式が得られる。

• $t = 0+$

$$\int_v D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \int_s f_i v_i dS \quad (12)$$

• $t > 0+$

$$\int_v (D_{ijkl} + s\eta_{ijkl}) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} dV = \int_s \bar{f}_i \bar{v}_i dS \quad (13)$$

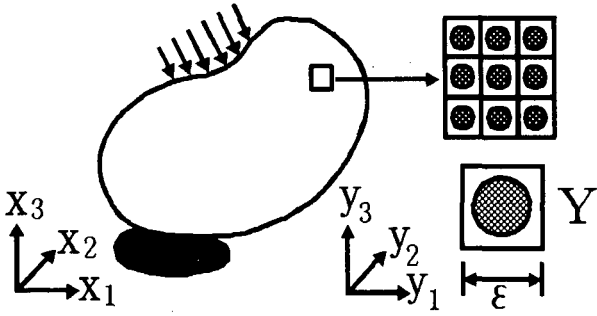


図-1 均質化法概念図

2.2. 均質化の適用

次に前節で導かれたラプラス変換を用いた基礎方程式に対する均質化法^{4),5),6),7)}の適用について説明する。ここで図-1は均質化法概念図を示している。図左は巨視的構造を示しており、図右は巨視的構造を構成する内部微視構造を示している。均質化法では、対象とする巨視的構造がある周期微視構造を持つと仮定している。また、微視的構造と巨視的構造は互いに独立した座標系をもち、その関係は次式に示すように ϵ により与えられている。

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \quad (14)$$

次に $t = 0+$ 及び $t > 0+$ における微視的方程式及び巨視的方程式をそれぞれの場合に分けて導く。

(1) $t = 0+$ の場合

$t = 0+$ においては、弾性体の仮想仕事の原理式が導かれているため簡単に均質化法が適用できる。 $t = 0+$ における全変位の ϵ に関する漸近展開は次式のように2変数表示される。

$$u_i^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0+) = u_i^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0+) + \epsilon u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0+) + \epsilon^2 u_i^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0+) + \dots + \epsilon^n u_i^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0+) \quad (15)$$

ここで変位の漸近展開の0次の項を巨視的変位、1次の項を微視的変位とし、2次の項以下は微小のため取り扱わない。このとき変位の漸近展開式は次式で表される。

$$u_i^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0+) = u_i^0(\mathbf{x}, 0+) + \epsilon u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0+) \quad (16)$$

式(16)を仮想仕事の原理式に代入すれば、次式が得られる。

$$\int_V D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} \right) dV = \int_s f_i v_i^0 dS \quad (17)$$

さらに、整理すれば最終的に微視的方程式及び巨視的方程式は次式のように書き表される。

<微視的方程式>

$$\int_V D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dV = 0 \quad (18)$$

<巨視的方程式>

$$\int_V D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} dV = \int_s f_i v_i^0 dS \quad (19)$$

また、次の微視的方程式が唯一の解を持つと仮定する。

$$\int_Y D_{ijkl} \left(\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} dY = 0 \quad (20)$$

このとき微視的変位は、変数分離された次式となる。

$$u_k^1(0+) = -\chi_k^{mn}(0+) \frac{\partial v_m^0(0+)}{\partial x_n} + \tilde{u}_k^1(0+) \quad (21)$$

ここで、式(21)において、 $\chi_k^{mn}(0+)$ は、初期における微視構造内の乱れを表す特性関数である。また $\tilde{u}_k^1$ は任意の微視的変位を示している。

さらに微視的変位を巨視的な方程式に代入すれば、巨視的な方程式が得られる。

$$\int_V K_{ijmn}^H \frac{\partial u_n^0}{\partial x_m} \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} dV = \int_s f_i v_i^0 dS \quad (22)$$

ここで K_{ijmn}^H は、初期における均質化された粘弾性テンソルであり式(23)で与えられる。

$$K_{ijmn}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijmn}(y) \left(\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \right) dY \quad (23)$$

以上により、 $t = 0+$ における微視的方程式及び巨視的方程式が得られた。

(2) $t > 0+$ の場合

次に $t > 0+$ において均質化法の導入を行う。 $t > 0+$ における全変位 $\tilde{u}^\epsilon(s)$ のラプラス空間上での ϵ に関する漸近展開は次式のように2変数表示される。

$$\tilde{u}_i^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \tilde{u}_i^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + \epsilon \tilde{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + \epsilon^2 \tilde{u}_i^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + \dots + \epsilon^n \tilde{u}_i^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \quad (24)$$

また $t > 0+$ についての仮想仕事の原理式が式(25)で与えられる。

$$\int_V (D_{ijkl} + s \eta_{ijkl}) \left(\frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_k^1}{\partial y_l} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_i^1}{\partial y_j} \right) dV = \int_s \tilde{f}_i \tilde{v}_i^0 dS \quad (25)$$

よって微視的方程式、巨視的方程式は、次式となる。

<微視的方程式>

$$\int_V (D_{ijkl} + s \eta_{ijkl}) \left(\frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \tilde{v}_i^1}{\partial y_j} dV = 0 \quad (26)$$

<巨視的方程式>

$$\int_V (D_{ijkl} + s \eta_{ijkl}) \left(\frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \tilde{v}_i^0}{\partial x_j} dV = \int_s \tilde{f}_i \tilde{v}_i^0 dS \quad (27)$$

さらに、次の微視的方程式が唯一の解を持つと仮定する。

$$\int_Y (D_{ijkl} + s \eta_{ijkl}) \left(\delta_{km} \delta_{ln} - \frac{\partial \bar{\chi}_k^{mn}}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \tilde{u}_m^0}{\partial x_n} \frac{\partial \tilde{v}_i^1}{\partial y_j} dY = 0 \quad (28)$$

$$\int_Y (D_{ijkl} + s\eta_{ijkl}) \frac{\partial \bar{\chi}_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{\nu}_i^1}{\partial y_j} dV = 0 \quad (29)$$

このとき微視的変位は、変数分離された式(30)^{12),13)}となる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_k^1(s) = & -\bar{\chi}_k^{mn}(s) \frac{\partial \bar{u}_m^0(s)}{\partial x_n} \\ & - \frac{1}{s} \chi_k^{mn}(0+) \frac{\partial u_m^0(0+)}{\partial x_n} + \bar{u}_k^1(s) \end{aligned} \quad (30)$$

ここでラプラス空間上の微視的変位の逆ラプラス変換を行えば、式(31)が得られる。

$$\begin{aligned} u_k^1(t) = & -\chi_k^{mn}(t) * \frac{\partial u_m^0(t)}{\partial x_n} \\ & - \chi_k^{mn}(0+) \frac{\partial u_m^0(0+)}{\partial x_n} + \bar{u}_k^1(t) \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、記号*は Boltzman の畳み込み積分を表しており、次式で与えられる。

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (32)$$

ここに $t > 0+$ における微視的変位 $u^1(t)$ は、 $t = 0+$ を代入した場合、式(21)と同じ式となることから、式(31)は $t \geq 0$ において成り立つといえる。

次に、式(28)を整理すれば、微視構造に関する方程式式(33)が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \bar{\chi}_k^{mn}(s)}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{\nu}_i^1}{\partial y_j} dY + s \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \bar{\chi}_k^{mn}(s)}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{\nu}_i^1}{\partial y_j} dY \\ & - \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{\nu}_i^1}{\partial y_j} dY \\ & = \int_Y D_{ijmn} \frac{\partial \bar{\nu}_i^1}{\partial y_j} dY + \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{\nu}_i^1}{\partial y_j} dY \\ & + s \int_Y \eta_{ijmn} \frac{\partial \bar{\nu}_i^1}{\partial y_j} dY + s \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{\nu}_i^1}{\partial y_j} dY \\ & - \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial \bar{\nu}_i^1}{\partial y_j} dY \end{aligned} \quad (33)$$

この方程式を表-1を用いて逆ラプラス変換を行うと次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}(t)}{\partial y_l} \frac{\partial \nu_i^1}{\partial y_j} dY + \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \dot{\chi}_k^{mn}(t)}{\partial y_l} \frac{\partial \nu_i^1}{\partial y_j} dY \\ & = \delta(t) \left(\int_Y D_{ijmn} \frac{\partial \nu_i^1}{\partial y_j} dY + \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial \nu_i^1}{\partial y_j} dY \right. \\ & \quad \left. - \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial \nu_i^1}{\partial y_j} dY \right) + \delta(t) \left(\int_Y \eta_{ijmn} \frac{\partial \nu_i^1}{\partial y_j} dY \right. \\ & \quad \left. + \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial \nu_i^1}{\partial y_j} dY \right) \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、 $\delta(t)$ は、デルタ関数であり $t > 0$ において次式で与えられる。

$$\delta(t) = 0.0 \quad \dot{\delta}(t) = 0.0 \quad (35)$$

以上より、 $t > 0$ における微視的方程式は式(36)となる。

$$\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}(t)}{\partial y_l} \frac{\partial \nu_i^1}{\partial y_j} dY + \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \dot{\chi}_k^{mn}(t)}{\partial y_l} \frac{\partial \nu_i^1}{\partial y_j} dY$$

$$= 0 \quad (36)$$

ここで、式(36)から求められる特性関数は初期値問題となっていることが分かる。また対象とする各材料が線形弾性体つまり $\eta = \infty$ の場合、方程式を満たす条件として $\dot{\chi}(t) = 0$ が必要条件となり、各時刻の χ は初期から変化しないことがわかり、これは線形弾性体の条件を満たしていることが分かる。

次に巨視的方程式について考える。巨視的方程式に微視的変位を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijmn} \frac{\partial \bar{u}_m^0(s)}{\partial x_n} \frac{\partial \bar{\nu}_i^0}{\partial x_j} dV \\ & - \int_V \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \bar{\chi}_k^{mn}(s)}{\partial y_l} dY \frac{\partial \bar{u}_m^0(s)}{\partial x_n} \frac{\partial \bar{\nu}_i^0}{\partial x_j} dV \\ & + s \int_V \frac{1}{|Y|} \int_Y \eta_{ijmn} dY \frac{\partial \bar{u}_m^0(s)}{\partial x_n} \frac{\partial \bar{\nu}_i^0}{\partial x_j} dV \\ & - s \int_V \frac{1}{|Y|} \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \bar{\chi}_k^{mn}(s)}{\partial y_l} dY \frac{\partial \bar{u}_m^0(s)}{\partial x_n} \frac{\partial \bar{\nu}_i^0}{\partial x_j} dV \\ & - \frac{1}{s} \int_V \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \bar{\chi}_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} dY \frac{\partial \bar{u}_m^0(s)}{\partial x_n} \frac{\partial \bar{\nu}_i^0}{\partial x_j} dV \\ & + \int_V \frac{1}{|Y|} \int_Y \eta_{ijkl} \frac{\partial \bar{\chi}_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} dY \frac{\partial \bar{u}_m^0(s)}{\partial x_n} \frac{\partial \bar{\nu}_i^0}{\partial x_j} dV \\ & = \int_s \bar{f}_i \bar{\nu}_i^0 dS \end{aligned} \quad (37)$$

さらに、微視的方程式と同様に、逆ラプラス変換を行い整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_V D_{ijmn}^H \frac{\partial u_n^0(t)}{\partial x_m} \frac{\partial \nu_i^0}{\partial x_j} dV \\ & - \int_V G_{ijmn}^{DH}(t) * \frac{\partial u_n^0(t)}{\partial x_m} \frac{\partial \nu_i^0}{\partial x_j} dV \\ & + \int_V \eta_{ijmn}^H \frac{\partial \dot{u}_n^0(t)}{\partial x_m} \frac{\partial \nu_i^0}{\partial x_j} dV \\ & - \int_V H_{ijmn}^{\eta H}(t) * \frac{\partial \dot{u}_n^0(t)}{\partial x_m} \frac{\partial \nu_i^0}{\partial x_j} dV \\ & - \int_V H_{ijmn}^{\eta H}(t) \frac{\partial \dot{u}_n^0(0+)}{\partial x_m} \frac{\partial \nu_i^0}{\partial x_j} dV \\ & - \int_V G_{ijmn}^{DH}(0+) \frac{\partial u_n^0(0+)}{\partial x_m} \frac{\partial \nu_i^0}{\partial x_j} dV \\ & = \int_s f_i \nu_i^0 dS \end{aligned} \quad (38)$$

ここでは特に次のような逆ラプラス変換を用いている。

$$\mathcal{L}^{-1}\{sf(s)g(s)\} = \dot{f}(t) * g(t) + f(0+)g(t) \quad (39)$$

式(39)はデュアメル公式と呼ばれる。ここで $f(t)$ 及び $g(t)$ は数学的には交換可能な関数である。しかしながら式(39)において、その意味を考えると $\dot{f}(t)$ の $g(t)$ に対する応答を求めており、本問題においては $f(t) = \frac{\partial u_i^0(t)}{\partial x_j}$ 、 $g(t) = \frac{\partial \chi_k^{mn}(t)}{\partial y_l}$ とおくことで、巨視的

なひずみ速度の微視的な乱れ場に対する応答を考えていることとなる。

ここで、 $D_{ijmn}^H, \eta_{ijmn}^H, G_{ijmn}^{DH}(t), H_{ijmn}^{\eta H}(t)$ は、均質化された粘弾性テンソルであり式(40)で与えられる。特に、 $G^{DH}, H^{\eta H}$ は、微視的な乱れを含んだ形となっており、乱れが小さいときに小さい値を取ることが分かる。

$$\begin{aligned} D_{ijmn}^H &= \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijmn}(y) dY \\ \eta_{ijmn}^H &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \eta_{ijmn}(y) dY \\ G_{ijmn}^{DH}(t) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl}(y) \frac{\partial \chi_k^{mn}(t)}{\partial y_l} dY \\ H_{ijmn}^{\eta H}(t) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \eta_{ijkl}(y) \frac{\partial \chi_k^{mn}(t)}{\partial y_l} dY \quad (40) \end{aligned}$$

また、局所的な微視的応力、ひずみは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}^0(t) &= \frac{\partial u_k^0(t)}{\partial x_l} - \frac{\partial \chi_k^{mn}(t)}{\partial y_l} * \frac{\partial u_m^0(t)}{\partial x_n} \\ &\quad - \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial u_m^0(0+)}{\partial x_n} \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0(t) &= D_{ijkl}(y) \left\{ \frac{\partial u_k^0(t)}{\partial x_l} - \frac{\partial \chi_k^{mn}(t)}{\partial y_l} * \frac{\partial u_m^0(t)}{\partial x_n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \chi_k^{mn}(0+)}{\partial y_l} \frac{\partial u_m^0(0+)}{\partial x_n} \right\} \\ &\quad + \eta_{ijkl}(y) \left\{ \frac{\partial \dot{u}_k^0(t)}{\partial x_l} - \frac{\partial \chi_k^{mn}(t)}{\partial y_l} * \frac{\partial \dot{u}_m^0(t)}{\partial x_n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \chi_k^{mn}(t)}{\partial y_l} \frac{\partial \dot{u}_m^0(0+)}{\partial x_n} \right\} \quad (42) \end{aligned}$$

以上により、 $t = 0+, t > 0$ における微視的方程式、巨視的方程式また局所的な応力、ひずみに関する方程式を得た。ここで、本定式化において微視的方程式に、応力やひずみといった物理量が含まれることなく、微視的な幾何形状、材料定数からその乱れ場が求められることがわかる。また巨視的な方程式は微視構造における、材料の特性を考慮に入れた式となっていることがわかる。

3. 数値解析例

数値解析例として、簡単な粘弾性モデルを用いた本定式化の有効性を検討し、またアスファルト混合物への適用について検討する。

3.1. 粘弾性モデルを用いた有効性の検討

ここでは、2種類の粘弾性材料からなる簡単な内部微視構造モデル(図-3)を用いて本定式化の妥当性を検討する。ここでの検討点として、1) 粘性材料における粘性係数を変動させたときの巨視的な均質化粘弾性係数の変動、2) 粘性材料の体積比を変動させた場合の均質化粘弾性係数の変動、また3) 微小時間増分量の変化に伴う均質化粘弾性係数の変動について検討を行う。こ

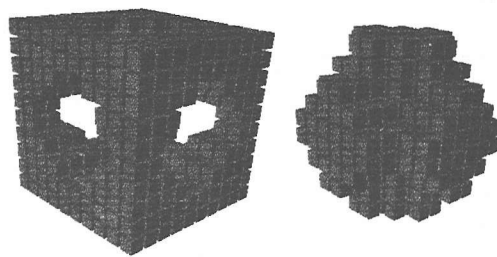


図-2 有限要素分割図

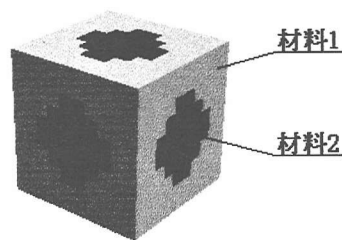


図-3 数値解析モデル ($V_2 = 47\%$)

表-2 粘性係数 η ($\text{kgf} \cdot \text{sec} / \text{mm}^2$)

	材料1	材料2
Case1	$100 \text{ kgf} / \text{mm}^2 \cdot \text{sec}$	$100 \text{ kgf} / \text{mm}^2 \cdot \text{sec}$
Case2	$100 \text{ kgf} / \text{mm}^2 \cdot \text{sec}$	$50 \text{ kgf} / \text{mm}^2 \cdot \text{sec}$
Case3	$100 \text{ kgf} / \text{mm}^2 \cdot \text{sec}$	$10 \text{ kgf} / \text{mm}^2 \cdot \text{sec}$

こで用いた内部微視構造は、要素数1000、節点数1331に有限要素分割している。有限要素分割図を図-2に示す。また各材料のヤング率、ポアソン比はすべての検討において、材料1を $E = 100 \text{ kgf} / \text{mm}^2, \nu = 0.3$ とし、材料2を $E = 50 \text{ kgf} / \text{mm}^2, \nu = 0.3$ とした。

1) 粘性係数の変動に対する検討

まず内部微視構造における粘弾性材料の粘性係数を変動させた場合の、巨視的な粘弾性係数の変動について検討を行う。ここで本数値解析においては、材料1の粘性係数を一定にとどめたまま、材料2の粘性係数を変動させた。また微小時間増分量 Δt は0.1(秒)を用いている。ここで全体に対する材料2の体積含有率 V_2 は47%としている。また本検討に用いた解析モデルを、図-3に示す。また表-2に粘性係数を示す。

次に、均質化粘弾性係数の1成分について時間履歴を図-4示す。ここで示している均質化粘弾性係数は式(40)で与えられる各材料の弾性係数と特性関数の微視的なひずみを取ったものとの演算の平均値を取ったものとなっている。なおここで示した成分は、 $G_{1111}^{DH}(t)$ を示している。図からどの粘性係数を用いた

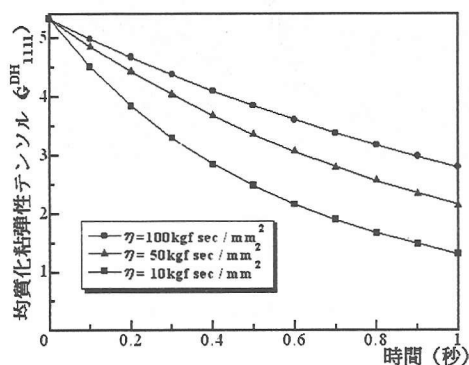


図-4 均質化粘弾性テンソルの変化

表-3 体積含有率

	case1	case2	case3
体積含有率	1 0 %	4 7 %	7 9 %

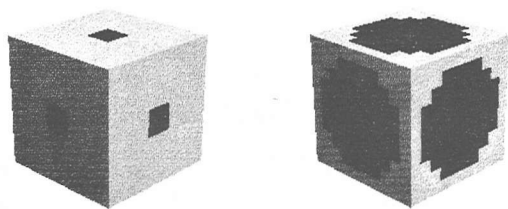


図-5 数値解析モデル ($V_2 = 10\%, 79\%$)

場合でも時間と共に、値が減少していく傾向が捉えられていることが分かる。これは、乱れが一定の値に収束していく様子を捉えている。また図から本解析で粘性係数を順次下げていった場合（粘性を弱くしていく場合）、その定量的な値に差異が見られ、また粘性が弱い順にその値が小さくなっていくことが分かる。

2) 粘性材料の体積変化に対する検討

次に内部微視構造における粘弾性材料の体積含有率を変動させた場合の、巨視的な粘弾性係数の変動について検討を行う。ここで本検討において変動させた体積率を表-2に示す。なお微小時間増分量 Δt は1)と同様に0.1(秒)を用いている。また1)のモデル以外に用いた数値解析モデルを図-5に示す。ここで図左は材料2の体積含有率が10%のものであり、図右は79%のものである。

次に、体積含有率の変化に伴う均質化粘弾性係数の時間履歴を図-6示す。図において、どの場合でも定量的に減少することには変わりはないが、その大きさに違いがあることが分かる。またその大きさは、体積含有率が47%の時が一番大きく、10%の時が一番小

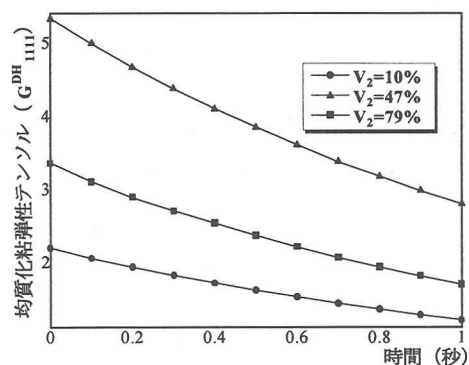


図-6 均質化粘弾性テンソルの変化

さくなっている。これは、どちらかの材料の体積含有率が増加したときに、微視構造の乱れを示す特性関数の値が小さくなることに依存していると考えられる。

3) 微小時間増分量の変化に対する検討

次に微小時間増分量 Δt を変動させた場合の、巨視的な粘弾性係数の変動について検討を行う。用いた数値解析モデルは、体積含有率47%である1)と同様のモデルを用いている。また1), 2)では1.0秒までの計算であったが、ここでは10.0秒まで計算している。ここで用いた微小時間増分量 Δt は10.0秒, 5.0秒, 2.0秒, 1.0秒, 0.1秒の5種類を採用した。なお、時間積分法としては、前進オイラー法を用いている。

図-7に微小時間増分量 Δt を変動させた場合の、巨視的な粘弾性係数の時間履歴を示した。この図から、本数値解析に用いたモデルはおおよそ10.0秒で一定の値に収束する事がわかる。ここで Δt を10.0秒や5秒とした場合、刻み幅が大きいため、その現象を捉えきれていないことがわかる。また1.0秒以下の Δt を用いた場合、その定性的、定量的傾向は、ほぼ一致していることが分かる。この結果から計算に用いる Δt は、取り扱う問題がどの程度の時間で一定の値に収束するのかをすることで、随時決めることが重要であると考えられる。

これら三つの検討から、微視周期構造における材料定数の変化や材料の体積率が巨視的な挙動に影響を与えることがわかり、本手法が粘弾性複合材料の応力解析への適用に有効な手段であることがわかった。

3.2. アスファルト混合物への適用

次にアスファルト混合物のモデルを用いて、本定式化の実際問題への適用可能性を検討する。巨視構造には、立方体のモデル(20cm*20cm*20cm)を作成し、微視構造には骨材(直径4.5mmの球体)とアスファルト混合物からなるモデルを作成した(図-8)。ここで微

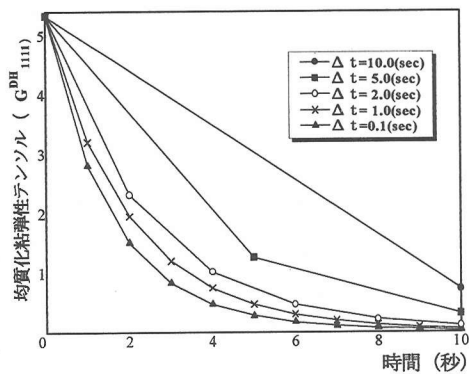


図-7 均質化粘弾性テンソルの変化

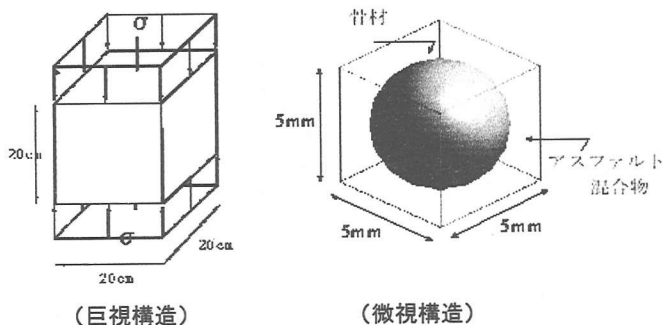


図-8 数値解析モデル

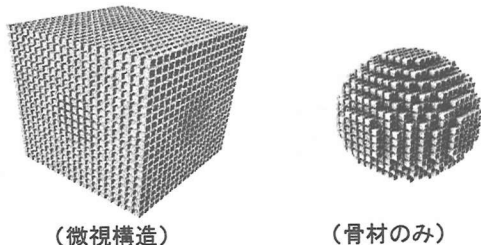


図-9 要素分割図 (要素数:8000, 節点数:9261), 骨材数:1

視構造に関しては、内部に介在する骨材数を1個にして、体積含有率を38%とした。また巨視構造に関しては、要素数4、節点数18、微視構造に関しては、要素数8000、節点数9261の要素分割を行った。図-9に微視構造の要素分割図を示す。ここでアスファルト混合物の材料定数は、実験から得られた荷重変位曲線を用いて決定した。また骨材の材料定数は、文献¹⁴⁾から安山岩のヤング率 $7.3 \times 10^5 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ 、ポアソン比0.25を選定して数値解析を行った。ただし本解析においては簡単のために温度一定、体積変化による粘性係数を無限大としてこれに関する項を無視している。表-4に解析条件を示す。

図-10、図-11は、それぞれ微視構造内のアスファルト部分の圧縮応力、巨視的圧縮応力の時間履歴

表-4 解析条件

骨材 ($\phi 5\text{mm}$)	アスファルト混合物
$E(t) = 7.3 \times 10^5 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$	$E(t) = \sigma(t)/\epsilon t$
$\nu(t) = 0.25$	$\nu(t) = -\epsilon_y(t)/\epsilon_z(t)$
$\eta_g(t) = \infty$	$\sigma_z(t) = 0.07 * (1 - e^{-0.005t}) + 0.0001t$
$\eta_k(t) = \infty$	$\epsilon_z(t) = 0.000300t$
	$\epsilon_y(t) = 0.000112t$
	$\eta_g(t) = 1.0e^3$
	$\eta_k(t) = \infty$

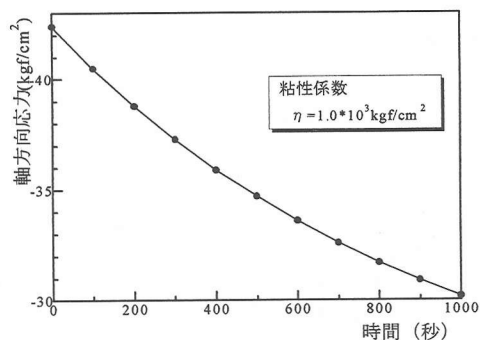


図-10 アスファルト混合物の応力の時間履歴

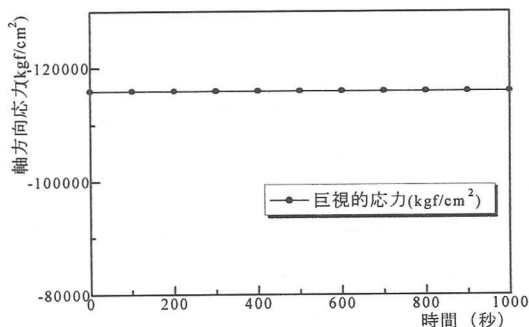


図-11 巨視的応力の時間履歴

を示したものである。図-10から、粘弾性材料であるアスファルト混合物が応力緩和している様子が捉えられていることが分かる。しかしながら、図-11に示される巨視的応力の時間履歴をみるとほぼ変化しないことが分かる。これは骨材に掛かる圧縮応力が非常に大きいため、巨視的応力の変化に骨材の影響が大きくていていると考えられる。

次に図-12、図-13は、微視構造内の応力分布を示したものである。ここで、図-12は骨材、アスファルトすべてを含めた場合の応力の最大値、最小値を取って示したものである。一方、図-13は、アスファルト部分の応力の最大値、最小値をとったものである。図-12から、アスファルトに比べ骨材に大きな圧縮応力が掛かっていることが分かる。

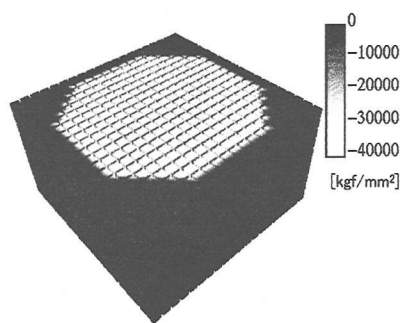


図-12 微視構造の応力分布図 (中央断面)

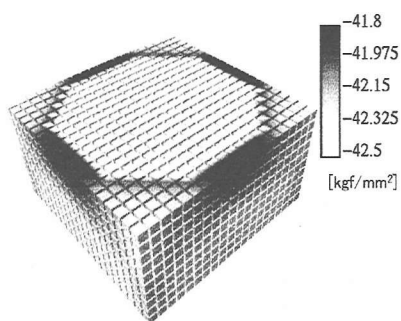


図-13 微視構造の応力分布図 (中央断面)

4. おわりに

本論文では、内部微視構造を考慮に入れたアスファルト混合物の数値解析を行うための手法として、ラプラス変換を用いた均質化理論に基づく新しい数値解析手法を提案した。また本手法の妥当性を検証するため、幾つかの数値解析例に適用して検討を行った。その結果、次に示す結論を得た。

1) ラプラス変換を用いた本手法は、弾性体の均質化法と類似の定式化が可能となり、簡便でかつ理論的に正しい定式化が行える手法である。また均質化法を用いた粘弾性複合材料の構成則は、微視周期構造の特徴を力学的に反映したものとなり、材料定数を微視的な幾何形状から与えていることが明らかとなった。

2) 2種類の粘弾性材料からなる簡単なモデルを用いた数値解析による検討から、粘性係数の違いにより巨視的な緩和(遅延)現象に変化を与える事が明らかとなった。どちらかの材料の体積含有率が増加したときに、微視構造の乱れを示す特性関数が小さい値になることがわかり、本解析例では50%で最大のばらつきがあることが分かった。また Δt の違いにより結果に差異がでることが明らかになった。本論文では、微小時間増分を緩和時間の10分の1程度にとることにより、アスファルト混合物の緩和現象を定性的に捉えられることが明らかとなった。

3) 仮想モデルを用いたアスファルト混合物の数値解

析では、粘弾性材料であるアスファルト混合物が応力緩和している様子が捉えられた。また均質化法を用いることで、従来の数値解析手法では困難であった内部微視構造における局所的な応力を簡単に捉えられることができた。

今後の課題として、アスファルト混合物のより正確な力学特性を捉えるために、1) X線CTを用いた実画像データ¹⁵⁾に基づくアスファルト混合物の微視周期構造のモデル化、2) 格子状の要素を用いた場合の材料界面の近似と応力評価¹⁶⁾について検討する予定である。

参考文献

- 1) 菅原照雄, 笠原篤:アスファルトの性状のアスファルト混合物の力学的性状に及ぼす影響, 土木学会論文報告集, No.268 p109-118, 1977
- 2) 西沢辰男, 松野三郎:アスファルト表層表面の応力状態, 第20回日本道路会議論文集, p462-463, 1993
- 3) 栗谷川祐造, 秋葉正一, 木田哲量, 能町純雄:曲げ試験に用いる舗装用混合物の2次元弾性解析, 土木学会論文集, No.550/V-33, 63-72, 1996
- 4) José Miranda Guedes and Noboru Kikuchi: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.83, p143-198, 1990
- 5) Kenjiro Terada, Kohei Yuge and Noboru Kikuchi: Elasto-Plastic Analysis of Composite Materials Using the Homogenization Method, 日本機械学会論文集(A編), 62巻601号, 1996
- 6) 寺田賢二郎, 菊池昇, 弓削康平:均質化法による複合材料の非線形解析, 構造工学における数値解析シンポジウム論文集第19巻, p231-236, 1995
- 7) 永井学志, 山田貴博, 和田章:画像データに基づくコンクリート材料の有限要素解析, 計算工学講演会論文集第2巻第3号, pp1103-1106, 1997
- 8) 市川康明:粘弾性材料の均質化解析, 土木学会第50回年次学術講演会, CS-17, pp34-35, 1996
- 9) 富田佳宏:数値弾塑性力学, 養賢堂, 1990
- 10) 狩野正人, 古田均, 渡邊英一, 杉浦邦征, 宇都宮智昭:ラプラス変換を用いた斜張橋の粘弾性挙動解析, 土木学会第49回年次学術講演会 1-320, 1995
- 11) R. A. Schapery, Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. Proceedings of the 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics Vol.2 1075-1085, 1962
- 12) 寺田賢二郎, 伊藤孝, 菊池昇:均質化法によって導かれる粘弾性体の構成則と数値解析, 計算工学講演会論文集第2巻第3号, p1119-1122, 1997
- 13) 宇尾朋之, 泉谷隆志, 樫山和男, 寺田賢二郎:均質化理論に基づくアスファルト混合物の粘弾性解析, 応用力学連合講演会講演予稿集, pp441-412, 1998
- 14) 鈴木隆介:地質工学基礎図表集, 創造社
- 15) 宇尾朋之, 樫山和男, 菅原勝彦, 尾原祐三, 寺田賢二郎:X線CTによるアスファルト混合物の可視化とモデリング手法の構築, 土木学会第53回年次学術講演会, 1998 (印刷中)
- 16) 永井学志, 山田貴博, 和田章:固定格子のための滑らかな界面を含む混合型有限要素の開発, 計算工学講演会論文集第3巻第2号, pp393-396, 1998

(1998年4月24日 受付)