

周期構造を有する梁構造物への均質化法の適用

Application of the Homogenization Method to Beam Member with Periodic Structures

京谷孝史*, 寺田賢二郎**

Takashi KYOYA and Kenjiro TERADA

*正会員 工博 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

**正会員 Ph.D. 東北大学講師 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (同 上)

A method to derive an equivalent beam model of a non-standard beam-like structure that possesses periodic microstructures is proposed based on the theory of homogenization. The fundamental equations of the Euler-Bernoulli beam is briefly reviewed, and a formal asymptotic expansion of the principle of virtual displacement is applied. The homogenized equation of a beam imbedding heterogeneity of structural constituent and the equation defining the characteristic deformation of the microstructure are derived. Then, the equivalent stiffness of the homogenized beam model is reasonably defined. A few examples of application of this proposed method are presented and the validity of this method is examined through an error estimation.

Key Words : homogenization theory of beam, equivalent homogenized stiffness

1. はじめに

均質化法の起源は、1880年代のLindstedtおよび1890年代のPoincareの特異摂動法の研究にまで遡る。LindstedtとPoincareは、初期値問題を対象に、解の摂動展開の際にスケールの異なる2つのパラメーター変数を導入することにより、発散項を除去しつつ展開形の各項を順次定めることができることを示した。その後、この手法は1950年代に盛んに用いられ、多くの境界値問題に適用された¹⁾。

さらに、1960年代後半から70年代に入ると、工学分野での複合材料の発達を背景として、その物性評価の有力な手法として注目されるようになり、仏²⁾、旧ソ連³⁾の数学者によって積極的に研究が推し進められた。特に、80年代以降、Lionsを中心とする仏の数学者グループによって、物理数学に現れる主な初期値・境界値問題への適用が系統的に研究され、現在の均質化法の理論的基礎が固められた^{4,5)}。

一方、80年代に入ると、米国を中心として均質化法を具体的に应用するための数値解析法が積極的に研究されるようになった。均質化法(Homogenization Method)の命名も米国においてこの手法を数値解析の観点から研究していたBabuskaによる⁶⁾。さらに、90年代に入ってから、米国ミシガン大学のKikuchiを中心とするグループによって、この手法の工学へのより高度な応用を意識した有限要素解析理論と具体的アルゴリズムの研究が推し進められている⁷⁻¹⁰⁾。

以上のような歴史の中で、当然のことながら、複合材を構造部材とする際の問題は早くから研究されており、板や殻についての均質化理論はほぼ完成されている^{11,12)}。また、その具体的な数値解析法も、既に線形のみならず非線形問題までを対象とした研究が数多く行われている⁸⁾。しかし、主として複合材の適用の対象が航空工学や機械工学の分野に限られていたためか、あるいは板や殻に比べて簡単な理論であると位置づけられたためかは定かではないが、数学的な興味からの研究はあるものの、応用を意識して均質化法を梁理論に適用している例は見あたらない。

しかしながら、実際の土木工学の現場では、軽量化のために穴を空けた梁材を典型例として、内部に周期的な構造を有する線状構造物が梁材として多く使用されている。そのような梁構造物の等価な剛性を簡単にしかも精度良く求める方法があれば、設計の際に大いに役立つものと考えられる。

そこで、本研究では、Euler-Bernoulli梁理論に対する均質化法の定式化を示し、周期構造を有する梁構造物をEuler-Bernoulli梁として扱う際の等価剛性を簡単に精度良く評価する手法を提示するものである。梁の振動問題を含め、いくつかの例題を示すと共に、構造全体がどれくらいの数の基本構造から成る周期構造を有していれば均質化理論に基づいた等価剛性の評価手法が適用可能であるかを合わせて検討している。

2. Euler-Bernoulli梁の基礎方程式とその弱形式化

対象とする梁構造物に対して図-1に示すような座標系を設定する。Euler-Bernoulli梁では、平面保持の仮説に基づいて、任意断面内の変位 w_i とひずみ e_{ij} を、中立軸の変位 u_i によって、それぞれ

$$\begin{aligned} w_1(x_1, x_3) &= u_1(x_1) - x_3 \frac{du_3(x_1)}{dx_1} \\ w_2(x_1, x_3) &= 0 \\ w_3(x_1, x_3) &= u_3(x_1) \end{aligned} \quad (1)$$

$$e_{11} = \frac{du_1}{dx_1} - x_3 \frac{d^2 u_3}{dx_1^2}, \quad (2)$$

$$e_{22} = e_{33} = e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0$$

と表す。また、応力は σ_{11} と σ_{13} の2つの成分のみを考え、それ以外の成分は0と仮定する。ただし、 σ_{13} は釣り合いを考えるとにのみ用いられ、応力ひずみ関係は σ_{11} と e_{11} の間にのみ導入される。

$$\sigma_{11} = \bar{E} e_{11} \quad (3)$$

ここに、 $\bar{E}$ は E_{ijkl} を材料の弾性係数として

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E_{1111} - E_{11pq} E_{pqrs}^{-1} E_{rs11} \\ (p, q), (r, s) &\neq (1, 1), (1, 3), (3, 1) \end{aligned}$$

で与えられる。

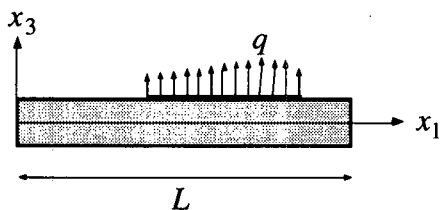


図-1 梁構造物と座標系

2つの応力成分 σ_{11} と σ_{13} から、軸力、せん断力および曲げモーメントを、それぞれ

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_{11} dA, \quad Q = \int_A \sigma_{13} dA, \\ M &= \int_A x_3 \sigma_{11} dA \end{aligned} \quad (4)$$

と定義する。せん断力に関する釣り合い式と、せん断力と曲げモーメントの関係式

$$\frac{dQ}{dx_1} + q + F_3 = 0, \quad \frac{dM}{dx_1} + m = Q \quad (5)$$

を踏まえて、釣り合い式は軸力と曲げモーメントに関する式

$$\frac{dN}{dx_1} + F_1 = 0, \quad \frac{d^2 M}{dx_1^2} + q + F_3 + \frac{dm}{dx_1} = 0 \quad (6)$$

だけとなる。上式中、 q は分布荷重、 F_i ($i=1,3$)は

物体力 f_i ($i=1,3$)の断面に亘る合力、 m は物体力 f_1 による分布モーメントであり、次式で定義される。

$$F_i = \int_A f_i dA, \quad m = \int_A x_3 f_1 dA \quad (7)$$

変位ひずみ関係式(2)と応力ひずみ関係式(3)を、断面力の定義式(4)に代入して整理すると、変位と断面力の関係として

$$\begin{Bmatrix} N \\ -M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A \bar{E} dA & -\int_A x_3 \bar{E} dA \\ -\int_A x_3 \bar{E} dA & \int_A x_3^2 \bar{E} dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du_1}{dx_1} \\ \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

を得る。ここで、上式中の係数マトリックスの非対角成分は、 x_1 軸が断面の図心を通る限り

$$\int_A x_3 \bar{E} dA = 0 \quad (9)$$

である。逆に、任意断面において(9)式が成立するような点 $x_3=0$ が中立軸を与えるとも解釈できる。

釣り合い式(6)の弱形式は

$$\int_0^L \left[\left(\frac{dN}{dx_1} + F_1 \right) v_1 + \left(\frac{d^2 M}{dx_1^2} + q + F_3 + \frac{dm}{dx_1} \right) v_3 \right] dx_1 = 0$$

$$\forall v_1 \in H^1(0, L), \quad \forall v_3 \in H^2(0, L) \quad (10)$$

となる。部分積分を行い式(8)を用いると、次の仮想仕事式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_3'' \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \int_A \bar{E} dA & -\int_A x_3 \bar{E} dA \\ -\int_A x_3 \bar{E} dA & \int_A x_3^2 \bar{E} dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_3'' \end{Bmatrix} dx_1 \\ &= \int_0^L \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_3' \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 + q \\ -m \end{Bmatrix} dx_1 + \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_3' \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ -M \end{Bmatrix} \Big|_0^L \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、変位、物体力、表面力の一般化ベクトルならびに一般化剛性行列を

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_3' \end{Bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_3' \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 + q \\ -m \end{Bmatrix}, \quad T = \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ -M \end{Bmatrix}, \\ \bar{D} &= \begin{bmatrix} \int_A \bar{E} dA & 0 & -\int_A x_3 \bar{E} dA \\ 0 & 0 & 0 \\ -\int_A x_3 \bar{E} dA & 0 & \int_A x_3^2 \bar{E} dA \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

のようにおくと、式(11)は次の簡潔な形になる。ここで $x_1 = x$ としている。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\frac{d\bar{v}}{dx} \right)^t \bar{D} \frac{d\bar{u}}{dx} dx = \int_0^L \bar{v}^t F dx + \left[\bar{v}^t T \right]_{x=0}^{x=L} \\ & \forall \bar{v} = \{ \bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3 \}^t \in V \end{aligned} \quad (13)$$

$$V = \left\{ \bar{v} \in [H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)] \mid \bar{v}_3 = \bar{v}_3' \text{ and } \bar{v} = 0 \text{ on } x \in \partial\Omega_u \right\}$$

ここに $\Omega = (0, L)$ であり、梁の構造全体の領域を表す。式(12), (13)のように表しておく都合がよいのは、式(12)の代わりに

$$\hat{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 - \Theta \\ \frac{du_3}{dx} \end{Bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ \frac{du_3}{dx} \end{Bmatrix}, \quad \hat{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 - \Theta \\ \frac{dv_3}{dx} \end{Bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ \frac{dv_3}{dx} \end{Bmatrix},$$

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 + q \\ -m \end{Bmatrix}, \quad T = \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ -M \end{Bmatrix}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \int_A \bar{E}_1 dA & \int_A \bar{E}_2 dA & -\int_A x_3 \bar{E}_1 dA \\ \int_A \bar{E}_2 dA & \int_A \bar{E}_3 dA & -\int_A x_3 \bar{E}_2 dA \\ -\int_A x_3 \bar{E}_1 dA & -\int_A x_3 \bar{E}_2 dA & \int_A x_3^2 \bar{E}_1 dA \end{bmatrix} \quad (14-1)$$

$$\Theta(x) = \int_0^x \theta(t) dt, \quad \frac{d}{dx}(u_3 - \Theta) = u_3' - \theta = \gamma,$$

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = E_{1111} - E_{11pq} E_{pqrs}^{-1} E_{rs11} \\ \bar{E}_2 = E_{1311} - E_{13pq} E_{pqrs}^{-1} E_{rs11} \\ \bar{E}_3 = E_{1313} - E_{13pq} E_{pqrs}^{-1} E_{rs13} \end{cases}, \quad (p, q), (r, s) \neq (1, 1), (1, 3), (3, 1)$$

式(13)の代わりに、仮想仕事式を

$$\int_0^L \left(\frac{d\hat{v}}{dx} \right)^t \bar{D} \frac{d\hat{u}}{dx} dx_1 = \int_0^L \bar{v}^t F dx + [\bar{v}^t T]_0^L \quad (14-2)$$

$$\forall \hat{v} \in V', \quad \forall \bar{v} \in V$$

$$V' = \left\{ \hat{v} \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \bar{v} = 0 \text{ on } x \in \partial\Omega \right\}$$

とすれば、次節において展開する議論をTimoshenko梁にそのまま拡張することができるからである。

以下、この式(12), (13)を基礎式として梁の均質化理論の定式化を示す。

3. 周期構造を有する梁構造物の均質化理論

図-2に示すような微視的周期構造を有する梁を考える。単位構造が数種類の材料で構成されることから、弾性係数は周期構造のスケール ε で急激に変化する関数となる。これを $\bar{E}^\varepsilon(x)$ と表す。これに応じて式(12)中の一般化剛性マトリックス $\bar{D}$ は、

$$\bar{D}^\varepsilon(x) = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11}^\varepsilon(x) & 0 & \bar{D}_{13}^\varepsilon(x) \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{D}_{13}^\varepsilon(x) & 0 & \bar{D}_{33}^\varepsilon(x) \end{bmatrix} \quad (15)$$

と表される。ここに、

$$\begin{cases} \bar{D}_{11}^\varepsilon(x) = \int_A \bar{E}^\varepsilon(x) dA \\ \bar{D}_{13}^\varepsilon(x) = -\int_A x_3 \bar{E}^\varepsilon(x) dA \\ \bar{D}_{33}^\varepsilon(x) = \int_A x_3^2 \bar{E}^\varepsilon(x) dA \end{cases} \quad (x = x_1, \quad x = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3\}^t)$$

と表している。さらに、こうした周期構造を反映して変位と物体力も同様に周期 ε で変化すると考えられるので、 $\bar{u}$, $\bar{v}$, F , T も同様にして

$$\bar{u}^\varepsilon(x) = \begin{Bmatrix} u_1^\varepsilon(x) \\ u_3^\varepsilon(x) \\ \frac{du_3^\varepsilon(x)}{dx} \end{Bmatrix}, \quad \bar{v}^\varepsilon(x) = \begin{Bmatrix} v_1^\varepsilon(x) \\ v_3^\varepsilon(x) \\ \frac{dv_3^\varepsilon(x)}{dx} \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

$$F^\varepsilon(x) = \begin{Bmatrix} F_1^\varepsilon(x) \\ F_3^\varepsilon(x) + q \\ -m^\varepsilon(x) \end{Bmatrix}, \quad T^\varepsilon(x) = \begin{Bmatrix} N^\varepsilon(x) \\ Q^\varepsilon(x) \\ -M^\varepsilon(x) \end{Bmatrix}$$

と表す。これらを式(13)に代入すると仮想仕事式は次のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\frac{d\bar{v}^\varepsilon(x)}{dx} \right)^t \bar{D}^\varepsilon(x) \frac{d\bar{u}^\varepsilon(x)}{dx} dx \\ &= \int_0^L (\bar{v}^\varepsilon(x))^t F^\varepsilon(x) dx + [(\bar{v}^\varepsilon(x))^t T(x)]_0^L \quad (17) \end{aligned}$$

$$\forall \bar{v}^\varepsilon \in V$$

上式中、 T に ε が付かないのは、それが境界において与えられる量であることによる。

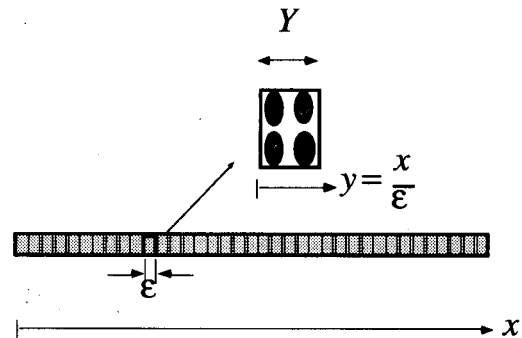


図-2 微視的周期構造を有する梁構造物

ここで、均質化理論の手法に従って、スケール ε で変化する周期関数を、巨視スケール変数 x と微視スケール変数 $y = x/\varepsilon$ の2変数の関数として次のよ

うに表す.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{D}}^\varepsilon(x) &= \bar{\mathbf{D}}(x, y) = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11}(x, y) & 0 & \bar{D}_{13}(x, y) \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{D}_{13}(x, y) & 0 & \bar{D}_{33}(x, y) \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{u}}^\varepsilon(x) &= \bar{\mathbf{u}}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_1(x, y) \\ u_3(x, y) \\ u'_3(x, y) \end{Bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{v}}^\varepsilon(x) &= \bar{\mathbf{v}}(x, y) = \begin{Bmatrix} v_1(x, y) \\ v_3(x, y) \\ v'_3(x, y) \end{Bmatrix}, \quad \left(y = \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ \mathbf{F}^\varepsilon(x) &= \mathbf{F}(x, y) = \begin{Bmatrix} F_1(x, y) \\ F_3(x, y) + q \\ -m(x, y) \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (18)$$

これらの関数は、微視的周期構造を反映した y に関しての周期性 (Y -周期性, Y -periodic)

$$\Psi(x, y + Y) = \Psi(x, y) \quad (19)$$

を有するとする^{4,5)}. こうしておいて、式(19)の変位成分 u_1 , u_3 を次のように摂動展開する.

$$\begin{cases} u_1^\varepsilon(x) = u_1^0(x) + \varepsilon u_1^1(x, y) \\ u_3^\varepsilon(x) = u_3^0(x) + \varepsilon u_3^1(x, y) + \varepsilon^2 u_3^2(x, y) \end{cases} \quad (20)$$

$u_3 \in H^2(0, L)$ に関して ε^2 オーダーまでの項が必要なのは、仮想仕事式(17)の中で2階導関数が必要であることによる. $y = x/\varepsilon$ であることに注意すると、(18)式の変位 およびその導関数は次のようになる.

$$\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon(x) = \bar{\mathbf{u}}^0(x) + \varepsilon \bar{\mathbf{u}}^1(x, y) + \varepsilon^2 \bar{\mathbf{u}}^2(x, y) \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^0(x) = \begin{Bmatrix} u_1^0(x) \\ u_3^0(x) \\ (u_3^0(x))' + \partial_y u_3^1(x, y) \end{Bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{u}}^1(x) = \begin{Bmatrix} u_1^1(x, y) \\ u_3^1(x, y) \\ \partial_x u_3^1(x, y) + \partial_y u_3^2(x, y) \end{Bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{u}}^2(x) = \begin{Bmatrix} 0 \\ u_3^2(x, y) \\ \partial_x u_3^2(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^{-1} + \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^0 + \varepsilon \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^1 \quad (22)$$

$$\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^{-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{yy} u_3^1 \end{Bmatrix},$$

$$\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^0 = \begin{Bmatrix} (u_1^0)' + \partial_y u_1^1 \\ (u_3^0)' + \partial_y u_3^1 \\ (u_3^0)'' + 2\partial_{xy} u_3^1 + \partial_{yy} u_3^2 \end{Bmatrix},$$

$$\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^1 = \begin{Bmatrix} \partial_x u_1^1 \\ \partial_x u_3^1 + \partial_y u_3^2 \\ \partial_{xx} u_3^1 + 2\partial_{xy} u_3^2 \end{Bmatrix}$$

$\bar{\mathbf{v}}^\varepsilon$ にも同様の展開を行い、仮想仕事式(17)に代入して ε について整理し、さらに $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行うと次の3式を得る.

(ε^{-2} に関して)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^L \left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}^\varepsilon}{dx} \right)^{-1t} \bar{\mathbf{D}}^\varepsilon \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^{-1} dx \right] = 0 \quad (23)$$

(ε^{-1} に関して)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^L \left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}^\varepsilon}{dx} \right)^{-1t} \bar{\mathbf{D}}^\varepsilon \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^0 dx \right. \\ \left. + \int_0^L \left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}^\varepsilon}{dx} \right)^{0t} \bar{\mathbf{D}}^\varepsilon \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^{-1} dx \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

(ε^0 に関して)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^L \left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}^\varepsilon}{dx} \right)^{-1t} \bar{\mathbf{D}}^\varepsilon \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^1 dx \right. \\ \left. + \int_0^L \left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}^\varepsilon}{dx} \right)^{0t} \bar{\mathbf{D}}^\varepsilon \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^0 dx \right. \\ \left. + \int_0^L \left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}^\varepsilon}{dx} \right)^{1t} \bar{\mathbf{D}}^\varepsilon \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon}{dx} \right)^{-1} dx \right] \\ = \int_0^L \bar{\mathbf{v}}^{0t} \mathbf{F}^\varepsilon dx + \left[\bar{\mathbf{v}}^{0t} \mathbf{T}(x) \right]_{x=0}^{x=L} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、次の y に関して Y -周期な関数についての積分の極限値に関する公式^{4,5)}

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \Psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) d\Omega = \int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y \Psi(x, y) dY d\Omega \quad (26)$$

を用いる.

まず、(23)式からは u_3^1 が微視スケール変数に関係せず $u_3^1 = u_3^1(x)$ であることが導かれる. 実際、式(23)に公式(26)を適用し、部分積分を行うと

$$\int_0^L \frac{1}{|Y|} \left[\int_0^Y v_3^1 \partial_{yy} (\bar{D}_{33} \partial_{yy} u_3^1) dy \right] dx \\ + \int_0^L \frac{1}{|Y|} \left[\partial_y v_3^1 \bar{D}_{33} \partial_{yy} u_3^1 - v_3^1 \partial_y (\bar{D}_{33} \partial_{yy} u_3^1) \right]_0^Y dx \\ = 0$$

を得るが、 v_3^1 , $\bar{D}_{33}$, u_3^1 の Y -周期性から第2項は0となり、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{D}_{33} \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial y^2} \right) = c_1(x) \quad (c_1(x) \text{ は任意関数})$$

に帰着する。これをユニットセルの領域 Y に亘って積分すると、 $\bar{D}_{33}$, u_3^1 の Y -周期性から

$$c_1(x)|Y| = \int_0^Y \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{D}_{33} \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial y^2} \right) dy = 0, \quad \therefore c_1(x) = 0$$

が導かれ、さらに低次の式

$$\bar{D}_{33} \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial y^2} = c_2(x) \quad (c_2(x) \text{ は任意関数})$$

に帰着する。これをまた Y に亘って積分すると、再び $\bar{D}_{33}$, u_3^1 の Y -周期性から $c_2(x) = 0$ が判るので、 $\bar{D}_{33} \neq 0$ であることから、さらに低次の式

$$\frac{\partial u_3^1}{\partial y} = c_3(x) \quad (c_3(x) \text{ は任意関数})$$

に帰着する。さらにまた Y に亘って積分すると、 u_3^1 の Y -周期性から $c_3(x) = 0$ が導かれ、 $u_3^1 = u_3^1(x)$ が結論付けられる。

この結果、式(21), (22)に与えられている変位およびその導関数は、

$$\bar{u}^\varepsilon = \bar{u}^0(x) + \varepsilon \bar{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \bar{u}^2(x, y) \\ = \begin{Bmatrix} u_1^0(x) \\ u_3^0(x) \\ (u_3^0(x))' \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} u_1^1(x, y) \\ 0 \\ \partial_y u_3^2(x, y) \end{Bmatrix} + \varepsilon^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ u_3^2(x, y) \\ \partial_x u_3^2(x, y) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$\frac{d\bar{u}^\varepsilon}{dx} = \begin{Bmatrix} (u_1^0)' + \partial_y u_1^1 \\ (u_3^0)' \\ (u_3^0)'' + \partial_{yy} u_3^2 \end{Bmatrix} + \varepsilon \begin{Bmatrix} \partial_x u_1^1 \\ \partial_y u_3^2 \\ 2\partial_{xy} u_3^2 \end{Bmatrix} \quad (28) \\ = \left(\frac{d\bar{u}^0}{dx} + \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial y} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial y} \right)$$

と書き換えられる。仮想変位 $\bar{v}^\varepsilon$ も同様である。式(28)を(21)式と比較すれば明らかなように、この変位は $(d\bar{u}^\varepsilon/dx)^{-1} = 0$ となるので、 ε^{-1} オーダーに関

する式(24)は自明的に満たされる。

また、 ε^0 オーダーの式(25)は、公式(26)の適用により

$$\int_0^L \frac{1}{|Y|} \int_0^Y \left(\frac{d\bar{v}^0}{dx} + \frac{\partial \bar{v}^1}{\partial y} \right)^t \bar{D} \left(\frac{d\bar{u}^0}{dx} + \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial y} \right) dy dx \\ = \int_0^L \bar{v}^{0t} \left(\frac{1}{|Y|} \int_0^Y F^\varepsilon dy \right) dx + \left[\bar{v}^{0t} T(x) \right]_0^L \quad (29)$$

$$\forall \bar{v}^0 \in V, \quad \forall \bar{v}^1 \in V^1$$

$$V^1 = \left\{ \bar{v} \in \left[H^1(\Omega \times Y) \times H^2(\Omega \times Y) \times H^1(\Omega \times Y) \right] \right. \\ \left. \begin{array}{l} \bar{v}_3 = \bar{v}_3' \text{ and } \bar{v} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ \text{and } y \rightarrow \bar{v}(x, y) \text{ is } Y\text{-periodic} \end{array} \right\}$$

と書き換えられ、さらに、任意の $\bar{v}^0$ と $\bar{v}^1$ について成立せねばならないことから、次の2つの方程式を得る。

$$\int_0^Y \left(\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial y} \right)^t \bar{D} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial y} dy = \int_0^Y \left(\frac{\partial \bar{v}^1}{\partial y} \right)^t \bar{D} dy \left(-\frac{d\bar{u}^0}{dx} \right) \quad (30)$$

$$\forall \bar{v}^1 \in V^1$$

$$\int_0^L \left(\frac{d\bar{v}^0}{dx} \right)^t \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_0^Y \bar{D} \left(\frac{d\bar{u}^0}{dx} + \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial y} \right) dy \right\} dx \\ = \int_0^L \bar{v}^{0t} \left(\frac{1}{|Y|} \int_0^Y F dy \right) dx + \left[\bar{v}^{0t} T(x) \right]_0^L \quad (31)$$

$$\forall \bar{v}^0 \in V$$

こうして得られた式(30)は、周期構造の基本単位(ユニットセル)に関する微視的な視点に立つ方程式であり、1次の摂動項 $\bar{u}^1$ を与える。一方、式(31)は構造全体に関する巨視的な視点に立つ方程式であり、式(30)で定められる $\bar{u}^1$ を取り込んで構造全体の平均挙動 $\bar{u}^0$ を定める。二つの式のこうした関係は、内部に周期構造を含む構造体の平均挙動は基本構造(ユニットセル)によって決定付けられる、という物理的事実を反映している。

さて、式(30)において $(-d\bar{u}^0/dx) = 1$ とおいた方程式

$$\int_0^Y \left(\frac{\partial \bar{v}_K}{\partial y} \right)^t \bar{D}_{KJ} \frac{\partial \chi_J^I}{\partial y} dy = \int_0^Y \frac{\partial \bar{v}_K}{\partial y} \bar{D}_{KI} dy \quad (32)$$

$$= - \int_0^Y \bar{v}_K \frac{\partial \bar{D}_{KI}}{\partial y} dy \quad \forall \bar{v} \in V_\chi^1$$

$$V_\chi^1 = \left\{ \bar{v} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_1(x, y) \\ 0 \\ \bar{v}_3(x, y) \end{Bmatrix} \mid \bar{v}_1, \bar{v}_3 \in H^1(\Omega \times Y), \right. \\ \left. y \rightarrow \bar{v}(x, y) \text{ is } Y\text{-periodic} \right\}$$

は、右辺の重み関数の領域 Y に亘る積分が

$$\int_0^Y \frac{\partial \bar{D}^{IJ}(x, y)}{\partial y} dy = [\bar{D}^{IJ}(x, y)]_{y=0}^{y=Y} = 0$$

のように $\bar{D}$ の Y -周期性により 0 となるので、 y に関して Y -周期性を持つベクトル

$$\chi^1, \chi^3 \in V_\chi^1$$

$$\chi^1 = \begin{Bmatrix} \chi_1^1(x, y) \\ 0 \\ \chi_3^1(x, y) \end{Bmatrix}, \chi^3 = \begin{Bmatrix} \chi_1^3(x, y) \\ 0 \\ \chi_3^3(x, y) \end{Bmatrix} \quad (33)$$

を解として持つことが保証される^{4,5)}。

したがって、問題とは無関係で式(32)からは定まらない χ^2 を形式的に $\chi^2 = 0$ とおくと、 χ^1, χ^3 と合わせて式(30)式を満たす $\bar{u}^1(x, y)$ の一般解が

$$\bar{u}_K^1(x, y) = -\chi_K^J(x, y) \frac{d\bar{u}_J^0(x)}{dx} + \bar{u}(x) \quad (34)$$

($I, J, K = 1, 2, 3$)

と表される。これが解であることは実際に式(34)を式(30)に代入すれば容易に確かめられる。式(34)において、 $\bar{u}(x)$ はユニットセルの剛体変位に相当する任意関数である。

こうして得られた $\bar{u}^1$ を、式(31)に代入すると、構造全体に関する方程式は次のようになる。

$$\int_0^L \frac{d\bar{v}_I^0}{dx} \bar{D}_{IJ}^{(H)}(x) \frac{d\bar{u}_J^0(x)}{dx} dx = \int_0^L \bar{v}_I^0 F_I^{(H)}(x) dx + [\bar{v}_I^0 T_I(x)]_0^L \quad (35)$$

ここに、

$$\bar{D}_{IJ}^{(H)}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_0^Y \left(\bar{D}_{IJ}(x, y) - \bar{D}_{IK}(x, y) \frac{\partial \chi_K^J}{\partial y} \right) dy \quad (36)$$

$$F_I^{(H)}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_0^Y F_I(x, y) dy \quad (37)$$

これらは、梁構造物の周期構造をなすユニットセルに対して、式(36)および(37)によって与えられる剛性と物体力を用いて元の境界値問題を解けば、梁構造物全体の平均変位が得られることを表している。この意味において、 $\bar{D}^{(H)}$ が梁構造物の均質化剛性行列、 $F^{(H)}$ が均質化物体力ベクトルである。

4. 周期構造を有する梁構造物の等価剛性

ここでは前節の議論に基づいて、周期構造を有する梁構造物の等価剛性を算定する具体的方法を導く。

2節で述べたように、平面保持の仮定の下で x 座標軸が中立軸に選ばれる限り、剛性行列の非対角成

分は 0 となり、式(18)の $\bar{D}$ は次のような形となる。

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11}(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_{33}(x, y) \end{bmatrix} \quad (38)$$

したがって式(36)の均質化剛性行列は

$$\bar{D}_{IJ}^{(H)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|Y|} \int_0^Y \bar{D}_{11} \left(1 - \frac{\partial \chi_1^1}{\partial y} \right) dy & 0 & -\frac{1}{|Y|} \int_0^Y \bar{D}_{11} \frac{\partial \chi_1^3}{\partial y} dy \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{|Y|} \int_0^Y \bar{D}_{33} \frac{\partial \chi_3^1}{\partial y} dy & 0 & \frac{1}{|Y|} \int_0^Y \bar{D}_{33} \left(1 - \frac{\partial \chi_3^3}{\partial y} \right) dy \end{bmatrix} \quad (39)$$

となる。

一方、式(38)を微視問題(32)式に代入すると次の二つの式を得る。

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{v}_1^1}{\partial y} \bar{D}_{11} \frac{\partial \chi_1^1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_3^1}{\partial y} \bar{D}_{33} \frac{\partial \chi_3^1}{\partial y} \right) dy = \int_0^1 \frac{\partial \bar{v}_1^1}{\partial y} \bar{D}_{11} dy \quad (40)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{v}_1^1}{\partial y} \bar{D}_{11} \frac{\partial \chi_1^3}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_3^1}{\partial y} \bar{D}_{33} \frac{\partial \chi_3^3}{\partial y} \right) dy = \int_0^1 \frac{\partial \bar{v}_3^1}{\partial y} \bar{D}_{33} dy \quad (41)$$

このうち、まず式(40)について諸変数の Y -周期性を考慮して部分積分を行うと、 $\bar{v}_1^1$ と $\bar{v}_3^1$ の任意性から次の二つの式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \bar{D}^{11} \left(1 - \frac{\partial \chi_1^1}{\partial y} \right) \right\} = 0 \quad (42-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{D}^{33} \frac{\partial \chi_1^3}{\partial y} \right) = 0 \quad (42-2)$$

すると、(42-1)式からは

$$1 - \frac{\partial \chi_1^1}{\partial y} = \frac{c(x)}{\bar{D}_{11}(x, y)} \quad (c(x) \text{ は任意関数}) \quad (43)$$

が導かれ、この両辺を領域 Y に亘って積分すると、 χ_1^1 の Y -周期性により、 $c(x)$ が

$$c(x) = \frac{1}{\frac{1}{|Y|} \int_0^Y \frac{dy}{\bar{D}_{11}(x, y)}} = \frac{1}{\langle 1/\bar{D}_{11} \rangle} \quad (44)$$

と定まる。ここで、 $\langle * \rangle$ は領域 Y での平均量

$$\langle f \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_0^Y f(y) dy$$

を表すものとする。

この結果を式(43)に返し、さらに式(39)と比較すれば、 $\bar{D}_{11}^{(H)}$ が次式で与えられることが判る。

$$\bar{D}_{11}^{(H)} = \frac{1}{\langle 1/\bar{D}_{11}(x, y) \rangle} \quad (45)$$

一方、式(42-2)からは $\chi_1^3 = \chi_1^3(x)$ が導かれ、結果として $\bar{D}_{13}^{(H)} = 0$ を得る。

同様に、式(41)に対しても、式(42)から(45)までのような操作を行うと、 $\bar{D}_{31}^{(H)} = 0$ であること、および

$$\bar{D}_{33}^{(H)} = \frac{1}{\langle 1/\bar{D}_{33}(x, y) \rangle} \quad (46)$$

という結果を得る。

したがって、以上の結論として、周期構造を有する梁構造物の軸方向の等価剛性 $\bar{E}A^{(H)}$ と等価曲げ剛性 $\bar{E}I^{(H)}$ は、その構造のユニットセルの各断面における断面量

$$\bar{D}_{11}(x, y) = \int_A \bar{E} dA = \bar{E}A(x, y)$$

$$\bar{D}_{33}(x, y) = \int_A x_3^2 \bar{E} dA = \bar{E}I(x, y)$$

のユニットセルにおける逆数平均によって、

$$\frac{1}{\bar{E}A^{(H)}} = \langle 1/\bar{D}_{11} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_0^Y \frac{dy}{\bar{D}_{11}(x, y)} \quad (47-1)$$

$$\frac{1}{\bar{E}I^{(H)}} = \langle 1/\bar{D}_{33} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_0^Y \frac{dy}{\bar{D}_{33}(x, y)} \quad (47-2)$$

のように極めて簡単な形で与えられることが示された。

5. 適用例と誤差評価

等価剛性を与える式(47)は、3節での理論展開から明らかなように、周期構造の基本単位であるユニットセルの構造全体に対する相対寸法 ε を無限小として導かれたものである。しかし、実際に対象となる構造物では、ユニットセルの寸法は全体構造の寸法に比べて決して小さくはない。それでは、梁構造物がどの程度数のユニットセルで構成されていれば、式(47)で与えられる等価剛性が適用可能となるのだろうか。以下にいくつかの適用例を示し、軸方向剛性よりも敏感であると考えられるので、特に曲げ剛性に注目してこの点を検討する。

5.1 ウェブに穴の空いたI-型断面の梁

図-3に示すように、ウェブに穴のあいたI-型断面の梁材を考える。穴の形状は図-4に示すCase(A)から(D)までの4通りとする。4ケースの穴の面積は全て0.36である。

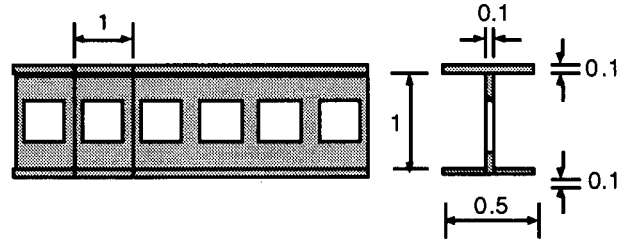


図-3 ウェブに穴の空いたI-型断面の梁

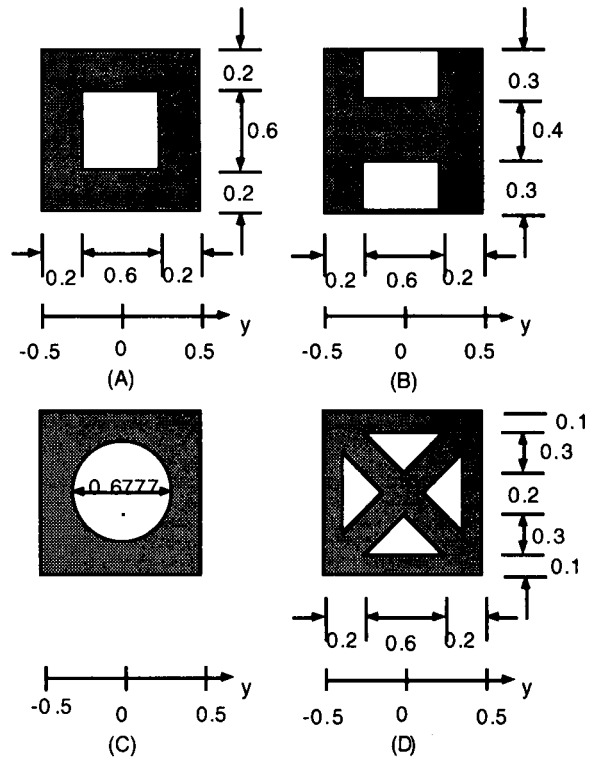


図-4 ウェブの穴の形状

各ケースにおけるユニットセルについて、 $\bar{E}I(y)$ とそれを用いて式(47)によって算定した等価剛性はそれぞれ次のようである。

Case(A):

$$\bar{E}I(y) = \begin{cases} 3.687 \times 10^{-2} \bar{E} & 0 \leq |y| \leq 0.3 \\ 3.867 \times 10^{-2} \bar{E} & 0.3 \leq |y| \leq 0.5 \end{cases}$$

$$\bar{E}I^{(H)} = \frac{1}{\langle 1/\bar{E}I(y) \rangle} = 3.757 \times 10^{-2} \bar{E}$$

Case(B):

$$\bar{EI}(y) = \begin{cases} 3.087 \times 10^{-2} \bar{E} & 0 \leq |y| \leq 0.3 \\ 3.867 \times 10^{-2} \bar{E} & 0.3 \leq |y| \leq 0.5 \end{cases}$$

$$\bar{EI}^{(H)} = \frac{1}{\langle 1/\bar{EI}(y) \rangle} = 3.358 \times 10^{-2} \bar{E}$$

Case(C):

$$\bar{EI}(y) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{15} \left(\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{0.36}{\pi} - y^2} \right) + 0.03 \right\} \bar{E} & 0 \leq |y| \leq \sqrt{\frac{0.36}{\pi}} \\ 3.867 \times 10^{-2} \bar{E} & \sqrt{\frac{0.36}{\pi}} \leq |y| \leq 0.5 \end{cases}$$

$$\bar{EI}^{(H)} = \frac{1}{\langle 1/\bar{EI}(y) \rangle} = 3.761 \times 10^{-2} \bar{E}$$

Case(D):

$$\bar{EI}(y) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{15} (y+0.1)^3 + 3.440 \times 10^{-2} \right\} \bar{E} & 0 \leq |y| \leq 0.1 \\ (0.04y^2 + 3.453 \times 10^{-2}) \bar{E} & 0.1 \leq |y| \leq 0.3 \\ \left\{ \frac{1}{15} (-y+0.1)^3 + 3.867 \times 10^{-2} \right\} \bar{E} & 0.3 \leq |y| \leq 0.4 \\ 3.867 \times 10^{-2} \bar{E} & 0.4 \leq |y| \leq 0.5 \end{cases}$$

$$\bar{EI}^{(H)} = \frac{1}{\langle 1/\bar{EI}(y) \rangle} = 3.663 \times 10^{-2} \bar{E}$$

この結果から、同じ面積の穴を明けて軽量化を図るならば円形が一番有利であることが判る。

次に、図-5に示すような片持ち梁として、上の4つのケースについて、ユニットセルの数を2個から10個まで2個ずつ増やしていき、上に得られた等価曲げ剛性を用いた場合のたわみ曲線

$$\begin{cases} \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{\bar{EI}^{(H)}} = \frac{p(L-x)}{\bar{EI}^{(H)}} \\ v = \frac{dv}{dx} = 0, \quad \text{at } x=0 \end{cases} \quad (48)$$

と、その厳密解

$$\begin{cases} \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{\bar{EI}(y)} = \frac{p(L-x)}{\bar{EI}(y)}, \quad y = \frac{x}{\epsilon} \\ v = \frac{dv}{dx} = 0, \quad \text{at } x=0 \end{cases} \quad (49)$$

を計算した。そして、各ユニットセルの中央と端点での変位を比較して次式によって誤差評価を行った。

$$err = \frac{\|v^{(h)} - v^{(e)}\|}{\|v^{(e)}\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2N} (v_i^{(h)} - v_i^{(e)})^2}{\sum_{i=1}^{2N} (v_i^{(e)})^2}} \quad (50)$$

ここに、 $v^{(h)}$ は等価曲げ剛性を用いた場合のたわみ、 $v^{(e)}$ は厳密解であり、 N は片持ち梁を構成するユニットセルの個数である。

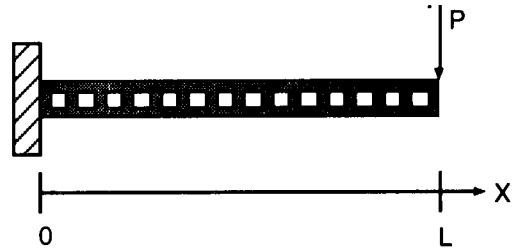


図-5 片持ち梁と荷重条件

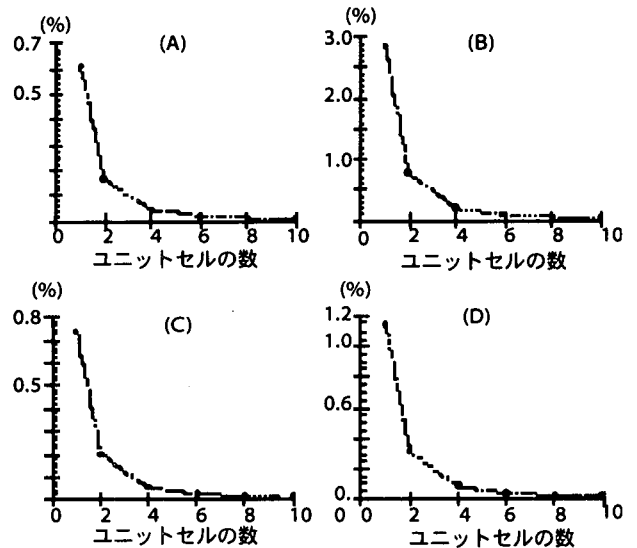


図-6 ユニットセルの個数と誤差の変化

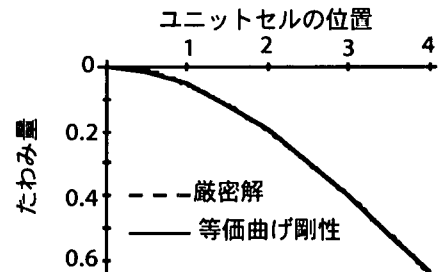


図-7 たわみ曲線の例
(ケース(D), ユニットセル4個)

図-6に、ユニットセルの個数を増加させたときの誤差指標の減少の様子を示す。4個以上のユニットセルを含めば、全てのケースにおいて誤差は1%以下になっている。すなわち、ユニットセルの全体に対する相対寸法 ϵ が0.25以下ならば、式(47)で算定される等価剛性は十分な精度でたわみ曲線を与えることが判る。図-7には、Case(D)のユニットセル4個で構成された片持ち梁のたわみ曲線を示す。等価曲げ剛性を用いた曲線は厳密解とほとんど一致している。

5.2 ユニットセルが変化する梁構造物

式(36)によればユニットセルは巨視変数 x によって変化してもよい。そのことを確認するために、図-8に示すように周期構造のユニットセルが変化する梁を考える。図の梁では正方形の穴が周期的に配置されているが、 i 番目のユニットセルでは正方形穴の辺の長さ a が、全ユニットセル数を N として $a = 0.8(i/N)$ となっている。

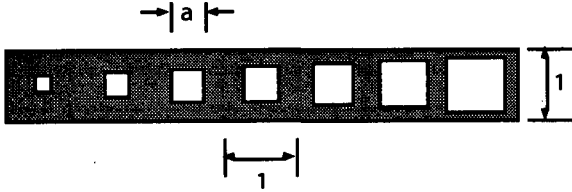


図-8 ユニットセルが変化する梁構造物

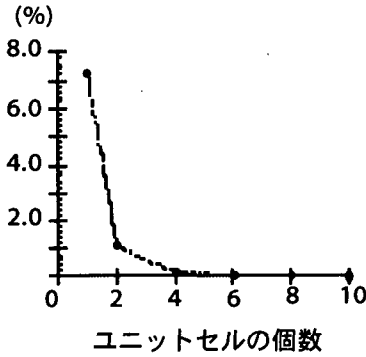


図-9 ユニットセルの個数と誤差の変化

このような場合、ユニットセルの任意断面の曲げ剛性は巨視スケール変数 $x(=i/N)$ にも関係し、次式のように表される。

$$\bar{EI}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{12} \left\{ 1 - \left(0.8 \frac{i}{N} \right)^3 \right\} \bar{E} & 0 \leq |y| \leq 0.4 \left(\frac{i}{N} \right) \\ \frac{1}{12} \bar{E} & 0.4 \left(\frac{i}{N} \right) \leq |y| \leq 0.5 \end{cases}$$

この場合、等価曲げ剛性は、各ユニットセルが周期的に存在する時の平均物性が巨視変数 $x(=i/N)$ の関数として評価されて

$$\bar{EI}^{(H)}(x) = \frac{1}{12} \frac{1 - \left(0.8 \frac{i}{N} \right)}{\left\{ 1 - \left(0.8 \frac{i}{N} \right)^3 \right\} + \left(0.8 \frac{i}{N} \right)^4} \bar{E}$$

となる。

この梁構造物を、5.1節と同様に図-5に示す片持ち梁として扱い、ユニットセルを増やしながらたわみ曲線を求めて誤差評価を行った。

結果を図-9に示す。5.1節と同様、全体構造がユニットセル4個以上で構成されていれば誤差は1%

以下になっている。

5.3 梁構造物の曲げ振動の固有振動数の評価

周期構造を有する梁の固有値問題は、

$$\int_0^L \bar{EI}^\varepsilon \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \omega^2 \int_0^L m^\varepsilon v w dx = 0 \quad (51)$$

と表される。これを基礎式として、3節と同様にして変位を摂動展開して $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限操作を行うと、最終的に梁の曲げ振動における等価曲げ剛性と等価質量が、それぞれ

$$\bar{EI}^{(H)} = \frac{1}{|Y|} \int_0^Y \bar{EI}^\varepsilon \left(1 - \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) dy \quad (52)$$

$$m^{(H)} = \frac{1}{|Y|} \int_0^Y m^\varepsilon dy \quad (53)$$

で与えられることが導かれる。

式(52)は式(39)の $\bar{D}_{33}^{(H)}$ と一致する。したがって、式(47-2)に従って等価剛性を算定すればよい。また、式(53)は、等価質量がユニットセルにおける質量の平均値で与えられることを示している。

これらの式を用いて、図-10に示すような梁構造物の曲げ振動における固有振動数を求める。図のユニットセルから等価曲げ剛性と等価質量は

$$\bar{EI}^{(H)} = \frac{1}{12} \frac{1 - b^3}{(1 - b^3) + ab^3} \bar{E} \quad (59)$$

$$m^{(H)} = (1 - ab)\rho \quad (60)$$

と算定される。また、固有振動数はこれらを用いて

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\bar{EI}^{(H)}}{m^{(H)}}} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (61)$$

と評価される。

一方、図-10に示すように、各ユニットセル毎に6つの梁要素を対応させた有限要素モデルを準備して、ユニットセルの数を増加させながら最小固有振動数 ω_1 を逆反復法によって求めた。

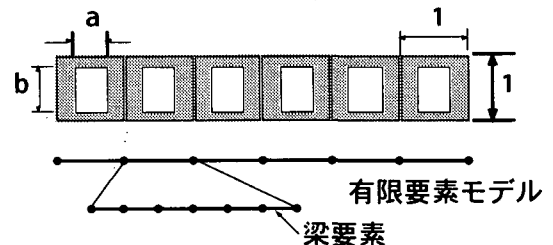


図-10 周期構造を有する梁構造物と有限要素モデル

こうして有限要素モデルによって算定される値 $\omega_1^{(F)}$ を真値として、式(61)による値 $\omega_1^{(H)}$ の誤差を次式によって評価した。

$$err = \left| \omega_1^{(H)} - \omega_1^{(F)} \right| / \omega_1^{(F)} \quad (62)$$

なお、これらの計算では、材料定数は $\bar{E} = 1$, $\rho = 1$ とし、穴の大きさは $a = 0.5$, $b = 0.8$ に設定した。

結果を図-11に示す。全体構造がユニットセル2個以上で構成されていれば、その固有振動数は式(61)によって十分な精度で評価できることが判る。

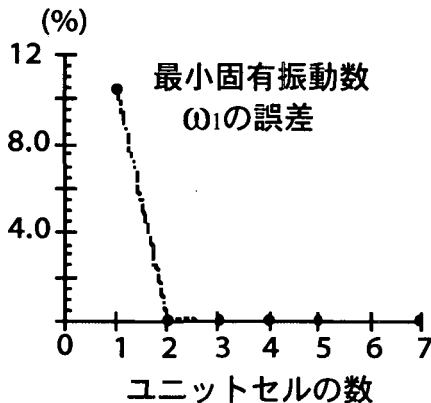


図-11 ユニットセルの数と最小固有振動数の評価における誤差

6. おわりに

本研究では、周期構造を有する梁構造物の均質化理論の定式化を行い、それに基づいてそうした梁材をEuler-Bernoulli梁として扱う際の等価剛性を簡単にしかも精度良く評価する手法を提示した。そして、いくつかの適用例題を示すと共に、それらの例題を通して、周期構造全体がどれくらいの数の基本構造から構成されていれば提案手法が適用可能であるかを検討した。

その結果、対象とする梁構造物が、基本単位構造が4つ程度繰り返される周期構造で形成されていれば、提案手法によって得られる等価剛性はたわみ変形を1%以下の誤差で与え得ることが判り、与えられた境界条件下での微視的構造を有する梁構造物のEuler-Bernoulli梁としての変形挙動は、局所的な性質ではなく、総体的な性質で決まることが明らかとなった。

実際の工学の現場では、周期構造を有する梁部材は色々な場面で用いられている。本研究で提示した手法はそうした構造物の設計に際して有効な手段を提供するものと考えらる。

参考文献

- 1) Smith, D. R. : *Singular perturbation theory*, Cambridge University Press, 1985.
- 2) Benssousan, A., Lions, J.L. and Papanicoulau, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- 3) Bakhvalov, N. and Panasenko, G.: *Homogenization : Averaging Processes in Periodic Media*, Kluwer Academic Pub., 1984.
- 4) Sanchez-Palencia, E.: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Note in Physics, No.127., Berlin, Springer, 1980.
- 5) Lions, J.L. : *Some Methods in Mathematical Analysis of Systems and their Control*, Beijing, China, Science Press, 1981.
- 6) Babuska, I. : Homogenization Approach in Engineering, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*. (R. Glowinski, and J. L. Lions, Eds.), pp. 137-153. Lecture Note in Economics and Mathematical Systems Vol. 134., Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- 7) Guedes, J. M., and Kikuchi, N. : Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 83, pp.143-198, 1990.
- 8) Takano, N., Zako, M., and Kikuchi, N. : Stress analysis of sandwich plate by the homogenization method, *Materials Science Research International*, Vol. 1, pp. 82-88, 1995.
- 9) 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池昇: 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第1報, 定式化), 日本機械学会論文集, Vol. 61, pp. 2199-2205, 1995.
- 10) Kyoya, T., Terada, K. and Kawamoto, T. : Muti-scale limit load analysis of discontinuous rock mass based on the homogenization method, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, submitted.
- 11) Ciarlet, P.G. ed. : Plate and junctions in elastic multi-structures- an asymptotic analysis, *Recherches en Mathematiques Appliquees sous la direction de Ciarlet, P. G. et Lions, J. L., eds.* Vol. RMA 14, MASSON; Springer-Verlag: Paris Milan Barcelone, 1990.
- 12) Kohn, R.V. and Vogelius, M. : A new model for thin plates with rapidly varying thickness, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20: pp.333-350, 1984.

(1998年4月24日 受付)