

非均質材料のためのマルチスケール解析モデリングについて

Multi-scale Analysis Modelling for Heterogeneous Media

寺田賢二郎*, 堀 宗朗**, 京谷孝史***

Kenjiro TERADA, Muneo HORI and Takashi KYOYA

* 正会員 Ph.D. 東北大学講師 情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

** 正会員 Ph.D. 東京大学助教授 地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

*** 正会員 工博 東北大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

The homogenization method is examined in conjunction with the method of representative volume elements (RVE). When the digital image-based modeling technique enables us to model the complex geometry of microstructures, the boundaries of unit cells fail to have the geometric periodicity. Nonetheless, the effective moduli are reasonably estimated by the homogenization with periodic boundary conditions. This fact is justified theoretically and simulated along with the notion of homogenization convergence. In addition to the convergence of effective moduli with respect to the size of RVEs, the microscopic mechanical behaviors are examined in comparison with macroscopic ones. Thus, the multi-scale nature of the analysis modeling by the asymptotic homogenization is characterized by carrying out a series of linear and nonlinear numerical analyses.

Key Words: Homogenization Method, Representative Volume Elements, Periodicity, Multi-scale Analysis

1. はじめに

均質化法の理論^{1),2)}は、急激に値を変える係数を有する微分方程式論、あるいは異なるスケールを関連づけるパラメータを用いた特異摂動法として展開される。この理論によってマイクロおよびマクロスケールに対して異なる空間座標を用いた漸近挙動を調べることで、非均質材料の等価物性の評価に代表されるような、両スケールにまたがった数学モデルの構築が可能になる。また、その物理的側面ではマイクロメカニクス³⁾などの理論との整合性を持つことから、非均質材料のためマルチスケール解析手法として工学分野での幅広い応用が期待されている⁴⁾。

均質化法の定式は数値解析を前提にしているため、実際の複合材料への適用性が確認⁵⁾されると、ミクロスケールで観察される非常に複雑な構造を厳密にモデル化する技術が要求される。これを受けて Ghosh ら⁶⁾は、Voronoi 細胞有限要素法を微視構造の解析に適用することにより、微視的に非均一な材料配置の影響を均質化法の解析に取り入れたが、解析のためのモデル化は複雑になり、平面問題に限った報告になっている。これに対して Hollister ら⁷⁾は、人骨の微視構造モデルをX線CTスキャナーからの画像データをデジタル化し、1画素を1有限要素として解析する手法を提案した。この手法は、Terada ら⁸⁾によってデジタル画像有限要素モデリングとして一般の複合材料の解析へと応用され、均質化法とともに非均質材料の強力な解析ツールとして注目されている。

しかし、一般の非均質材料の微視構造に対して代表体積要素 (RVE) をイメージベースで定義する際、RVE 境界において幾何学的な周期性が保たれない。したがって、広範な分野にこのモデリング手法を適用するためには、変数

の周期性を仮定する均質化法が適切な解を与えるか否か等の問題について、RVE を導入する等価物性評価手法 (RVE 法)³⁾の側面から検討する必要がある。

本研究では、デジタル画像有限要素モデリングを併用した均質化法の解析の RVE 法としての妥当性を検討する。RVE に対する境界条件について理論的に考察し、微視構造に幾何学的な周期性が保たれない非均質材料に対して周期境界条件を用いる均質化法の適用性を検証する。RVE 領域の大きさと均質化弾性係数との関連^{9),10)}を数値的に調べることで、漸近展開法に基づく均質化法とデジタルイメージを用いたモデル化を組み合わせた物性評価法の適用性が示される。同様に、微視構造領域内に分布するミクロ応力および均質化法による弾塑性応答解析についてもマルチスケール解析法としての観点から考察する。

2. 代表体積要素 (RVE) 法としての均質化法

2.1 代表体積要素と境界条件

基本的な微視的構造要素の代表長さが ε で表されるような不均質な線形弾性材料を考える。 ε に依存した弾性係数テンソルを $\mathbf{a}^\varepsilon$ と表すと、この複合材料の力学的性質についての第一の興味は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のときにどのような弾性係数を持つかであろう。これに対して均質化法の数学理論¹⁰⁾では、不均質性を有する複合材料が等価な均質体に置き換えられるとしており、 $\mathbf{a}^\varepsilon$ の材料をもつ構造物の実際の変位 $\mathbf{u}^\varepsilon$ が、均質な弾性定数テンソル $\mathbf{a}^H$ を持つ構造物の変位 $\mathbf{u}^0$ に収束することを主張している。

この等価な均質体の弾性特性を得るためには、まず図-1に示されるような ε よりもさらに大きな代表長さ δ を有する体積要素 (RVE) を考え、空間座標 $\mathbf{y}$ を測度とする領

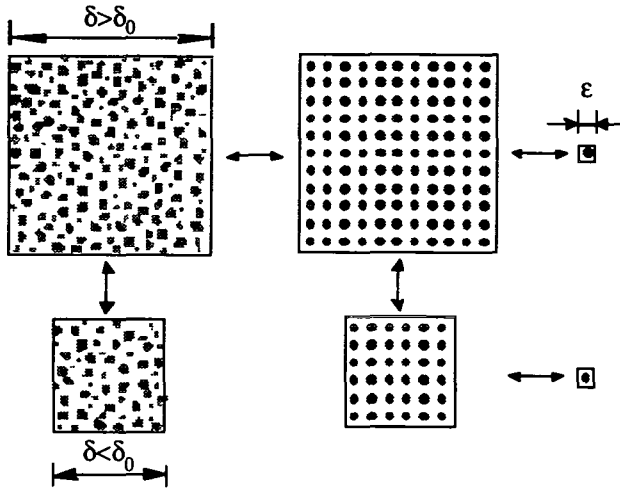


図-1：非均質材料の代表体積要素と基本構造単位

域 V を定義する。ある荷重状態におけるこの RVE の応答は、次の釣り合い問題で記述される。

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^0 = 0 \text{ in } V \\ \sigma^0(y) = a(y) : (\partial w); w \in \mathcal{D}^1 \end{cases} \quad (1)$$

ただし、ただし、これらは分布の意味で成立し、 σ^0 はミクロ応力、 ∂w はミクロひずみで、

$$(\partial w)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial y_j} + \frac{\partial w_j}{\partial y_i} \right) \quad (2)$$

と定義されており、 $:$ はテンソルのトレース演算子である。また、 $\mathcal{D}^1$ は、 $H^1(V)^3$ を 1 階の Sobolev 空間としたときの部分空間であり、RVE に課せられる境界条件に関係なく (1) を満たす解が存在することが知られている⁹⁾。

この境界条件に対するこの問題の解は、定ひずみテンソル E と変動項 w^1 を用いて、

$$w = E \cdot y + w^1 \quad (3)$$

で表され、 w^1 を与えられた境界条件の下で求めることで等価物性評価に用いられる。古典的な複合材の力学理論では、RVE の境界で一定応力を与えてコンプライアンス $\bar{a}^{-1}$ を得る方法と、一定ひずみを与えて剛性 $\hat{a}$ を求める方法が代表的であるが、これらは変動項 w^1 を許容関数空間

$$\mathcal{D}^1 = \{v \in H^1(V)^3 \mid \int_V v dV = 0\} \quad (4)$$

$$\mathcal{D}^1 = \{v \in H^1(V)^3 \mid v = 0 \text{ on } \partial V\} \quad (5)$$

から解を見つけることにそれぞれ対応する⁹⁾。また、任意の定ひずみ E に対して、

$$E : \bar{a} : E \leq E : \hat{a} : E \quad \forall E \quad (6)$$

および、十分大きな δ に対して、

$$\hat{a} : \bar{a}^{-1} = I_{(2)} + O((\varepsilon/\delta)^3) \quad (7)$$

なる関係が得られている¹¹⁾。ここで、 $I_{(2)}$ は 2 階の単位テンソルである。このことは、

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \hat{a}^\delta = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \bar{a}^\delta = a^H \quad (8)$$

を意味するものであり、RVE が統計的均質性¹²⁾ を有していればどんな境界条件を用いても唯一の均質化弾性係数 a^H が導かれることを示している。

一方、漸近展開法²⁾ によると、微視問題の式は変動項が周期的であるときにのみ均質化された (巨視的) 方程式と併せて導くことができるが、これは許容関数空間を

$$\mathcal{D}_{per}^1 = \{w \in H^1(V)^3 \mid w; V\text{-periodic}\} \quad (9)$$

と定義することに対応する。さらに、Suquet⁹⁾ によると周期境界条件から得られる均質化弾性テンソル a_{per} が、

$$E : \bar{a} : E \leq E : a_{per} : E \leq E : \hat{a} : E \quad \forall E \quad (10)$$

なる不等式関係によって、先の 2 つの境界条件で評価される上下限で挟まれていることが知られている。これは式 (6) から明らかな関係であるが、RVE の大きさに関係なく成り立つ関係式で、周期境界条件が最も妥当な解を与える可能性を示唆する。

2.2 均質化と局所化

材料の線形性が仮定できる場合、ひずみテンソルの各単位成分に対する応答関数 $\chi^{kh}(y)$ を考えると、実際のひずみ E に対する変動量は

$$w^1(y) = -\chi^{kh}(y) E_{kh} \quad (11)$$

という重ね合わせとして表すことができる。このとき、微視的な問題 (1) は、

$$\begin{cases} \operatorname{div}[a : (\partial \chi^{kh} E_{kh})] = \operatorname{div}(a : E) \text{ in } V \\ \chi^{kh} \in \mathcal{D}^1 \end{cases} \quad (12)$$

となり、弱形式化して有限要素法などによって数値的に解くことになる。ここで、 $\mathcal{D}^1$ は式 (4)、(5)、(9) で与えられる空間のいずれかである。得られた解を用いると、均質化弾性テンソルは、領域 V での体積平均として、

$$a^H = \frac{1}{|V|} \int_V a : s dy := \langle a : s \rangle \quad (13)$$

で与えられる。ここで、 $|V|$ は RVE 領域 V の体積であり、 $\langle \rangle$ は V 内での体積平均を表す。また、 s は (4 階の) 局所化テンソルと呼ばれており、

$$s_{ij}^{kh} = I_{ij}^{kh} - \partial_{ij}(\chi^{kh}) \quad (14)$$

なる成分を持つ。ここで、 $I_{ij}^{kh} = 1/2(\delta_i^k \delta_j^h + \delta_i^h \delta_j^k)$ は 4 階の単位テンソルであり、 δ_i^k は Kronecher のデルタ記号である。領域 V において定数値をとる巨視的なひずみ E が与えられれば、この局所化テンソルによってミクロ応力が、

$$\sigma^0(y) = (a(y) : s(y)) : E \quad (15)$$

として求められる。

2.3 周期境界条件の最適性

式 (10) の関係は、RVE 法による物性評価における周期境界条件の妥当性を示すが、境界条件 (4) および (5) によって生ずるひずみエネルギーの停留値との関係は明らかでない。この小節では、考え得る境界条件の中で、周期境界条件から得られる等価弾性係数が最もふさわしいものであることを理論的に検証する。

簡単のために、 V を 1 辺が 2π である立方体領域とする。また、周期境界条件が付加されたときに V 境界で生じる変位と応力ベクトルをそれぞれ $\bar{u}^P$, $\bar{i}^P$ とする。このとき周期境界条件は、境界 ∂V 上に変位 $u = \bar{u}^P$ (あるいは応力ベクトル $t = \bar{i}^P$) を与える境界条件を考えると等価である。次に、 ∂V 上に与えられる変位について微小な変動 δu を考えると、ひずみエネルギーの変動分は $\varepsilon \bar{E}_1 + \varepsilon^2 \bar{E}_2$ で与えられる。ここで、 $\bar{E}_1$ と $\bar{E}_2$ はそれぞれ次式で与えられる汎関数である：

$$\bar{E}_1(\delta u) = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \bar{i}^P \cdot \delta u dS \quad (16)$$

$$\bar{E}_2(\delta u) = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} \bar{i}(\delta u) \cdot \delta u dS \quad (17)$$

ここで、 $\bar{i}(\delta u)$ は境界条件が $u = \delta u$ のときの応力ベクトルである。いま、この変位の変動が、 u_m と M を任意の定数として、

$$\delta u^P(x) = \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^M u_m \exp(im \cdot x) \quad (x \text{ on } \partial V) \quad (18)$$

で与えられるものとする、 $\bar{i}^P$ の周期性から $\bar{E}_1$ はゼロであり、 δu^P はこのひずみエネルギーの値に影響しない。従って、 $\bar{E}_2 > 0$ により、 ∂V 上に変位 $u = \bar{u}^P$ を付加すること、すなわち周期境界条件は変位境界条件から生ずるひずみエネルギーの停留 (最小) 値を与えることが分かる。

同様に、境界 ∂V 上に与えられる応力ベクトルの微小変動を考えると、周期境界条件は、許容な応力による境界条件の中で最大のひずみエネルギーを与えることが示される。

以上によって、周期境界条件は、上限と下限を与える境界条件によって生じるひずみエネルギーの最小値と最大値をとるという意味で、等価物性を評価する際の最もふさわしい境界条件であることが示された。

2.4 数値解析例

幾何学的な周期性が仮定できる微視構造をユニットセルとして均質化解析を行う。代表体積要素は、図 -2(a) に与えられるような基本構造単位と呼ばれる、材料の非均質性を代表する最小の構造単位が周期的に分布するものと仮定する。このような特別な代表体積要素に関して、前述の 3 種の境界条件から得られる式 (10) で与えられる不等式がここでのシミュレーションの興味である。

解析では、平面ひずみ問題を仮定し、介在物とマトリックスの Young 率はそれぞれ、100 GPa, 10 GPa とし、い

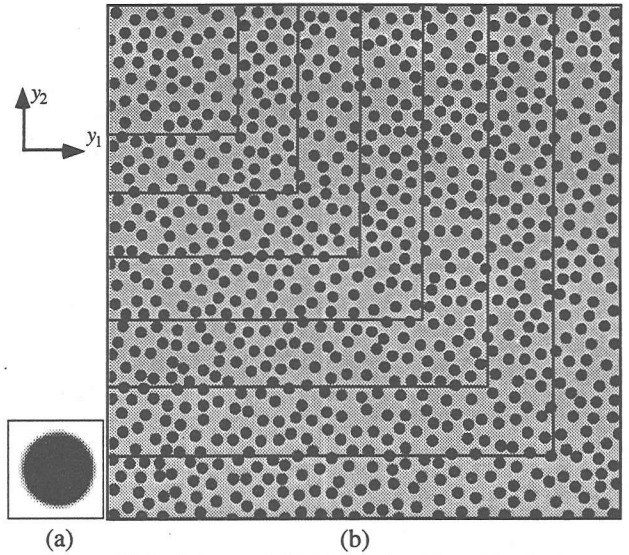


図 -2 : RVE としての画像データ (a) 32 × 32 pixels; (b) 1024 × 1024 pixels と RVE の選択領域。

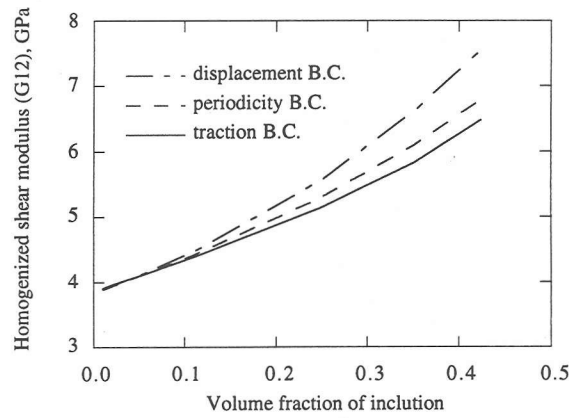


図 -3 : 介在物の体積比と均質化せん断弾性係数の関係

ずれの材料も Poisson 比は 0.3 とする。介在物の体積比を変化させたモデル数種類を用意し、2.1 節で導入した 3 種類の境界条件を適用して平均的な弾性係数を算出した。

図-3に体積比と均質化せん断係数の関係を示す。周期境界条件を用いて算出した等価物性が他の 2 つの境界条件から得られるものに挟まれることがわかる。基本構造単位を対象として等価物性を求める場合には、周期境界条件が最も妥当な選択であるという前節の結論が数値的にも裏付けられた。勿論、式 (7) によれば、このユニットを無限個並べた構造単位を代表体積とすることで、3 種の境界条件は同一の等価物性を与える。このことは、次節の解析結果から推察できる。

以上のことから、統計的に均質な複合材料に対して漸近展開法に基づく均質化法を適用するのは妥当であり、材料配置の不規則性が複合材の力学挙動に及ぼす影響を評価するのに微視構造境界に周期条件を課すことはむしろ適当な選択であるといえる。次節では各種の数値シミュレーションを行うことで、ここで得られた結論と併せて、微視構造の力学応答についてより詳細に検討する。

3. 実際の非均質材料に対する均質化法

3.1 マクロ変数（均質化弾性係数）の収束均質化法

図-2(b)に示されるような、微視的に不規則な介在物分布を有する非均質材料を考える。一般には、適当な大きさをユニットセルにとってデジタルイメージによるモデル化を行うが、幾何学的な周期性が仮定できないにも関わらず、均質化法の解析に際して周期境界条件が用いられている。前節において、理論的には周期境界条件の妥当性が検証されたものの、RVEあるいはユニットセルの取り方が数値解にどのように影響するかを検討する必要がある。本節では、このことを前述の3種の境界条件について、RVEの大きさと均質化弾性係数との関連から考察する。つまり、RVEの大きさを変化させることで式(6)、(7)、(8)、(10)等で表されている均質化定数の収束傾向を数値解析によってシミュレートし、周期境界を用いる均質化法の適用性を検討する。

代表体積要素の数値モデルは、図-2(b)のようにRVE領域を任意に選び、デジタルイメージに基づく微視構造モデル化手法⁷⁾によって生成するが、セル境界において必ずしも幾何学的な周期性が保たれないことに注意する。また、各モデルの構成材料の体積比が一定に保たれない点については、文献8)で紹介されている手法によって介在物の体積比を0.49に固定する操作を施す。以下の解析では、平面ひずみを仮定し、2.4節で用いた材料定数を用いる。

ユニットセルの数値モデルは、画像サイズ(pixels)にして32×32から1024×1024までの大きさを用意した。各モデルは、面内の最小の構造要素である介在物1つに対して、500 pixel程度の有限要素でモデル化されており、特性変位等の評価にはある程度の離散化誤差が含まれる。しかし、任意のサイズの解析モデルで同程度の有限要素近似が実現されているため各モデル間での近似レベルは同一であり、マクロ変数およびミクロ変数の相対的な変動の傾向を調べるには、影響は少ないと考える。

各ユニットセルモデルに対して均質化法によって等価な弾性係数を算出する。32×32の画像の大きさを基準として正規化した大きさと、等価弾性係数マトリックスの2乗ノルムとの関係を図-4示す。代表体積要素(RVE)の領域が大きくなるにしたがって、マクロ変数である均質化弾性係数がある一定値に近づいていることが分かる。この収束傾向は、式(10)を正当化するものである。また、変位あるいは応力ベクトルを与える境界条件から得られる値は、RVE領域の大きさの変化に対して比較的大きく変動するのに対して、周期境界条件から得られるものは1パーセント以下の非常に小さな変動になっている。従って、図-2(b)に示されるような不均質材料の等価物性は、周期境界条件を用いることで、比較的小さなRVEであっても妥当な等価物性を得ることができると結論づけられる。

次に、図-2(b)の分布状態から得られる等価物性には直交異方性が期待されることから、次のようなパラメータを

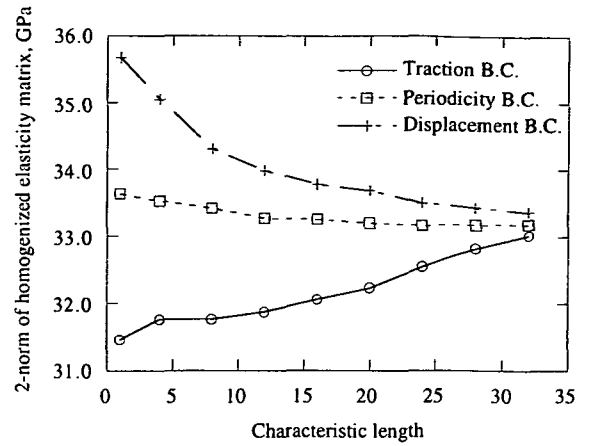


図-4：RVEの大きさと均質化弾性係数の2乗ノルムとの関係

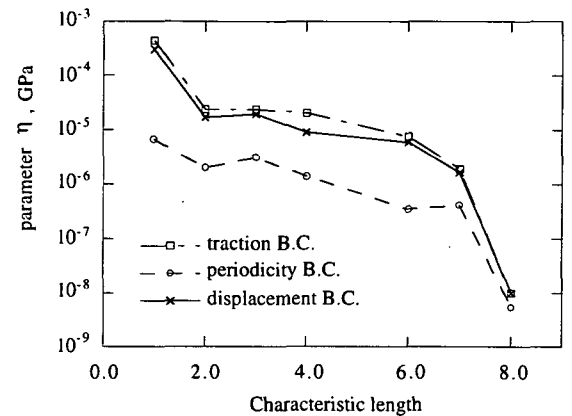


図-5：RVEの大きさと直交異方性の度合いを表すパラメータとの関係

用いて、RVEの大きさとの関連からその変化を調べる：

$$\eta = \max\{|a_{112}^H|, |a_{221}^H|\} \quad (19)$$

図-5にその関係を示すが、RVEの大きさを大きくするにしたがって、等方的な等価弾性テンソルが得られることが分かる。すなわち、図-2(b)の画像の示す材料の分布性状に対する先の直感的推測を肯定する結果が得られている。

以上の考察から、この種の非均質体に対して、周期境界条件を仮定した均質化法による解析を行うことは、任意に選択したユニットセルの幾何学的な周期性が保たれないにも関わらず、その領域サイズに大きく影響を受けずに妥当な解を与えると結論づけられる。このことは、比較的小さな領域を代表体積として均質化法の解析を行っても問題ないことを意味し、実用的にも重要な結論である。

3.2 ミクロ変数（ミクロ応力）の収束

均質化定数がユニットセル内での体積平均として算出されるマクロ量であるのに対して、局所化によって得られる微視的ひずみおよび応力(15)は、ユニットセル内で分布するミクロスケールの情報である。ここでは、均質化法のマルチスケール解析法としての特徴を加味して、この

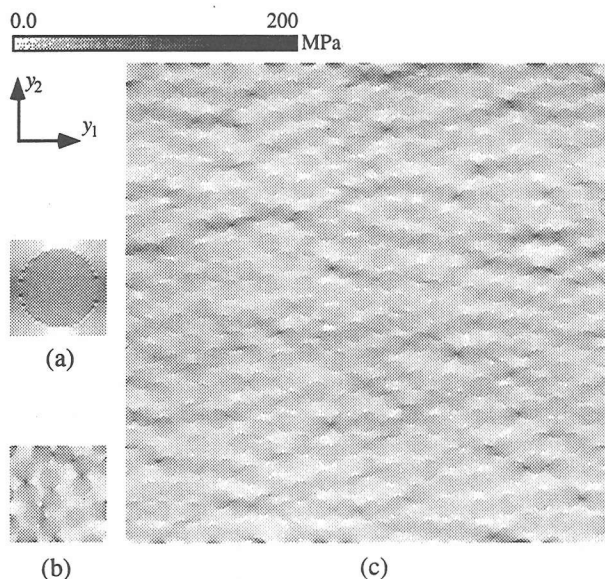


図-6 : Case 1 についてのマイクロ応力分布 : (a) 32×32 ; (b) 128×128 ; (c) 512×512 pixel モデル. (ただし, (a) のみ 1/4 の解像度)

マイクロ応力の収束傾向に関して, 前小節と同様の考察を行う.

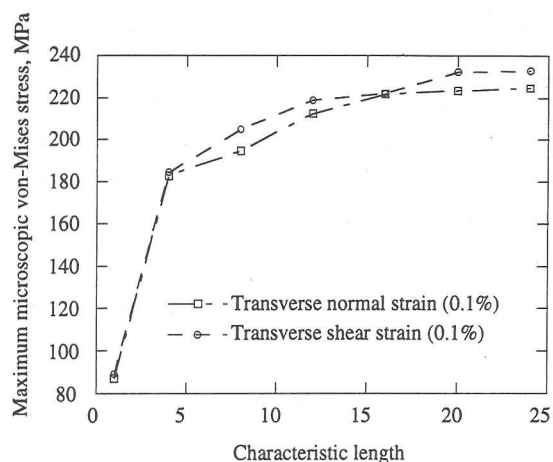
先に用いた各モデルに対して, 周期境界条件のもとで得られた特性変位と, 次の2ケースの巨視変数を用いてマイクロ応力を算出する.

$$\text{Case 1: } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ \text{sym.} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

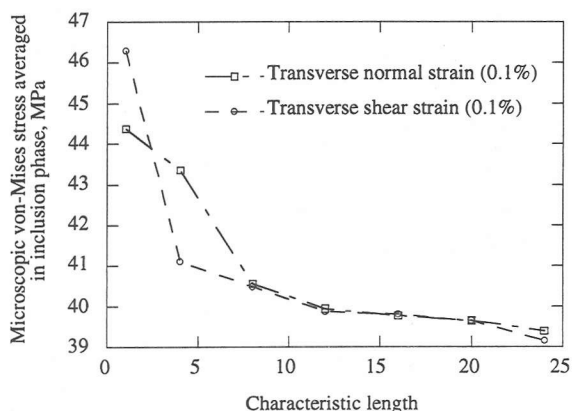
$$\text{Case 2: } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ \text{sym.} & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで, 各記号は2節の記号と一致する. 32×32 , 128×128 , および 640×640 pixel からなるモデルを用いて, Case 1 について得られたマイクロMises応力の分布を図-6に示しておく.

最小のRVEモデルの1方向のピクセル数32で正規化した代表長さとのMises応力の最大値との関係を図-7(a)に示す. 等価物性に対するものと同様の傾向を示すが, 基本構造単位のみからなるモデルでは大きな相対誤差が生じており, 収束も比較的遅い結果となった. 単純なスカラー量を用いて比較するのは難しいが, 図-4に得られている結果とは異なり, マイクロ応力はRVEのモデルが小さいと誤差が非常に大きくなるといえる. とくに最小構造要素一つ含むようなユニットセル (32×32) を用いて得られたマイクロ応力と最大の領域を有するモデル (1024×1024) から得られたものとは100%以上の差異が見られる. これに対して, 図-7(b)に示される結果は, ユニットセル内でMises応力のうち介在物に生じるものの平均値について同様の関係を示すものである. 先の傾向と比較すると, 変動の相対的な誤差はかなり小さいが, RVEの大きさに対する応力レベルの逆転が見られる. このことは, RVEの領



(a) RVE の大きさ vs. RVE 内に生じる応力の最大値



(b) RVE の大きさ vs. 介在物中に生じる応力の平均値

図-7 : RVE の大きさとマイクロ応力の関係

域を大きくとると, 介在物中の応力レベルの幅が大きくなることを意味してる.

線形弾性体においては均質化弾性係数とマイクロ応力は同じ応答 (特性) 関数から得られるものであることを考えると, ここで見られる収束傾向の相違は, 計算値が体積平均値か否かによるものである. 実際は微視構造領域内で非常に激しい応力変化を示す分布であるにも関わらず, 体積平均として求められる均質化定数や介在物内応力の平均値は微視的な変形挙動が平滑化されて応答として現れる. このことが及ぼす影響については, 次節の弾塑性解析に関する考察に加えることにする.

4. 弾塑性体の非線形均質化シュミレーション

4.1 均質化法におけるマイクロ場の評価

線形弾性理論の枠組みでの非均質材料の力学特性の評価については, 等価物性を得ることのみを目的とした理論展開が多く見られる. たとえば, Mori-Tanaka の方法¹⁴⁾では, 介在物中のマイクロ場の変数は, 無限縁に平均的な応力あるいはひずみが作用する基質部に介在物があると仮定して得られる場によって置き換えられる. こうして得られ

るミクロ場は、実際の微視構造を定義する均質化法と比較すると相対的に大きな誤差を含むものの、平均物性を得るという観点では良好な値を与える。つまり、ミクロ場の評価の正確さは理論的にもさほど問題にならないため、デジタル画像有限要素モデリングのように微視構造を厳密に再現する必然性も生じない。しかし、前節の結論を鑑みると、非線形均質化法を線形弾性体に対する均質化法の拡張として適用するには多少の注意が必要であるといえる。

ミクロとマクロの力学挙動を同時に捉えられるという均質化法のマルチスケール解析手法としての特徴を念頭におき、微視構造モデリングとともに、非線形問題における RVE 法としての力学的妥当性も検討する必要がある。本節では、不規則な材料配置を有する複合材の非線形挙動のマルチスケール解析への拡張を目的として、デジタル画像有限要素モデリング手法によるミクロ応力を伴う種々の非線形均質化法シミュレーションを行う。弾塑性材料に対する均質化法¹⁵⁾を適用して、増分的に得られるミクロの応力場について3節と同様の解析を行い、弾塑性力学応答と RVE の大きさとの関係を調べることによって、非線形均質化法における微視構造の力学挙動および解析モデリングの役割を明らかにする。

表 -1: 構成材料の物性

	Young 率 GPa	Poisson 比	降伏応力 MPa
介在物 (黒)	255.0	0.30	200
基質部 (白)	177.0	0.30	150

4.2 弾塑性変形を伴う非均質材料の均質化法

弾塑性体に対する均質化法については、これまでいくつかの報告が見られるが、計算上の困難を伴うなどの理由から、未だ実用に耐えうる方法論、アルゴリズムは確立されていないのが現状である^{6),15),16)}。従って、以下では定式化の詳細な議論は避け、弾塑性問題における RVE 法としての均質化解析法の妥当性の検討を主眼とした留意点と解析方法を挙げておく。

微視構造領域で成り立つべきつりあい式および構成式は、それぞれ、

$$\operatorname{div} \Delta \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in V \quad (22)$$

$$\Delta \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^{\text{ep}}(\mathbf{y}) : [\partial(\Delta \mathbf{w}^1(\mathbf{y})) + \Delta \mathbf{E}] \quad (23)$$

で与えられる。ここで、 ∂ は微小ひずみ成分をつくる演算子として働き、Y-periodic な変位増分の変動項 $\Delta \mathbf{w}^1(\mathbf{y})$ からひずみ増分の変動項を作る。また、弾塑性テンソル $\mathbf{a}^{\text{ep}}$ は微小ひずみ仮定して得られる $\mathbf{a}^{\text{p}}$ を用いて、

$$\mathbf{a}^{\text{ep}}(\mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{y}) - \mathbf{a}^{\text{p}}(\mathbf{y}) \quad (24)$$

で与えられている。ここで変数に用いた記号は3節と同じものを用いるが、“ Δ ”を付したものはその変数の増分量を表す。

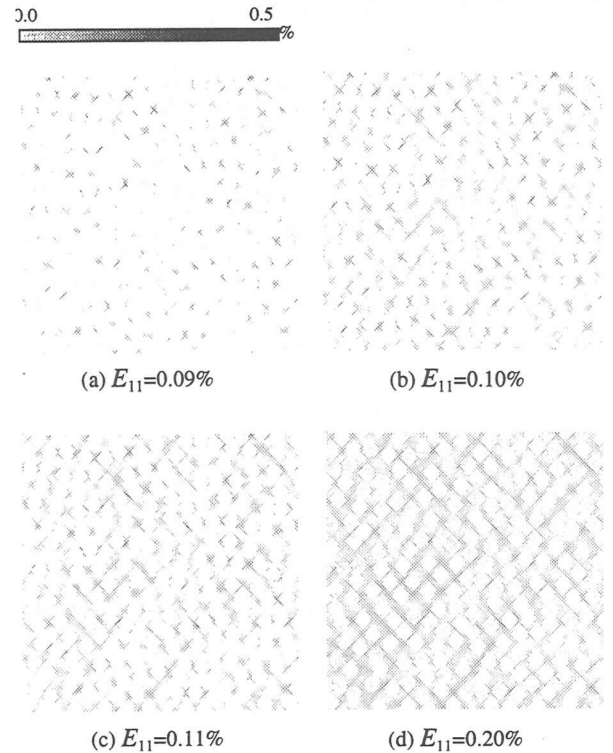


図 -8 : ミクロスケールの相当塑性ひずみ分布 (512 × 512 pixels)

Suquet¹³⁾によれば、弾塑性変形に伴い V 内に生ずる残差応力は、自己釣り合い状態にあり、 $\langle \sigma_{\text{r}} \rangle = \mathbf{0}$ を満たす。これによって、マクロの塑性仕事率 $\Sigma : \dot{\mathbf{E}}^{\text{p}}$ は、

$$\Sigma : \dot{\mathbf{E}}^{\text{p}} = \langle \sigma : \dot{\mathbf{e}}^{\text{p}} \rangle + \langle \sigma_{\text{r}} : \mathbf{a}^{-1} : \dot{\sigma}_{\text{r}} \rangle \quad (25)$$

で表され、必ずしもミクロの応力と塑性ひずみ増分から作られる塑性仕事率と等しくならない。ここで、左辺第1項はミクロスケールの塑性仕事率の体積平均、第2項は残差応力の発生による平均的な弾性エネルギーである。このことは、弾塑性問題に対するマルチスケール解析に際して、次の注意を与えている。すなわち、マクロの塑性ひずみ $\mathbf{E}^{\text{p}}$ は、ミクロの塑性ひずみ $\mathbf{e}^{\text{p}}$ の体積平均からは求められず、ミクロ応力と併せて評価しなければならない。従って、線形弾性体に対する均質化法を直接的に拡張する際も、漸近展開法に基づいてミクロ場とマクロ場の明確な区別が必要となる。

以下の節では、これらのことに留意して、弾塑性複合材料に対して適用された非線形均質化法の更新 Lagrangian 型の定式化¹⁵⁾を用いてマルチ・スケール弾塑性解析を行う。対象とする非均質体は、図 -1 に示される微視構造と同様のものを仮定し、介在物の体積比は $V_f = 30\%$ に固定する。ただし、各構成材料は、von-Mises の降伏条件および関連流れ則に従う完全弾塑性体とし、表 -1 に与えられる物性を用いる。

任意に選ばれる RVE 領域の大きさと弾塑性応答の関係を調べるために、3節と同様にして6つの異なるサイズの

ユニットセルを用いてシミュレーションを行う。画素にして 32×32 pixel からなるものを最小のモデルとし、他は小さいものから順に、 128×128 , 256×256 , 384×384 , 512×512 および 640×640 pixel の画素からなるモデルである。

一方、全体構造物に対しては、面内横方向に一樣な引張りが生じるような巨視的（マクロ）な変形を与え、その応答としてのユニットセルの変形と全体構造物の変形に反映される平均化されたミクロ応力を算出する。すなわち、

$$\sigma^N(y) = \sigma^0(y) + \Delta\sigma(y) \quad (26)$$

によって前ステップでの応力値 σ^0 から現在の応力 σ^N に更新した後に体積平均 $\Sigma = \langle \sigma^N \rangle$ をとる。ここで、増分 $\Delta\sigma$ は、ミクロスケールでの塑性判定およびリターンマッピングによって定める。ここで、ミクロスケールで算出される相当塑性ひずみ ϵ^p 、相当応力 σ^p は a^p 等の計算に用いられ、全体の変形に関わる接線剛性には a^p の体積平均を介してのみ影響することに注意する。

図-8には、 512×512 pixel のからなるモデルに生じた塑性ひずみ分布の変化を示す。不規則な材料分布の影響が捉えられていることがわかる。

4.3 塑性変形と RVE

RVE の大きさの塑性変形への影響を見るために、セル内で初めて塑性ひずみが生じたときのマクロの応力の値を算出した。図-9はRVEの大きさを横軸に取って比較したものである。この図は、比較的小さいRVE領域をとった場合に全体構造物は実際よりも大きな荷重を受け持つことができるという解析結果を示しており、設計上危険である。また、3節の結果からわかるようにRVEが大きいほど高いミクロ応力を生じることから、大きなRVE内では小さいものに比べて大きな塑性変形を生じているものと考えられる。

実際、RVE が大きいほどマクロ変形は大きくなる傾向にあるが、以下ではその定量的な関係を示すのではなく異なる角度からシミュレーション結果を整理するすなわち、あるマクロスケールで観察される変形状態を固定したとき、異なるサイズのユニットセル内に生じる塑性変形量の違いを見ることにする。塑性変形の非圧縮性を仮定し、マクロの伸びを0.2%に固定したときの、ミクロスケールでの相当塑性ひずみの最大値および平均値を比較したものを図-10に示す。ここで、縦軸は最大のモデル（ 640×640 ピクセル）から得られた値との差を表している。この図から、RVE の大きさが大きくなるにつれて、セル内に蓄積されるミクロの塑性変形はある一定値に近づくという、明確な収束傾向が見て取れる。

塑性ひずみの最大値と平均値との違いを見ると、セル内のある点の塑性ひずみの最大値の方が、セル平均をとったものに比べて非常に大きく変動することが分かる。用いた解析モデルは面内に 640×640 pixel から成るものが最大であるので、3節の線形弾性解析と直接対応を付けるのは

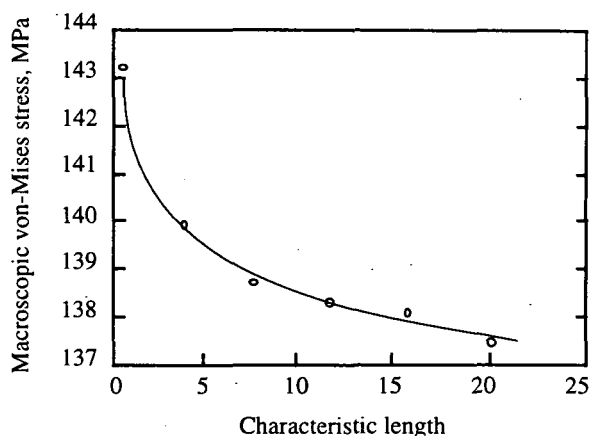


図-9：RVEの大きさと塑性変形発生時のマクロ応力の関係

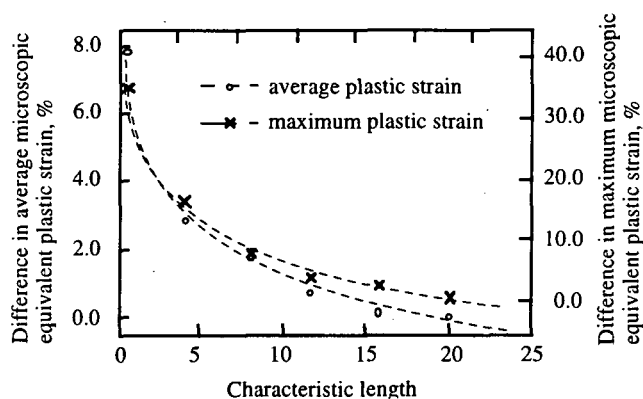


図-10：RVEの大きさとミクロスケールの相当塑性ひずみ（セル平均と最大値）の関係

難しいが、ここで示したRVE領域を大きくした場合の弾塑性応答の収束傾向は、線形弾性体のミクロ応力のそれに類似しているといえる。しかし、微視応力の最大値はミクロスケールの情報であり、全相当塑性ひずみのセル内平均をマクロスケールの情報であることを考慮すると、弾塑性解析ではマクロ変数もRVEの大きさに比較的敏感であると言える。このことは、式(25)に関連した先の考察と併せて、平均をとることでマクロ応力として反映されない残差応力が何らかの役割を果たすものと推察される。ミクロ変数の空間分布に対する確率論的な議論も可能であるが詳細は次の機会に譲ることとする。

以上の考察は、3節で線形弾性問題について数値的に得られた種々結果とも合致する点も多いが、同時に弾塑性変形のような非線形問題に直接的に拡張する際の注意を促している。すなわち、均質化法を用いるに際して、RVEの大きさが極端に小さいとミクロ変数の評価を誤るおそれがある。数値計算において増分的にマクロ挙動を追従するような解析の場合には、誤差が蓄積されて実用上危険な評価につながることを意味する。従って、線形弾性問題に対するものより更に大きなRVE領域を解析モデルにすることが望ましい。ただし、計算機の容量とも関連した実用的な指針を示すには、より詳細な検討が必要であることも付け加えておく。

5. 結語

本研究では、実際に観察される複雑な幾何形状を有する微視構造モデルに対して、周期境界条件を用いた均質化法の適用性を様々な角度から検討した。まず、等価物性を求めるための1手法であるRVE法に用いられる境界条件を整理し、周期境界条件の位置づけを理論的に考察した。次に、RVE法で得られる等価物性とRVE領域の大きさとの関連を調べ、よく知られた理論的結論を数値的に確認した。さらに、均質化法のマルチスケール法としての特徴を加味してマイクロ場とRVEの大きさとの関係を調べるとともに、非線形解析に拡張するに際しての有益な結論を得た。

異なる大きさのRVEの数値モデル生成に際しては、デジタル画像有限要素モデリング手法を適用することで、微視構造の複雑な幾何性状再現しており、RVE内の不均質性を十分に考慮できた。応力境界、変位境界、および周期境界条件を用いて等価物性を求めた結果、いかなる境界条件を用いても、RVEの領域を大きく取ることである一定値に近づくことが数値的に確かめられた。また、代表体積要素に幾何学的な周期性が与えられないにも関わらず、周期境界条件を用いて評価した均質化弾性特性は、サンプリングされるユニットセルの大きさに対して鈍感であることが分かった。これらの結果から、実用的にも重要な次の結論が得られた。

- ・ デジタル画像有限要素モデリングによる微視構造のモデルをユニットセル(周期的)として均質化法の解析を行うことで、妥当な等価物性が得られる。さらに、比較的小さなRVE領域をサンプリングしても真の等価物性に近い値を評価しうる。

また、周期境界条件のもとで、ある巨視的な変形を仮定してマイクロ応力についても同様の考察を行った結果、均質化弾性係数などのマクロ変数と同様の傾向を示すものの、マイクロ応力はRVEの大きさに対して敏感であることが分かった。すなわち、

- ・ ミクロ応力の評価において、RVEが比較的小さいときには大きな相対的な誤差を含む可能性がある、

という結論を得た。このことは、増分解法を適用した非線形解析における危険性を示唆するため、実際に均質化法の弾塑性解析を行い、RVE領域の大きさと弾塑性応答との関連について考察した。残差応力の役割が明確でなく、今後より詳細な理論的・解析的検討を加えていく必要があるが、定性的には次のことが言える：

- ・ 弾塑性応答に関しては、マクロの挙動もマイクロ応力と同様にRVEの大きさに対して比較的敏感である。

マイクロおよびマクロの2変数表示を用いた漸近展開法に基づく均質化法によると、弾性問題に限らず如何なる微分方程式で支配される問題もマイクロおよびマクロ領域で

満たされるべき支配方程式を導出することができる。今後さらなる検討を行い、マルチスケール解析モデリング手法としての工学問題への実質的な応用が望まれる。

参考文献

- 1) Babuska, I.: Homogenization approach in engineering, in *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Lecture Note in Economics and Mathematical Systems 134, J.-L. Lions and R. Glowinski eds., Springer: Berlin: pp.137-153, 1976.
- 2) Sanchez-Palencia, E.: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- 3) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- 4) 構造工学委員会応用力学小委員会: 土木工学における応用力学の新しい展開, 委員会報告, 土木学会論文集, 第507号, pp.9-24, 1995.
- 5) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and post-processing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.83, pp.143-198, 1991.
- 6) Ghosh, S. and Moorthy, S. Elastic-plastic analysis of arbitrary heterogeneous materials with the Voronoi cell finite element method, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 121, pp.373-409, 1995.
- 7) Hollister, S.J. and Kikuchi, N.: Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, *Biotech. Bioenginrg.*, Vol.43, No.7, pp.586-596, 1994.
- 8) Terada, K., Miura, T. and Kikuchi, N.: Digital image-based modeling applied to the homogenization analysis of composite materials, *Comput. Mech.*, Vol.19, No.3, pp.188-202, 1997.
- 9) Suquet, P.-M.: Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity, *Plasticity Today*, Sawczuk, A. et al. eds., Elsevier, NY, pp.279-309, 1985.
- 10) Sab, K.: On the Homogenization and the simulation of random materials, *Eur. J. Mech., A/Solids*, II, Vol.5, pp.585-607, 1992.
- 11) Hill, R.: Essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.79-95, 1967.
- 12) Hashin, Z.: Analysis of composite materials - A survey, *J. Appl. Mech.*, Vol.50, pp.481-505, 1983.
- 13) Suquet, P.-M.: Elements of homogenization theory for inelastic solid mechanics, *Homogenization Technique for Composite Media*, E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui eds., Springer-Verlag, Berlin, pp.194-275, 1987.
- 14) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall. Mater.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 15) Terada, K. and Kikuchi, N.: Nonlinear homogenization method for practical applications, *Computational Methods in Micromechanics*, S. Ghosh and M. Ostojca-Starzewski eds., AMSE, AMD Vol.212, pp.1-16, 1995.
- 16) Fish, J., Shek, K., Pandheeradi, M. and Shephard, M.: Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.148, pp.53-73, 1997.

(1998年4月24日原稿受付)