

自由表面近傍の欠陥による円筒波の反射・散乱解析

Reflection and Scattering of a Cylindrical Wave by a Defect near a Free Surface

廣瀬 壮一*・岡本 和明**

Sohichi HIROSE and Kazuaki OKAMOTO

*正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)

**学生会員 岡山大学大学院工学研究科 (〒700-8530 岡山県岡山市津島中2-1-1)

A boundary element method is applied to reflection and scattering problems of a cylindrical wave by a defect near a free surface in a two dimensional half space. The source of the cylindrical wave is assumed to be located enough far from a defect. On this assumption, reflected waves at a free surface are easily calculated using a ray theory. With incident and reflected waves as known terms, scattered fields due to the interaction between a defect and a free surface are analyzed using a boundary element method. The proposed method shows much better accuracy than the boundary element method involving only the incident wave as a known term. Application of our method to a simulation of an ultrasonic testing for a thick plate is addressed.

Key Words : scattering, reflection, free field, ray theory, boundary element method

1. はじめに

超音波非破壊検査によって表面近傍に存在する欠陥を検出しようとするとき、計測される波形には欠陥による散乱波のみならず、自由表面からの反射波や欠陥と自由表面の相互作用による波動など、さまざまな波動成分が含まれる。よって、表面近傍の欠陥を定量的に評価するためには、自由表面を含めた欠陥周辺での波動の反射・散乱挙動を明らかにする必要がある。

半無限弾性体内における弾性波動の反射・散乱解析に関しては、これまでいくつかの研究が報告されている。積分方程式法に限れば、以下のような研究を挙げることができる。Dravinski^{1),2)}やWong³⁾は半無限弾性体のグリーン関数を用いた積分方程式の定式化を行い、様々な不整形地盤の地震動解析を行っている。また、Kobayashi and Nishimura⁴⁾やNiwa, Hirose and Kitahara⁵⁾は、無限弾性体に対する基本解を用いて積分方程式を構成し、自由表面近傍にある空洞やインクルージョンの動的挙動を明らかにしている。これらの研究はいずれも、構造物や不整形地盤の地震応答解析を目的とし、遠距離地震を想定して、入射波として平面弾性波を用いている。一方、本研究の対象とする超音波は探触子から送信されるのが一般的である。探触子はしばしば供試体表面に作用する集中力としてモデル化される。したがって、そのような集中加振によって発生する超音波は指向性の強い波であるので、入射波を平面波とする仮定は必ずしも適当でなく、球面波、あるいは、2次元解析においては円筒波としてモデル化するのが妥当であろう。特に、本研究のように自由表面まで含めたある程度広い範囲の波動場を考慮する場合

には、波面の曲率が少なからず影響すると考えられる。

このような背景の下で、本研究では、半無限弾性体中の集中線荷重から発生する円筒弾性波の反射・散乱問題を積分方程式法により解析するものである。積分方程式の定式化には無限弾性体における基本解を用いた。したがって、積分方程式の定式化自体は、文献 4), 5) におけるものとほぼ同じである。ただし、本研究では集中線荷重から発生する円筒波を入射波として用いることから、波線理論のアプローチを用いて自由場(欠陥が存在しない半無限弾性体における波動場)を評価し、解の精度の向上を試みている。以下においては、積分方程式の定式化を示した後、自由場の近似計算法について述べ、数値解析例を示す。そして、厚板材における超音波シミュレーションへの本解析法の適用について述べる。

なお、半無限体のグリーン関数を用いた積分方程式の定式化も可能であるが、ここでは以下の理由で採用しなかった。まず、グリーン関数自体が複雑な積分形でしか得られないためである。第二に、今後、本研究の成果を厚板材における超音波の反射・散乱問題に展開する際には、より複雑な積分形で表されるグリーン関数を再構築する必要があり、手法の拡張性に乏しいと考えたからである。

2. 積分方程式の定式化

図-1に示すように、均質等方線形弾性体からなる $x_2 < 0$ の2次元半無限領域において、 $x_2 = 0$ の自由表面 B の近傍に境界 S を持つ欠陥が存在すると仮定する。欠陥は、空洞やインクルージョンなど様々なものが考

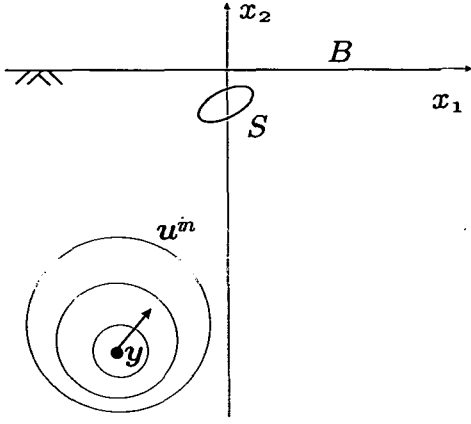


図-1 半無限弾性体における円筒波の反射・散乱問題。

えられるが、ここでは簡単のために空洞であるとする。よって、 B および S のいずれの境界上においても $t=0$ なる表面力がゼロという境界条件が与えられる。

入射波は弾性体内部の点 y において作用する時間調和な集中線荷重によって発生する2次元面内円筒波とする。ただし、自由表面と欠陥の距離に比べて、点 y は自由表面から十分離れた位置にあると仮定する。

線形弾性体においては重ねあわせの原理が適用できるので、全変位場 u は、入射波 u^{in} 、自由表面 B による反射波 u^r 、欠陥 S による散乱波 u^{sc} の和で表される。

$$u = u^{in} + u^r + u^{sc} \quad (1)$$

なお、入射波 u^{in} と反射波 u^r の和を自由場と呼び、 u^f で表し、 u^r と u^{sc} の和を u^d を用いて表す。

集中荷重による入射波 u^{in} は無限弾性体の基本解に他ならない。点 y において単位振幅で k 方向に調和振動する集中線荷重による点 x における i 方向の変位を $U_{ik}(x, y)$ とする。この $U_{ik}(x, y)$ は2次元動弾性問題の基本解としてよく知られており、次式で与えられる。

$$U_{ik}(x, y) = \frac{i}{4\mu} \left[H_0(k_T r) \delta_{ik} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \{H_0(k_T r) - H_0(k_L r)\} \right] \quad (2)$$

ここに、 μ はせん断剛性、 $r = |x - y|$ 、 k_T と k_L はそれぞれ縦波と横波の波数、 H_0 は0次ハンケル関数を表す。後に示すように、荷重点 y から十分離れた点 x では、基本解 U は L 波と T 波の2種類の円筒波からなる。

解くべき反射・散乱問題は、入射波が $u^{in} = U$ によって与えられたとき、境界 B, S での境界条件と支配方程式を満足する波動解を見出すことである。

波動場 $u^d (= u^r + u^{sc})$ を未知数として、境界積分方程式を構成すると、次式のようになる。

$$\frac{1}{2} u^d(z) = \int_{S+B} \{U(x, z) t^d(x) - T(x, z) u^d(x)\} ds_x \quad z \in S, B \quad (3)$$

ただし、 t^d, T はそれぞれ変位ベクトル u^d, U に対応する表面力ベクトルを表す。また、式(3)およびこれ以後、積分はすべて有限部分によって評価することとする。

$u^d = u - u^{in}$ 、 $t^d = t - t^{in}$ を式(3)に代入し、 S, B 上での境界条件 $t=0$ を考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(z) + \int_{S+B} T(x, z) u(x) ds_x \\ = \frac{1}{2} u^{in}(z, y) \\ + \int_{S+B} \{T(x, z) u^{in}(x, y) - U(x, z) t^{in}(x, y)\} ds_x \end{aligned} \quad z \in S, B \quad (4)$$

を得る。右辺は入射波の寄与分であるから既知である。よって、上式を離散化して解けば、境界 S, B 上の変位 u を求めることができる。

入射波 u^{in} が平面波の場合は、簡単な代数計算により反射波 u^r を求めることができる。このように反射波 u^r （すなわち、自由場 u^f ）を容易に得ることができるならば、散乱波 u^{sc} を未知数とする境界積分方程式の定式化も可能である。式(3)、(4)を導いたのと同じ手順に従えば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(z) + \int_{S+B} T(x, z) u(x) ds_x \\ = \frac{1}{2} u^f(z, y) \\ + \int_{S+B} \{T(x, z) u^f(x, y) - U(x, z) t^f(x, y)\} ds_x \end{aligned} \quad z \in S, B \quad (5)$$

式(5)は、式(4)の右辺の u^{in}, t^{in} を u^f, t^f に置き換えただけであるが、解析精度は式(4)に比べて格段に良いことが知られている^{4),6)}。式(4)、(5)共に、無限境界 B を含んでいるために、数値解析においては有限長さで打ち切りざるを得ない。しかし、式の導出からもわかるように、式(4)は境界 B 全体に分布する u^d を未知数として積分方程式を構成しているのに対し、式(5)は欠陥近傍に分布する u^{sc} を未知数としているので、式(5)の方が打ち切り誤差が小さいのである。

円筒波の反射・散乱問題に式(5)を適用する場合には、集中力を波源とする自由場 u^f を求めておく必要がある。しかし、そのような自由場は2次元半無限動弾性問題におけるグリーン関数と等価なもので、無限区間の積分を含む積分形で表され、その計算は容易ではない。また、厚板における波動解析に適用しようとするとき、グリーン関数を再構築する必要がある。以上のことから本研究では、自由場の厳密な評価は行わず、波線理論的な考え方によって近似的に計算することにした。次章にその手順を示す。

3. 自由場の近似計算

基本解を U_{ik} とし、それに対応する半無限自由表面での反射波を U_{ik}^r とするとき、自由場 u^f は $u^f = (U_{ik} + U_{ik}^r)$ と表される。以下においては、 U_{ik} , U_{ik}^r の厳密な積分表現を導き、その後、最急降下法を用いた近似表現を誘導する。

式(2)で与えられる基本解は、次式のように積分形で表すこともできる。

$$U_{ik}(x, y) = \sum_{\alpha=L, T} \int_{-\infty}^{\infty} U_k^{\pm\alpha}(y) d_i^{\pm\alpha} \exp(ik_\alpha \zeta^\pm \cdot x) d\zeta_1 \quad (6)$$

ここに、 $\zeta^\pm = (\zeta_1, \zeta_2^\pm) = (\zeta_1, \pm\nu)$ である。ただし、 ν は $\nu = \sqrt{1 - \zeta_1^2}$, $\text{Im}(\nu) > 0$ によって定義される関数である。また、

$$U_k^{\pm\alpha}(y) = \frac{i}{4\pi\mu} \left(\frac{k_\alpha}{k_T} \right) d_k^{\pm\alpha} \nu^{-1} \exp(-ik_\alpha \zeta^\pm \cdot y) \quad (7)$$

であり、 $d_i^{\pm L} = \zeta_i^\pm$, $d_i^{\pm T} = (\delta_{i2} - \zeta_2^\pm \zeta_i^\pm) / \zeta_1^\pm$ である。

式(6)の被積分関数は振幅が $U_k^{\pm\alpha}(y)$ 、波動進行方向が $\zeta^\pm$ 、粒子の振動方向が $d^{\pm\alpha}$ の平面 α 波の形を有している。すなわち、式(6)は基本解をあらゆる方向に進行する平面波の重ね合わせとして表現している。

平面波が自由境界 B に入射したときの反射波は簡単な代数計算によって計算できる⁷⁾。ある平面波が入射したときに、 L 波(縦波)と T 波(横波)の2種類の反射波が発生することに留意すれば、基本解 U_{ik} を入射波としたときの自由表面 B による反射波 U_{ik}^r は次のように表される。

$$U_{ik}^r(x, y) = \sum_{\alpha=L, T} \sum_{\beta=L, T} U_{ik}^{\alpha\beta}(x, y) \quad (8)$$

ここに、

$$U_{ik}^{\alpha\beta}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} U_k^{\pm\alpha}(y) R^{\alpha\beta}(\theta_\alpha) d_i^{\pm\alpha\beta} \exp(ik_\beta \zeta^{\pm\alpha\beta} \cdot x) d\zeta_1 \quad (9)$$

である。また、 $\zeta^{\pm\alpha\beta} = (k_\alpha \zeta_1 / k_\beta, \pm\nu^{\alpha\beta})$, $\nu^{\alpha\beta} = \sqrt{1 - (k_\alpha \zeta_1 / k_\beta)^2}$, $\text{Im}(\nu^{\alpha\beta}) > 0$ であり、 $\theta_\alpha = \sin^{-1}(\zeta_1)$, $d_i^{\pm\alpha L} = \zeta_i^{\pm\alpha L}$, $d_i^{\pm\alpha T} = (\delta_{i2} - \zeta_2^{\pm\alpha L} \zeta_i^{\pm\alpha L}) / \zeta_1^{\pm\alpha L}$ である。さらに、式(9)における $R^{\alpha\beta}(\theta_\alpha)$ は単位振幅を持つ平面 α 波が入射角 θ_α で自由表面 B に入射したときの反射 β 波の反射係数を表す。

式(9)より反射波 U_{ik}^r を厳密に計算しようとするとき、無限区間 $(-\infty, \infty)$ の積分を実行しなければならない。以下においては、荷重点 y が自由表面から十分離れているという仮定のもとで、式(6), (8), (9) を近似的に評価することを試みる。

$|y| \gg |x|$ の条件で、式(6)に最急降下法(付録 I を参照)を適用すれば、基本解 U_{ik} は次式のように近似的

に評価できる。

$$U_{ik}(x, y) \approx \sum_{\alpha=L, T} S_k^{\pm\alpha}(y) d_i^{\pm\alpha} e^{ik_\alpha \zeta^\pm \cdot x} \Big|_{\zeta_1 = -y_1/|y|} \quad (10)$$

ただし、

$$S_k^{\pm\alpha}(y) = \frac{e^{i(k_\alpha |y| + \pi/4)}}{\mu(8\pi k_\alpha |y|)^{1/2}} \left(\frac{k_\alpha}{k_T} \right)^2 d_k^{\pm\alpha} \quad (11)$$

である。上式より、入射波 U_{ik} は $\exp(ik_\alpha |y|) / \sqrt{k_\alpha |y|}$ なる項を有していることから、 L 波と T 波の2種類の円筒波からなることがわかる。

同様に最急降下法を用いれば、反射波 U_{ik}^r は以下のように表せる。

$$U_{ik}^r(x, y) \approx \sum_{\alpha=L, T} \sum_{\beta=L, T} S_k^{\pm\alpha}(y) R^{\alpha\beta}(\theta_\alpha) \times d_i^{\pm\alpha\beta} e^{ik_\beta \zeta^{\pm\alpha\beta} \cdot x} \Big|_{\zeta_1 = -y_1/|y|} \quad (12)$$

となる。これより、反射波 U_{ik}^r は $L-L$, $L-T$, $T-L$, $T-T$ の4種類の反射円筒波からなることがわかる。

式(10)において $S_k^{\pm\alpha}(y)$ を入射波の振幅とみなすと、 U_{ik} は $\zeta^\pm \cdot x = \text{一定}$ を満たす点 x の集合を波面とする平面波と考えることができる。式(12)の反射波 U_{ik}^r も、 U_{ik} を平面入射波とみなしたときの平面反射波の形となっている。

4. 数値解析例

図-2に示すように、自由表面近傍に半径 a の円筒形空洞があり、点 $(-5a, -50a)$ の点における時間調和な水平単位集中線荷重によって発生した入射波が反射、散乱すると仮定する。集中力の振動周波数は横波の無次元化波数の形で、 $ak_T = 0.523$ によって与えた。また、半無限弾性体のポアソン比は0.235とした。

以下の解析例では、入射波のみを考慮した定式化(4)と入射波と反射波からなる自由場を考慮した定式化(5)を比較して検討するが、いずれの式も無限に続く自由表面 B についての積分を含んでいる。したがって、数値解析においては無限境界 B を適当な長さで打ち切って計算を実行することになる。図-3~5は、境界 B をそれぞれ、 $|x_1|/a = 3, 4, 6$ で打ち切ったときの、境界 B 上での x_1 方向ならびに x_2 方向の変位の絶対値 $|u_1|$ (□, ■), および $|u_2|$ (○, ●) を図示したものである。□, ○は式(4)を用いた結果であり、■, ●は式(5)による結果である。一方、図-6~8はそれぞれ図-3~5に対応する打ち切り長さの場合の、空洞の境界上での法線方向変位の絶対値 $|u_N|$ を図示したものである。横軸の角度 θ は図-6の挿絵にあるように、 x_1 軸から反時計周りにとった角度である。いずれの図からも、式(5)による結果は、打ち切り長さに依らないほぼ一定の結果が得られているのに対し、式(4)による結果は打ち切り長さが

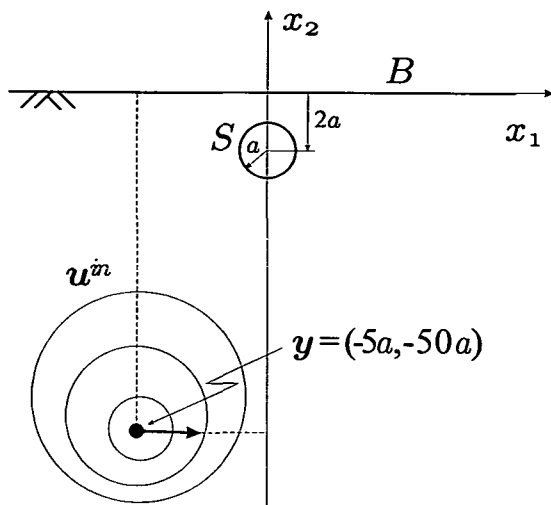


図-2 解析モデル.

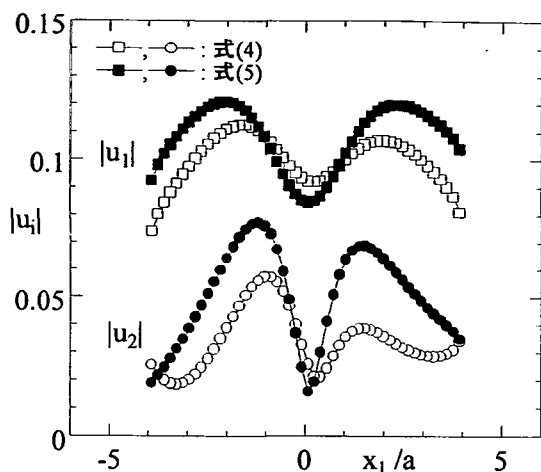


図-4 $|x_1|/a = 4$ において打ち切った場合の、境界 B における変位の絶対値.

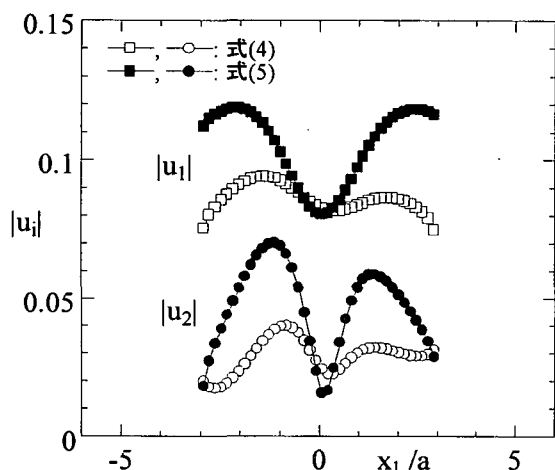


図-3 $|x_1|/a = 3$ において打ち切った場合の、境界 B における変位の絶対値.

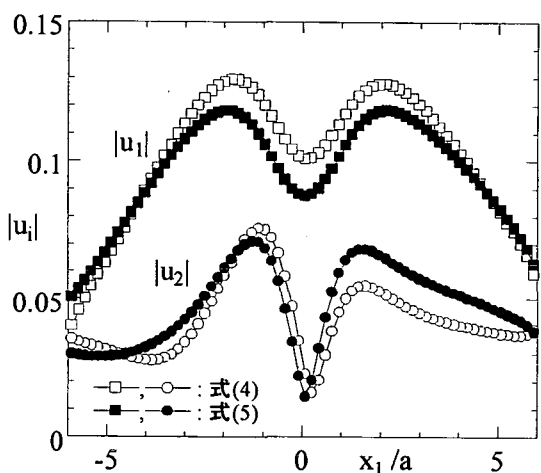


図-5 $|x_1|/a = 6$ において打ち切った場合の、境界 B における変位の絶対値.

短くなると精度が低下することがわかる。このように、円筒波の散乱問題の場合も、入射波だけでなく反射波を加えた自由場を考慮することにより、少ない要素で精度の高い解が得られることが確認された。

ここで示した解析結果は特定の欠陥形状、位置、集中力の位置に対して得られた数値例の一つに過ぎないが、その他の欠陥や波源の組合わせに対しても、式(5)によって高い精度の解が得られている。

5. 厚板の超音波非破壊検査への応用

前節までは、入射波は半無限弾性体内の集中線荷重から発生する円筒波であるとして積分方程式の定式化ならびに解析例を示した。しかし、実際の非破壊検査を想定した場合、超音波は弾性体の内部の点からでは

なく、境界に設置された探触子から送信されることがほとんどであろう。そこで、本節では、図-9に示すような板材を考え、板下面 $\bar{B}$ 上の点 y から超音波が送信されたときの欠陥近傍の自由場の計算法ならびに受信点 z での散乱波の表現を導出する。なお、板の厚さは、欠陥の大きさに比べて十分厚いものとし、欠陥は板上面 B の近傍にあるものとする。

5.1 厚板における自由場

簡単のために、送信探触子を面 $\bar{B}$ 上の点 y に作用する集中線荷重としてモデル化する。点 y を表面 $\bar{B}$ のごく近傍の内部の点が表面 $\bar{B}$ 上の点に極限移行した点であるとみなすと、点 y の集中力から発せられる波動は、境界 $\bar{B}$ で反射せずに点 y から直接 $+x_2$ 方向に放射される波と、一度境界 $\bar{B}$ で反射した後、 $+x_2$ 方向に伝播する波か

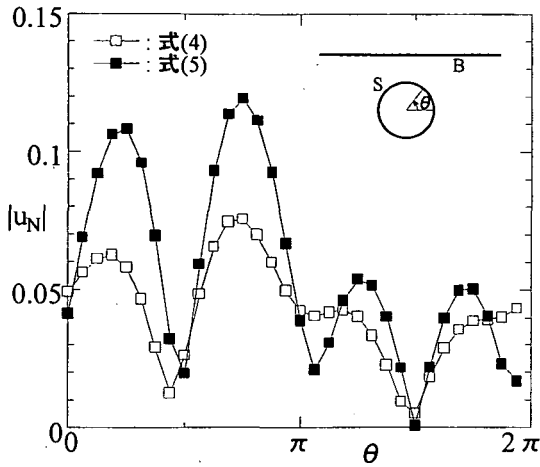


図-6 $|x_1|/a = 3$ において打ち切った場合の、境界 S 上の法線方向変位の絶対値 $|u_N|$.

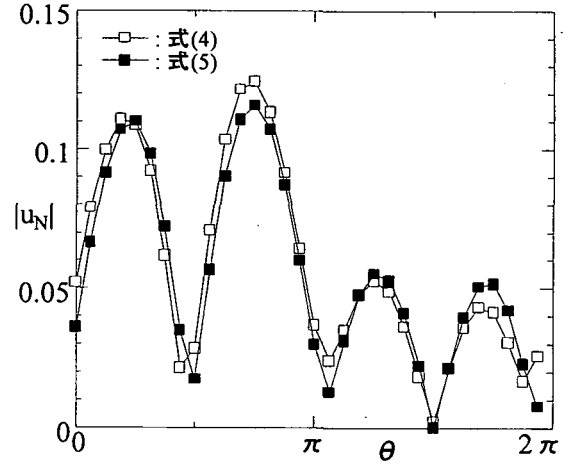


図-8 $|x_1|/a = 6$ において打ち切った場合の、境界 S 上の法線方向変位の絶対値 $|u_N|$.

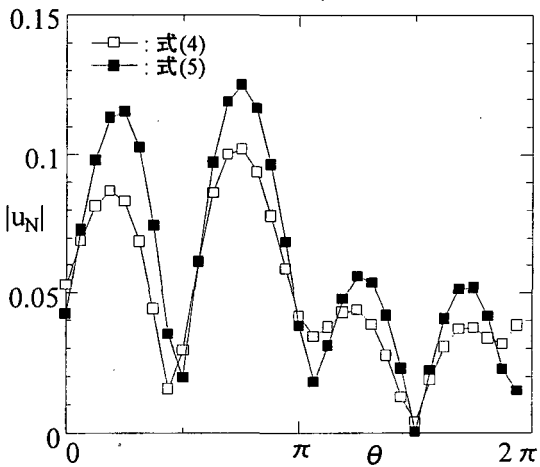


図-7 $|x_1|/a = 4$ において打ち切った場合の、境界 S 上の法線方向変位の絶対値 $|u_N|$.

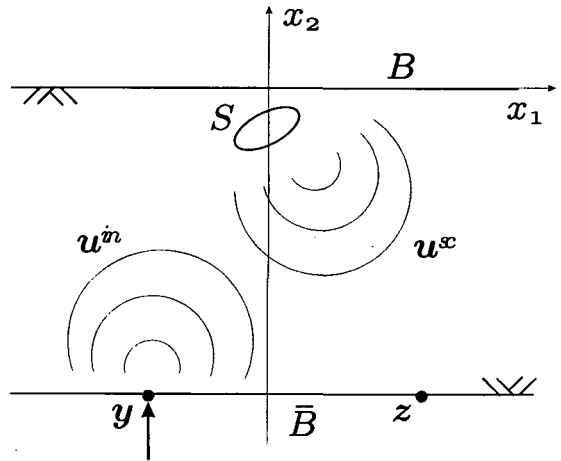


図-9 厚板の超音波非破壊検査モデル.

ら成る.

前者の $\bar{B}$ で反射せずに欠陥近傍の点 x に到達する波動は半無限体内の集中力によって発生する波動に他ならないので、式(10)の $U_{ik}(x, y)$ と式(12)の $U_{ik}^r(x, y)$ の和に等しい.

一方、点 y を発生して一度 $\bar{B}$ において反射してから点 x に到達する波動はさらに2種類の波動に分類される. すなわち、 $\bar{B}$ での反射後、直接点 x に到達する波 $U_{ik}^r(x, y)$ と $\bar{B}$ での反射後、再び板上面 B において反射してから点 x に達する波 $U_{ik}^{rr}(x, y)$ である. 波線理論的な考え方をいれれば、 $U_{ik}^r(x, y)$ と $U_{ik}^{rr}(x, y)$ はそれぞれ、次式のように書ける.

$$U_{ik}^r(x, y) \approx \sum_{\alpha=L,T} \sum_{\gamma=L,T} S_k^{-\alpha}(y) R^{\alpha\gamma}(\theta_\alpha) \times d_i^{+\alpha\gamma} e^{ik_\gamma \zeta^{+\alpha\gamma} \cdot x} \Big|_{\zeta_1 = -k_\gamma y_1 / (k_\alpha |y|)} \quad (13)$$

$$U_{ik}^{rr}(x, y) \approx \sum_{\alpha=L,T} \sum_{\gamma=L,T} \sum_{\beta=L,T} S_k^{-\alpha}(y) R^{\alpha\gamma}(\theta_\alpha) \Big|_{\zeta_1 = -k_\gamma y_1 / (k_\alpha |y|)} \times R^{\gamma\beta}(\theta_\gamma) d_i^{-\gamma\beta} e^{ik_\beta \zeta^{-\gamma\beta} \cdot x} \Big|_{\zeta_1 = -y_1 / |y|} \quad (14)$$

以上のことから、板下面 $\bar{B}$ 上の点 y から超音波が送信されたときの欠陥近傍の自由場 u^f は、それぞれ式(10), (12), (13), (14)で与えられる $U_{ik}(x, z)$, $U^r(x, z)$, $U_{ik}^r(x, z)$, $U_{ik}^{rr}(x, z)$ の4種類の波動場の和によって表される. 厚板における反射・散乱問題はこの自由場を式(5)に代入して解くことになる.

誘導過程からもわかるように、ここでの自由場の計算では板の上下面において一度ずつの反射しか考慮していない. 一般に、波動は板部材において多重反射をする. しかし、ここでは厚板を想定しているので、多重反射の各成分は分離して計測することが可能である.

う。よって、ここでの解析は1回の反射成分のみに注目した非破壊検査を想定している。もちろん、多重反射の影響を入れた解析が必要なときは、必要な回数の反射を考慮した自由場の計算を行なえばよい。

5.2 厚板における散乱波の表現

半無限弾性体の自由表面近傍にある欠陥からの散乱波変位 u^{sc} は、半無限弾性体のグリーン関数 G を用いて形式的に次のように書ける。

$$u^{sc}(z) = \int_S \{H(x, z)u(x) - G(x, z)t(x)\} ds_x \quad z \in D \quad (15)$$

ただし、点 z は半無限弾性体 D の内部の点である。また、 H はグリーン関数 G を変位としたときの表面力に対応するもので、二重層核と呼ばれるものである。

半無限体のグリーン関数 G の厳密な表現は、式(6)の U_{ik} と式(9)の U_{ik}^r の和によって与えられる。しかし、点 z が欠陥から十分に離れた下方にある場合は、式(10)ならびに(12)で与えられる近似式を用いることができる。

一般に、超音波は弾性体内部ではなく、表面において計測される。例えば、図-9に示すように、受信点 z が面 $\bar{B}$ 上にあるとすると、その表面での反射の影響を考慮に入れる必要がある。この反射の影響は、前節の自由場の計算における送信点 y での反射の影響と全く同じように考えることができる。点 z が表面 $\bar{B}$ 近傍の内部にあるとすると、散乱場は点 z に直接到達する波と自由表面 $\bar{B}$ において反射してから到達する波からなると考えられる。前者は、半無限弾性体のグリーン関数であり、 $U_{ik} + U_{ik}^r$ によって与えられる。一方、後者は、 $U_{ik} + U_{ik}^r$ なる波動が面 $\bar{B}$ において反射したものであるから、 $U_{ik}^r + U_{ik}^{rr}$ に相当する。よって、式(15)の関数 $G(x, z)$ を $U_{ik}(x, z) + U^r(x, z) + U_{ik}^r(x, z) + U_{ik}^{rr}(x, z)$ によって置き換えれば、受信点での反射を考慮した解析が可能となる。式(10)、(12)、(13)、(14)から明らかなように、 U_{ik}, U_{ik}^r などの近似解はいずれも、点 x に関して、 $Ad_i \exp(ik\zeta \cdot x)$ なる平面波の形式を持っている。よって、表面力 H は変位関数 G から容易に導けるし、式(15)の積分も何ら問題なく数値積分することができる。

6. おわりに

本研究では、半無限弾性体の自由表面近傍にある空洞による円筒波の散乱問題を境界要素法を用いて解析した。円筒波の反射波を波線理論を用いて近似的に評価することにより、自由表面上の要素数が少なくても高精度の解を得ることができた。また、厚板における超音波非破壊検査への応用として、送受信点での反射を考慮した定式化を示した。これは送受信点での反射の影響を波線理論によって近似的に評価し、それを半無限体の解析法に付加するものである。厚板における波動

散乱問題を有限要素法のような領域型解法でまともに解析しようとする、解くべき方程式系が非常に大きくなってしまふ。それに対して、本論文において提案した手法では、波線理論を用いて、厚板内部の波動伝播、ならびに、厚板表面における反射の影響を巧みに処理しており、対象とする領域が大きくなっても効率的な解析を行えると考えられる。

参考文献

- 1) Dravinski, M.: Influence of interface depth upon strong ground motion, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.72, pp.597-614, 1982.
- 2) Dravinski, M.: Ground motion amplification due to elastic inclusions in a half-space, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, Vol.11, pp.313-335, 1983.
- 3) Wong, H. L.: Effect of surface topography on the diffraction of P, SV, and Rayleigh waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.72, pp.1167-1183, 1982.
- 4) Kobayashi, S. and N. Nishimura: Analysis of dynamic soil-structure interactions by boundary integral equation method, in: P. Lascaux (ed.), *Proc. of the 3rd Int. Symposium on Numerical Methods in Engineering*, Pluralis, Paris, pp.353-362, 1983.
- 5) Niwa, Y., S. Hirose and M. Kitahara: Application of the boundary integral equation (BIE) method to transient response analysis of inclusions in a half space, *Wave Motion*, Vol.8, pp.77-91, 1986.
- 6) 廣瀬壮一, 丹羽義次, 大津政康: 地下空洞周辺における面外波動問題の解析について, 土木学会第36回年次学術講演会講演概要集第I部, I-265, pp.529-530, 1981.
- 7) Achenbach, J. D.: *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Pub., Amsterdam, 1973.

付録 I 最急降下法

以下の積分を考える。

$$I(k\Gamma) = \int_L F(\lambda) \exp[ik\Gamma f(\lambda)] d\lambda \quad (I.1)$$

ここに、 λ は複素数であり、 $k\Gamma$ は大きい実数値を表す。 $F(\lambda)$ 、 $f(\lambda)$ は $k\Gamma$ には無関係な関数で、積分経路 L を含む領域において正則であるとする。このとき、最急降下法を用いれば、 $I(k\Gamma)$ は以下のように表せる。

$$I(k\Gamma) = F(\lambda_s) \exp[ik\Gamma f(\lambda_s)] \left(\frac{2\pi i}{k\Gamma f''(\lambda_s)} \right)^{1/2} \quad (I.2)$$

ここに、 λ_s は $f'(\lambda_s) = 0$ を満たす根である。

(1998年4月24日受付)