

地盤統計学のシミュレーションを事前情報とした透水係数分布の逆解析

Back Analysis of Hydraulic Conductivity Distribution with Geostatistical Simulation Results as Prior Information

小林 晃・日向弘恵・藤居宏一

Akira Kobayashi, Hiroe Hinata and Koichi Fujii

*正会員 工博 岩手大学助教授 農学部農業生産環境工学科 (〒020-8550 盛岡市上田3-18-8)

**非会員 岩手大学大学院 農学部農業生産環境工学科 (〒020-8550 盛岡市上田3-18-8)

***正会員 農博 岩手大学助教授 農学部農業生産環境工学科 (〒020-8550 盛岡市上田3-18-8)

Geostatistics is a popular method to infer heterogeneous distribution of hydraulic conductivity. However, there are many cases where enough data to create the detail distribution are not obtained. From the point of view of environmental and mechanical coupling problems, the fine distribution is better than the coarse one such as zoning method. It is presented in this paper that the full heterogeneous distribution of the finite element model is inferred by Bayesian back analysis method. The simulation results out of geostatistical approach are used as a prior information. Kriged distribution is applied as a average one. It is found that the equivalent heterogeneous model can be introduced by the proposed method and the detail distribution is difficult to reproduce although.

Key Words : Back analysis, geostatistics, heterogeneity, permeability

1. はじめに

地盤物性は不均一であり、その分布を正確に調査から知ることができないことは、地盤工学のなかの大きな不確実性の一つである。無論、挙動のモデル化自体にも不確実なことは多数存在するが、浸透問題においては、ダルシー則の不確実性よりも、透水係数の分布を正確に求めることができないことの方が、予測性能に大きく影響を及ぼしていると考えたほうが妥当であろうと思われる。このような背景から浸透問題では統計的手法を用いて透水係数の分布を推定することが随分となされてきた。

統計的な手法のうち、クリギングは誤差分散を最小にするように求めた線形回帰モデルであり、実測値を滑らかに補間した分布を作成することができる。この手法も浸透問題によく用いられる¹⁾が、クリギングでは分散のような二次モーメント量を満足する様な分布は再現できない²⁾。そこで、地盤統計学では条件付きシミュレーションという手法がよく用いられる。これは、地盤物性分布を統計的に等価に再現しようというものである。しかし、全ての統計量を満足させることは困難であるので、一般には、その二次量までを満足させるように再現する。この手法

では多数の再現パターンを作成し、それらの統合によって、分布の統計的特性を満足させるエルゴード仮定を用いる。したがって、一つの再現パターンでの評価ではなく多数のパターンの評価を行い、その平均あるいは分散で評価することになる。この手法も浸透問題に多く用いられている³⁾。また、この手法は地盤中の物質移行の問題で、流速のばらつきが幾何学的な分散現象を表すことを反映して、マクロな分散現象のモデルとしてもよく用いられる⁴⁾。

これら、統計的な手法は元となるデータから統計モデルを作成するが、そのデータの数が少ない場合には、十分な精度を持った予測が困難となる。そのようなデータが不十分な場合には、それを補助するデータを用いて分布を推定することもなされる。これはインデケータシミュレーションあるいはノンパラメトリックシミュレーションと呼ばれ、空隙率のような計測が容易でかつ量の多いデータが存在する場合には、それを補助データとして透水係数の分布を推定することがなされる⁵⁾。また、トモグラフィーのような非破壊試験結果を補助データとすることも試みられている⁶⁾。この手法は地盤物性の分布を推定する有力な手法ではあるが、補助データと求めようとする物性の間の相関の大小が結果に大きく影響を

あたえ、どの程度補助データを利用するかなど、かなりのノウハウを必要とする。

以上の統計的手法は透水係数分布の不均一分布を求めるためのものである。基本的には有限要素モデルの全要素に異なる透水係数を分布させている。

一方、逆解析の地盤工学への応用に関する研究は、近年、我が国において非常に盛んである⁷⁾。本城ら⁸⁾は非定常データに基づく拡張ベイズ法による逆解析手法について検討しており、そこではABICによる最適なゾーン分割数の検討を行っている。これはケチの理論に基づき、情報量に見合ったモデルを選択しようというものである。このような考え方は、施工時の湧水量予測のような、流量という測定誤差が大きく、そして求められる予測精度も高くなく、さらに懸案とされる流出箇所が限られているように、あらかじめ結果が概ね推定できる場合には、そのような検討で同定されたモデルは経済的かつ有効であろうと思われる。そして、ゾーン分割という比較的少ない数の透水係数を逆推定しているのは、事前情報としての透水係数分布に関する情報が少ないためであろうと思われる。

一般の環境問題でも、調査・観測点数は十分ではない。しかも、検討すべき現象は、種々のシナリオに応じた異なる条件下で起こる可能性のあるものである。したがって、予測モデルは種々の可能性のある現象について、ある程度の精度を保持することが要求される。そのため、少ない情報からできるだけ精緻なモデルを作ることが必要であり、前述の統計的手法はそのような手法の一つである。

本論では、さらに有力な手法として、近年急速に発展している逆解析手法と統計的手法の融合を試みる。すなわち、事前情報として統計的に推定した不均一モデルを用いて、有限要素モデルの全要素の透水係数を逆解析する手法について検討する。手法は基本的には、本城らの非定常データを用いた手法と同じであるが、事前平均値分布にクリギング結果を用い、事前情報として条件付きシミュレーション結果を用いる。これにより、透水係数情報が少ない場合に、水理試験のデータを用いて、より精緻なモデルが作成できることが期待される。目的関数の最小化に当たってはCarrera and Neuman⁹⁾の手法にならって随伴状態方程式(adjoint state equation)を解くことにより行う。これにより、本手法の構造が明確になる。

2. 問題の定式化

2.1 観測モデル

観測点における観測水頭を次のように与える。

$$h^{*k} = h(\theta)^k + \varepsilon^k \quad (1)$$

ここで、 h^{*k} は時刻kの観測点における観測値ベクトル、 $h(\theta)^k$ は時刻kの各観測点における計算値ベクトル、 ε^k は誤差ベクトルで、その分布は多変量正規分布 $N(0, \sigma_\varepsilon^2 V_h)$ に従うとする。ここで σ_ε^2 は分散を表すスカラー値、 V_h は単位行列である。 θ は各要素の透水係数ベクトルである。

2.2 事前情報モデル

推定する全要素の透水係数ベクトル θ は次の事前情報を持つとする。

$$\theta = \theta^* + \delta \quad (2)$$

θ^* は透水係数ベクトルの事前平均値ベクトル、 δ は事前平均値の不確実性を表す確率変数ベクトルである。ここで、 θ^* にクリギングによる各要素での推定値を用いる。そして事前情報 θ は地盤統計学の条件付きシミュレーション手法によって全要素に対して発生させた値を用いる。すなわち、事前平均値も事前情報も全要素で異なる値となっており、ベクトルの次元は全要素数と一致する。 δ は事前情報の平均値との誤差ベクトルであるが、多変量正規分布 $N(0, \sigma_\delta^2 V_\theta)$ に従うとする。ここで、 σ_δ^2 は各要素のシミュレーションによる透水係数とクリギングによるそれとの分散である。 V_θ は単位行列とする。

ここで、地盤統計学の条件付きシミュレーションの概念について説明を加える。今、実際の観測値を用いてクリギングした分布を θ^* とする。そして、観測値を観測点の値とする条件を付けずにシミュレーションを行った値を θ' とする。これは実測値から得られた二次までの統計情報を満足するように乱数を用いて発生させたものである。そして、観測点における θ' の値を用いてクリギングを行った値を θ^{**} とする。すると、

$$r = \theta' - \theta^{**} \quad (3)$$

は観測点ではゼロとなるシミュレーション誤差ベクトルである。これを θ^* に加えることにより、観測点では観測値と同じになる条件付きシミュレーションが可能になる。

$$\theta = \theta^* + r = \theta^* + (\theta' - \theta^{**}) \quad (4)$$

したがって、条件付きシミュレーションによって得られる分布はクリギングによって得られる滑らかな分布に共分散をも満足するようにランダム成分を加えたものと言える。

2.3 ベイズ推定

ベイズの定理によると、事後分布 W は以上の情報

を用いて次のように書ける。

$$W = 2\pi^{-(KN+M)/2} (\sigma_\delta^2)^{-M/2} (\sigma_\epsilon^2)^{-KN/2} |V_h|^{-1/2} |V_\theta|^{-1/2} \exp[-(1/\sigma_\epsilon^2) \{ \sum_{k=1}^K (h(\theta)^k - h^k)^T V_h^{-1} (h(\theta)^k - h^k) - (1/\sigma_\delta^2) (\theta - \theta^*)^T V_\theta^{-1} (\theta - \theta^*) \}] \quad (5)$$

ここで、Nは観測点数、Kは総時間ステップ数、Mは透水係数の数であり、本論では全要素数と等しい。また、ここでは事前分布と事後分布の相対的な重みを表す適切化パラメータの検討は行わず、両者の重みは同じとしている。

θ のベイズ推定は式(5)を最大化することにより得られるが、最大化に関係のない定数項を省略すると次の関数Jを最小化することに帰する。

$$J = (1/\sigma_\epsilon^2) \{ \sum_{k=1}^K (h(\theta)^k - h^k)^T V_h^{-1} (h(\theta)^k - h^k) \} + (1/\sigma_\delta^2) (\theta - \theta^*)^T V_\theta^{-1} (\theta - \theta^*) \quad (6)$$

上式を最小化するためにJを微分する。

$$dJ = (1/\sigma_\epsilon^2) \sum_{k=1}^K dh(\theta)^k{}^T V_h^{-1} (h(\theta)^k - h^k) + (1/\sigma_\delta^2) d\theta^T V_\theta^{-1} (\theta - \theta^*) = 0 \quad (7)$$

これを解くためにCarrera and Neumanの手法を用いる。まず、浸透流の支配方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_s \frac{\partial h}{\partial x}) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (8)$$

ここで K_s は透水係数、 S_s は貯留係数である。

上式の第一変分は次のように与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_s (\frac{\partial \delta h}{\partial x})) + \delta K_s \frac{\partial h}{\partial x} = S_s \frac{\partial \delta h}{\partial t} + \delta S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (9)$$

上式に ψ をかけ、積分すると次式を得る。

$$\int_V \psi [\frac{\partial}{\partial x} (K_s \frac{\partial \delta h}{\partial x}) + \delta K_s \frac{\partial h}{\partial x}] - S_s \frac{\partial \delta h}{\partial t} - \delta S_s \frac{\partial h}{\partial t}] dv = 0 \quad (10)$$

これにグリーンの定理を用いる。

$$\int_V -\psi [K_s \frac{\partial \delta h}{\partial x} + \delta K_s \frac{\partial h}{\partial x}] - \psi [S_s \frac{\partial \delta h}{\partial t} + \delta S_s \frac{\partial h}{\partial t}] dv + \int_S \psi [K_s \frac{\partial \delta h}{\partial x} + \delta K_s \frac{\partial h}{\partial x}] n ds = 0 \quad (11)$$

上式を式(7)から引くと次式を得る。

$$\delta J = -(1/\sigma_\delta^2) V_\theta^{-1} (\theta - \theta^*) - \int_r \varphi dQ d\Gamma + \int_V \left\{ \nabla \varphi \delta K_s \frac{\partial h}{\partial x} + \varphi \delta S_s \frac{\partial h}{\partial t} \right\} dV + F \quad (12)$$

ここで、

$$F = (K_s \nabla \varphi) n d\Gamma \delta h - \int_V \left\{ \nabla (K_s \nabla \varphi) + S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} dV \delta h + \int_V \varphi(\tau) S_s \delta h(\tau) - \int_V \varphi(0) S_s \delta h(0) - 2 \int \sum_{k=1}^K \frac{V_h^{-1}}{\sigma_\epsilon^2} (h^k - h(\theta)^k) \delta h^k \quad (13)$$

$F=0$ とにおいて、それを満たす ψ を求める。その値を式(12)に代入することにより、次式を得る。

$$\theta = -\sigma_\delta^2 V_\theta^{-1} \int_r \varphi dQ d\Gamma + \sigma_\delta^2 V_\theta^{-1} \int_V \left\{ \nabla \varphi \delta K_s \frac{\partial h}{\partial x} + \varphi \delta S_s \frac{\partial h}{\partial t} \right\} dV + \theta^* \quad (14)$$

上式からわかるように本手法はクリギングから推定した透水係数分布に補正項を加えることにより実測値と合うような透水係数分布を求めることになる。

3. 適用性の検討

3.1 問題設定

本手法の適用性を検討するために広域の浸透流問題を考える。領域は図-1に示すように、1000x1000 x 500 mである。まず、実際の場合を設定し、その浸透流解析結果を計測値とする。

実際の場合の透水係数分布を作るために、まず図-1の比較孔を除く5本の観測孔に20mごとにランダムに透水係数値を与える。そして、各方向の透水係数分布のバリオグラムをsphericalモデルで表す。その際、そのレンジを図-2に示すような異方性を持たせる。そして、観測孔に設定した値と異方バリオグラムを用いてシミュレーションによって実際モデルの透水係数分布を作成する。sphericalモデルはレンジの範囲では距離が近いほど相関が強く、レンジを越えると相関がゼロとなるバリオグラムのモデルである。したがって、想定する場合は図-2のX'Y'Z'方向で相関距離が異なるように透水係数が分布しており、X'方向の相関がY'方向の5倍と大きくなり、Z'方向はY'方向の0.5倍と短くなる。この設定は観測孔に与えた透水係数とは独立に行われるので、観測孔のみの値からだけではこの異方性は推定できない。

実際モデルのメッシュは20m立方で構成されており、図-1に示した境界条件のもとで、中央の観測孔の深度200mの地点(図-1の揚水点)での水位を50m下げた場合の非定常問題を解く。この結果を実測値として、これを再現するように逆解析を行う。また、逆解析結果の予測性能を検討するために、比較孔(X=Y=400m)での値を比較する。この比較孔での実測値は逆解析時の観測値として用いていない。

逆解析に用いるモデルは50m立方の要素で構成されたものを用いる。これは実際の問題では、現位置の不均一の程度は不明であり、一般にはそれよりも粗いモデルを用いることが多いことを配慮して、実際モデルよりも粗いモデルを同定することにする。

観測孔の100mごとの透水係数値20個が実測値のデータとして与えられる。前述のように観測孔のデータと場の異方性の推定は無関係なので、20個のデータから等方を仮定してバリオグラムを作成し、クリギ

The diagram shows a rectangular plate in a 3D coordinate system. The plate's dimensions are 500m (along the X-axis) and 100m (along the Y-axis). The plate is oriented such that its normal vector makes a 30-degree angle with the Z-axis and a 15-degree angle with the Y-axis. The plate's edges are parallel to the X and Y axes. The coordinate system has axes X, Y, Z and X', Y', Z'.

Figure 1 is a scatter plot with a fitted curve. The x-axis is labeled 'distance(m)' and ranges from 0 to 1000 with major ticks every 200 units. The y-axis is labeled 'semivariogram' and ranges from 0 to 0.35 with major ticks every 0.05 units. There are 12 data points represented by black dots. A solid black line represents the fitted model. The data points are approximately at (0, 0), (100, 0.12), (200, 0.18), (300, 0.25), (400, 0.32), (500, 0.34), (600, 0.24), (700, 0.31), (800, 0.20), (900, 0.32). The fitted curve starts at (0, 0) and increases, leveling off at a semivariogram value of approximately 0.32 for distances greater than 500 meters.

Time (hour)	Measurement (m)	Simulation (m)	Back analysis (m)
0	0.0	0.0	0.0
10	3.8	4.5	3.8
20	4.0	10.5	4.0
40	4.0	11.2	4.0
60	4.0	11.5	4.0
80	4.0	11.5	4.0
100	4.0	11.5	4.0
120	4.0	11.5	4.0

Figure 10 is a line graph showing drawdown (m) versus time (hour) for the back analysis of the 1997 earthquake. The graph compares measurement (solid line), simulation (dashed line), and back analysis (dash-dot line). The measurement and simulation curves are nearly identical, showing a rapid initial drawdown followed by a plateau around 4.5 m. The back analysis curve shows a much higher drawdown, reaching a plateau around 12 m.

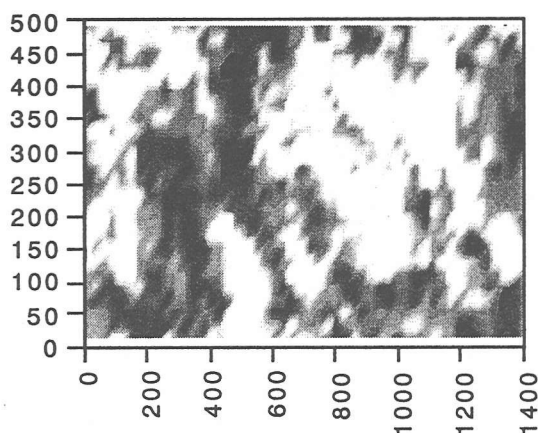
Time (hour)	Measurement (m)	Simulation (m)	Back analysis (m)
0	0.0	0.0	0.0
5	2.5	2.5	5.0
10	3.5	3.5	8.5
20	4.2	4.2	11.0
40	4.5	4.5	11.8
60	4.5	4.5	12.0
80	4.5	4.5	12.0
100	4.5	4.5	12.0
120	4.5	4.5	12.0

Time (hour)	Measurement (m)	Simulation (m)	Back analysis (m)
0	0.0	0.0	0.0
10	1.5	4.0	2.5
20	2.5	8.0	3.5
40	3.0	9.0	4.0
60	3.0	9.2	4.1
80	3.0	9.3	4.15
100	3.0	9.4	4.2
120	3.0	9.5	4.2

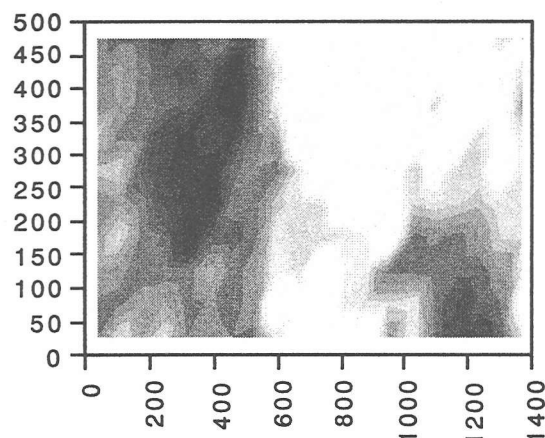
Time (hour)	Measurement (m)	Simulation (m)	Back analysis (m)
0	0.0	0.0	0.0
10	0.8	4.5	4.5
20	1.4	6.5	6.5
30	1.7	7.2	7.2
40	1.8	7.4	7.4
60	1.8	7.5	7.5
80	1.8	7.5	7.5
100	1.8	7.5	7.5
120	1.8	7.5	7.5

図-4 比較孔での水位低下

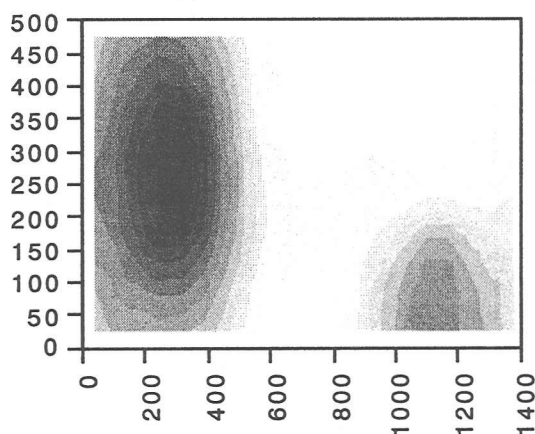
-6 -6.2-6.4-6.6-6.8 -7 -7.2-7.4-7.6-7.8 -8



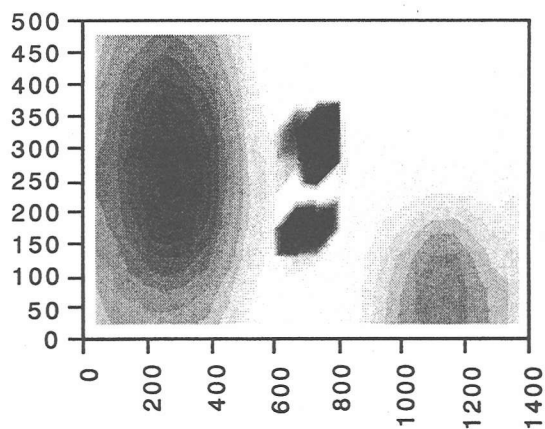
(1) 実際モデルの分布



(2) シミュレーションの分布



(3) クリギングの分布



(4) 逆解析後の分布

図-5 AA'鉛直断面の透水係数分布

コンタースケールは $\log(K)$ ($K(m/s)$) で全図同一スケール

3.2 逆解析結果

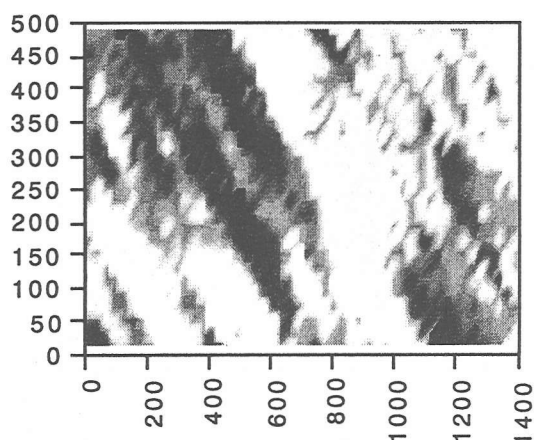
図-4に比較孔での実測値と逆解析後の計算結果および事前情報であるシミュレーション結果から計算した結果を示す。事前情報を用いた結果は条件付きシミュレーションの一つのリアライゼーションの評価といえる。図-4によると、逆解析により予測結果はかなり改善されていることがわかる。一方、図-5は図-1のAA'鉛直断面の透水係数分布を示している。これは図-2のレンジが短い方向に近い断面である。分布は(2)のシミュレーション結果が実測値分布に近い分布を示しており、(4)の逆解析結果は(3)のクリギング結果を補正したような分布になっているが、(1)の実測分布に似た方向には改善されていない。図-6は同様に図-1のBB'鉛直断面の透水係数分布である。これはレンジが長い方向に近い断面である。同図に

よると、(2)のシミュレーションの結果も全体的に透水係数が小さめに推定されており、よく再現しているとは言い難い。(4)の逆解析結果はAA'断面と同様に(3)のクリギングによる結果に中央部に補正が加えられた様な形になっている。

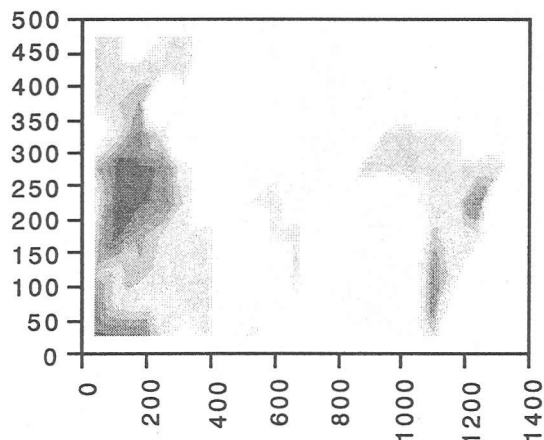
図-5、6をみると、本手法で逆解析された透水係数分布は水位低下の大きかった揚水地点の周辺の透水係数がクリギング結果から大きく変化し、他の部分はさほど変化していないことがわかる。これは式(13)で解かれる ψ が観測誤差の大きな所で大きくなるため、その辺りの透水係数が補正され、 ψ の変化の小さい所ではクリギングからあまり値が変化しないためであろう。

図-7は逆解析の結果得られた透水係数分布の図-2のX'方向とY'方向のバリオグラムである。これは全要

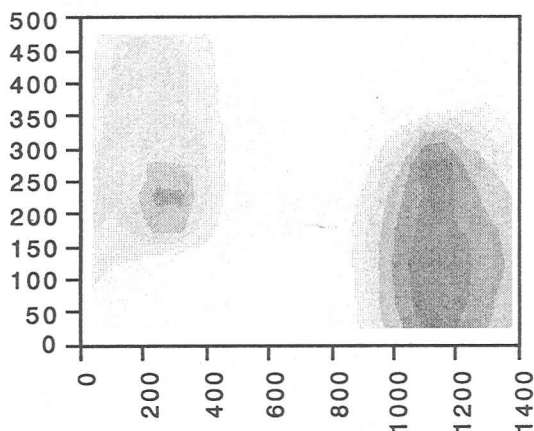
-6 -6.2-6.4-6.6-6.8 -7 -7.2-7.4-7.6-7.8 -8



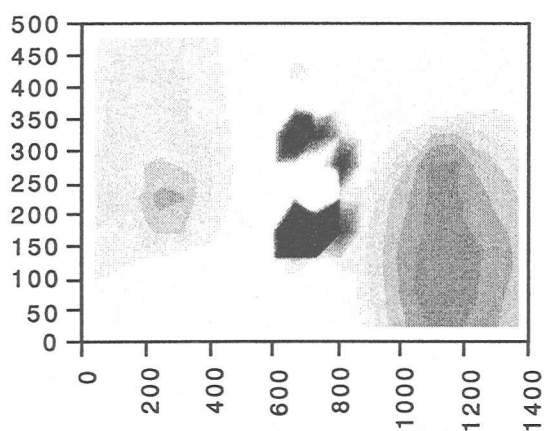
(1) 実際モデルの分布



(2) シミュレーションの分布



(3) クリギングの分布



(4) 逆解析後の分布

図-6 BB鉛直断面の透水係数分布
コンタースケールは $\log(K)$ ($K(m/s)$) で全図同一スケール

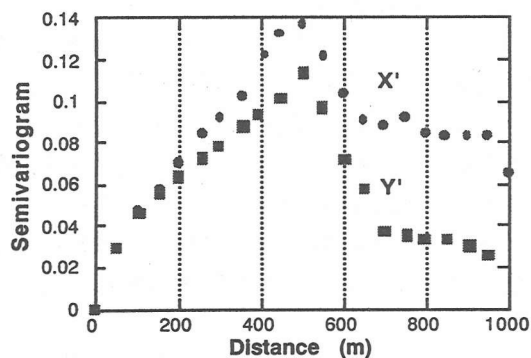


図-7 逆解析後のバリオグラム

素の値を用いて求めた。同図によると、両方向とも500 mぐらいまでバリオグラムは上昇し、その後、低下している。その低下の仕方はY'方向の方が著しい。逆解析の事前情報と事前平均は図-3のバリオグラムを用いて発生させている。同図と比較するとレンジの大きさは逆解析前後で変化は見られないが、レンジより遠いところでの相関が逆解析後では回復、すなわち強くなっている。レンジの値があまり変わらないのは先述のように基の事前平均であるクリギングの分布を一部補正したような分布を同定しているからであろう。一方、レンジ以遠の相関の回復は設定した異方性の影響かもしれない。

3.3 事前情報の影響

次に、事前情報の影響について検討する。上述と同じモデルで事前情報のシミュレーション結果を乱数の初期値を変えて発生させたものを用いて、同様の逆解析を行う。図-8にそのシミュレーションの分布を示す。図-5、6の(2)と比較すると、その分布が異なっていることがわかる。図-9はシミュレーション結果を用いた浸透流解析結果および逆解析結果の比較である。今回の場合は、逆解析の収束が悪く、実測値とは若干乖離している。しかしそれでもシミュレーション結果よりよい一致を示している。図-10は逆解析後の透水係数分布である。図-5、6の(4)と比較すると揚水地点（同図の(700, 300)）での変化が少なくなることがわかる。以上から、本論で展開した逆解析手法では、事前情報に用いるシミュレーション結果は逆解析の収束過程に影響を与えることがわかる。

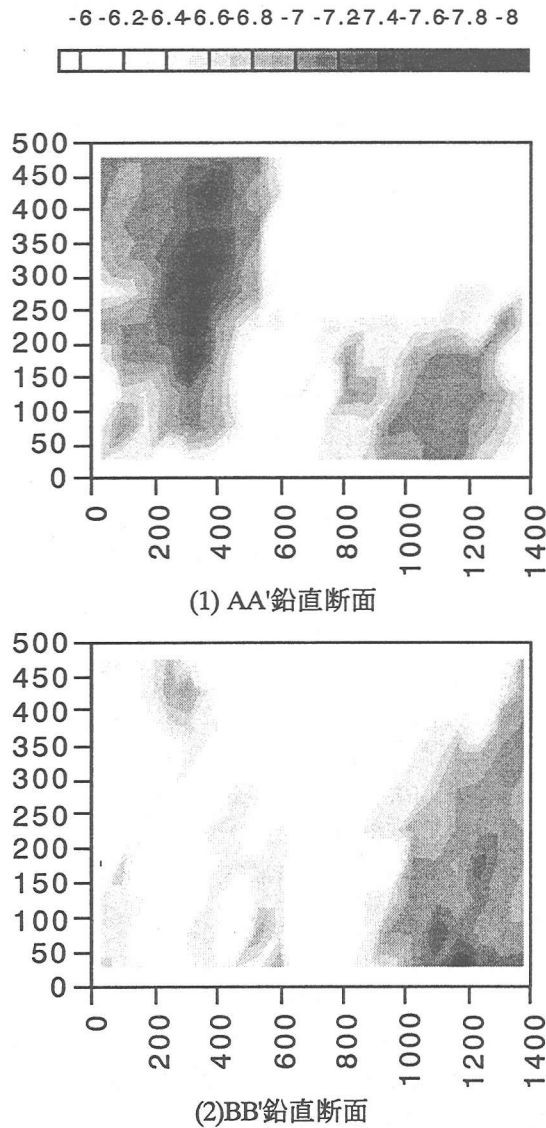


図-8 シミュレーションの分布
コンタースケールはlog(K) (K(m/s))

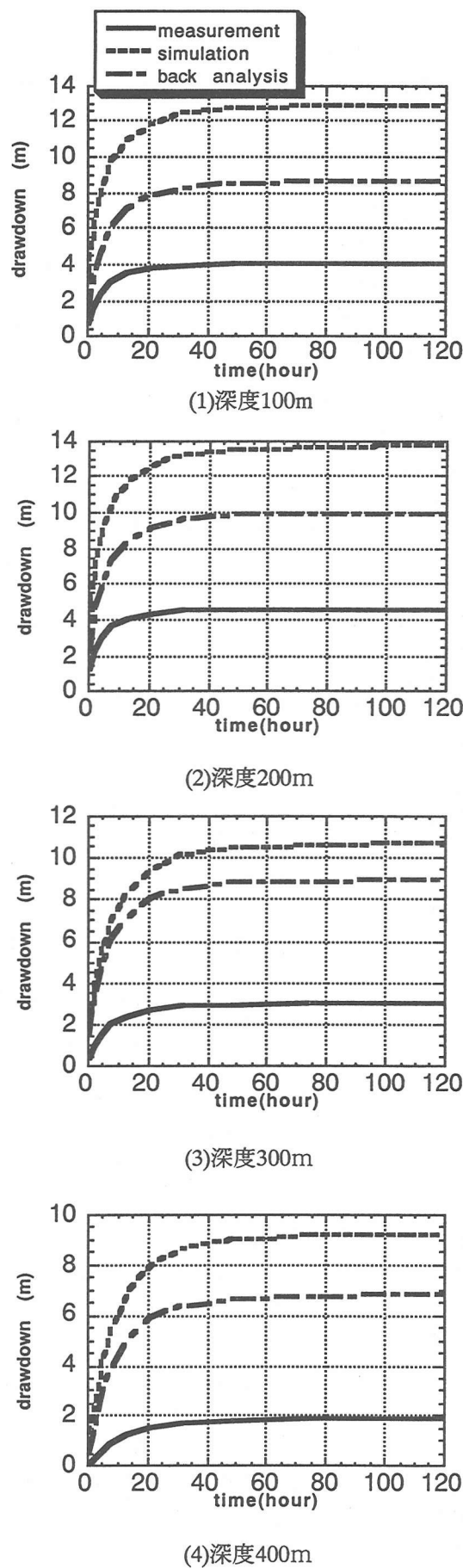
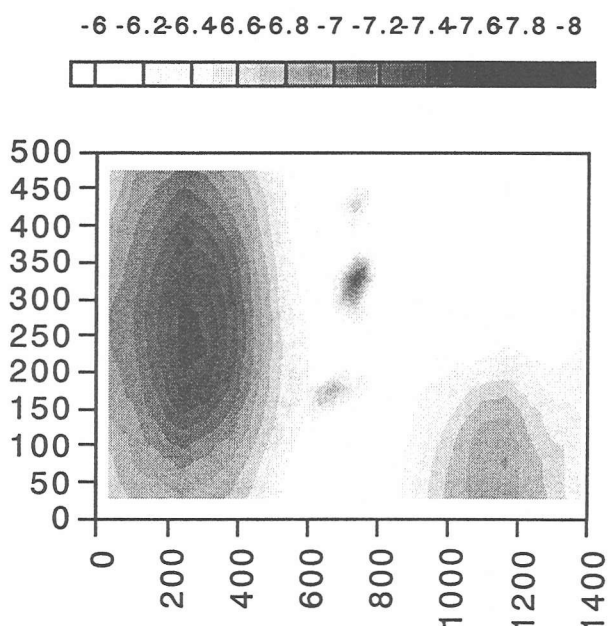
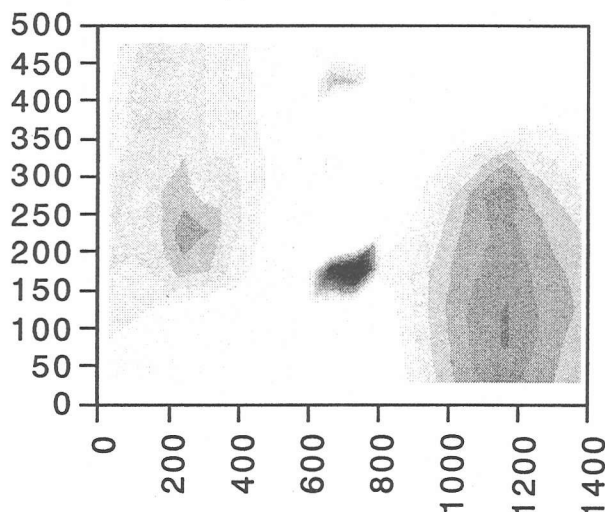


図-9 比較孔での比較



(1) AA'鉛直断面



(2) BB'鉛直断面

図-10 逆解析後の透水係数分布
コンタースケールは $\log(K)$ ($K(m/s)$)

4. 結論

本論では、地盤統計学のシミュレーション結果を事前情報とし、クリギング結果を事前平均としたベイズ法による逆解析手法について検討した。その結果、本手法に関して以下のような知見を得た。

- (1) 本手法で同定される透水係数分布は、事前平均に用いたクリギングによる分布を観測誤差の大きなところで補正するような形で求められる。
- (2) 同定された透水係数分布による予測は、地盤統計学のシミュレーションによる予測よりも精度は高い。
- (3) 同定された透水係数分布は、実際のモデルがもつ異方性も再現できる可能性を有している。しか

し、これについては観測点の位置も影響を持つものと思われる。

- (4) 事前情報であるシミュレーション結果が異なると逆解析過程の収束が悪くなる場合がある。

はじめに述べたように、本論の目的は透水係数の情報が少ない場合に、実測された水位変化を用いた逆解析手法により透水係数分布の精緻なモデルを作る手法の検討であった。しかし、結果は水位変化はよく再現できるモデルは作成できたが、分布はシミュレーションより良いモデルにはなっていない。これは事前情報としてのシミュレーション結果をより重視した手法が望ましいことを示唆している。

参考文献

- 1) 例えば G. de Marsily: Quantitative Hydrogeology Groundwater Hydrology for Engineers Chapter 11, pp.284-337, 1986.
- 2) C. V. Deutsch and A. G. Journel: GSLIB Geostatistical Software Library and User's Guide, Oxford University Press, 1992.
- 3) J. J. Gomez-Hernandez and S. M. Gorelick: Effective Groundwater Model Parameter Values: Influence of Spatial Variability of Hydraulic Conductivity, Leakage, and Recharge, Water Resour. Res., Vol. 25, No.3, pp.405-419, 1989.
- 4) A. Kobayashi and M. Chijimatsu: Continuous Modeling of Transport Phenomena through Fractured Rocks, Soils & Foundations, (in press)
- 5) H. Zhu: Modeling Mixture of Spatial Distributions with Integration of Soft Data, Ph D thesis, Stanford University, 1991
- 6) 日向弘恵、小林晃: 比抵抗トモグラフィーと亀裂情報を用いた岩盤透水係数の推定、第33回地盤工学研究発表会講演集, pp.1837-1838, 1998
- 7) 佐藤忠信ほか: 地盤工学における逆解析、土と基礎 43-4-44-6, 1995, 4 - 1996, 6
- 8) 本城勇介、橘川正男、小川正二: 拡張ベイズ法による広域地下水モデルの逆解析: 非定常データに基づく場合、土木学会論文集 No.561/III-38, pp.175-183, 1997
- 9) J. Carrera and S. P. Neuman: Estimation of Aquifer Parameters Under Transient and Steady State Conditions: 2. Uniqueness, Stability, and Solution Algorithms, Water Resour. Res., Vol. 22, No.2, pp.211-227, 1986

(平成10年4月24日受付)