

非偏平な薄肉円筒シェルの後座屈挙動

Post-buckling Behavior of Non-shallow Thin-walled Cylindrical Shells

河野公一*・横山 薫**・中沢正利***・岩熊哲夫****

Kouichi KOHNO, Kaoru YOKOYAMA, Masatoshi NAKAZAWA and Tetsuo IWAKUMA

*正会員 修士(工学) 川崎重工業(株) 播磨工場 (〒677-0155 兵庫県加古郡播磨町新島 8)

**正会員 修士(工学) 三菱重工業(株) 横浜製作所 (〒231-8715 横浜市中区錦町 12)

***正会員 工博 東北大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

****正会員 Ph.D. 東北大学教授 工学研究科土木工学専攻

In the post-buckling analysis of axially compressed thin-walled cylindrical shells, we can use two kinds of strain-displacement relation, i.e. Donnell type and Flügge type. Former is relatively simple, but is not so correct (due to shallow assumption) when a shell becomes long. In this study, the Flügge type is employed and more accurate equilibrium paths in the post-buckling region are traced numerically. In order to estimate the snapping or bifurcated paths, the energetic evaluation is also applied.

Key Words : Non-shallow Cylindrical Shells, Elastic Range, Post-buckling Behavior, Bifurcation, Flügge Type, Potential Energy

1. まえがき

円筒シェル構造の用途は、橋脚、容器(タンク)、煙突、塔など多岐にわたっており、材料が鋼製のものではその優れた力学特性より、一般に薄肉かつ無補剛形状で利用される例が多い。この薄肉円筒シェルが軸圧縮を受けると、一般には高い圧縮座屈強度を発揮するものの、座屈した後は急激な強度低下を示すことが知られている。これは、座屈後の変形モードがそれまでの軸方向波形単独から周方向波形の発生へと大きく変化する事実起因している。これが他の柱や平板の座屈問題と大きく異なる点であり、ゆえに、軸圧縮力を受ける薄肉円筒シェルの座屈後挙動をより詳細に調査・検討する必要性がある。

このような背景のもとで、薄肉円筒シェルの弾性座屈理論の研究は今世紀初頭より多数行われており、その座屈解析におけるひずみ-変位関係式には、Donnell型¹⁾とFlügge型²⁾がよく用いられてきた。前者は取り扱いが簡単であるが、シェルが偏平である仮定のもとに面外変位成分が面内変位成分に比べて十分大きいことを前提としているため、Batdorfの形状係数 Z が大きくなる(本論文ではこれを非偏平と呼ぶ)ほど大きな誤差を伴うとされている。実際、八巻ら³⁾はシェルの微小要素の力のつりあい式を厳密に解くことにより、初期座屈において非偏平なシェルに対しては精度が悪くなることを報告している。一方、後者は比較的厳密で広い範囲にわたる形状に対して適用できるが、計算が極めて複雑となるため解析例がほとんど無く、座屈後挙動の研究については偏平なシェルに対して前者を用いているものが大

半であった。

そこで本論文では、ひずみ-変位関係式にFlügge型を用いてあらゆる形状のシェルに対してより厳密な座屈後挙動を解析する。その際、山田ら⁴⁾と同様に非線形シェル理論とエネルギー法に基づく解析的な数値解析手法を用いてつりあい経路を追跡し、Donnell型による解析との精度比較を行う。

また、初期座屈点については、八巻ら³⁾の座屈解析によると、シェル形状が非偏平になるにつれて初期座屈モードの周方向波数が減っていくと報告されている。そこで、いくつかの形状の異なるシェルに対してそれぞれ周方向波数別に初期座屈荷重を解析し、初期座屈荷重が最小となるモードを明らかにした上で、長さ半径比による初期座屈モードの推移を調査する。

さらに、座屈後分岐経路について軸方向変位を制御すると想定した時、初期座屈後どの経路に飛び移るのかという問題がある。ここでは、座屈後の各分岐経路について全ポテンシャルエネルギーを算出し、そのエネルギー量から飛び移り現象の可能性を推測することを試みる。

2. 非線形弾性シェル理論とエネルギー法に基づく手法

一様軸圧縮力を受ける円筒シェルのつりあい式を、全ポテンシャルエネルギー停留の原理を用いたRayleigh-Ritz法により導く。対象とする薄肉円筒シェルは、DonnellおよびFlüggeの非線形シェル理論の仮定に従うものとする。

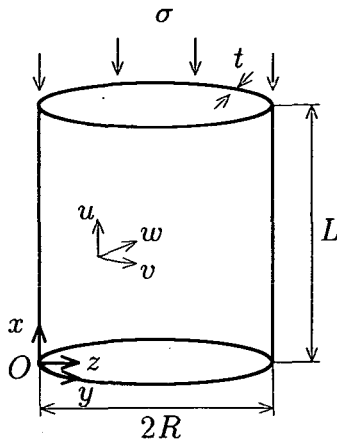


図-1 薄肉円筒シェル

2.1 全ポテンシャルエネルギー

図-1に示すような軸方向高さ L 、半径 R 、シェル厚 t の完全薄肉円筒シェルを考える。座標は下端のある点に原点を置き、軸方向上向きに x 、周方向反時計回りに y 、面外方向中心向きに z と定める。また各方向の変位をそれぞれ u, v, w と定義する。軸方向に座屈前の一様圧縮膜応力 σ を受ける場合、全ポテンシャルエネルギーは以下のように表わせる。

$$\Pi = \Pi_B + \Pi_M + \Pi_L \quad (1)$$

ここに Π_B は曲げひずみによるエネルギー、 Π_M は面内ひずみによるエネルギー、 Π_L は外力ポテンシャルであり、それぞれ次のように表される。

$$\Pi_B = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (m_x \kappa_x + m_y \kappa_y + 2m_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \quad (2a)$$

$$\Pi_M = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (n_x \varepsilon_x + n_y \varepsilon_y + 2n_{xy} \varepsilon_{xy}) dx dy \quad (2b)$$

$$\Pi_L = - \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(-\sigma t \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \quad (2c)$$

なお、積分項の中で (m_x, m_y, m_{xy}) は曲げモーメント合応力、 (n_x, n_y, n_{xy}) は面内合応力、 $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$ は断面の回転角や曲率変化に相当する曲げひずみ成分、 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})$ は肉厚中央面での面内ひずみ成分である。

2.2 構成則及びひずみ-変位関係

円筒シェルはヤング率 E 、ポアソン比 ν の等方性線形弾性材料で構成されているとし、各合応力は Hooke の法則より次のようにひずみ成分と関連付けられる。

$$\begin{aligned} m_x &= D(\kappa_x + \nu \kappa_y), & m_y &= D(\kappa_y + \nu \kappa_x), \\ m_{xy} &= D(1 - \nu) \kappa_{xy} \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} n_x &= K(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), & n_y &= K(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \\ n_{xy} &= K(1 - \nu) \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (3b)$$

ここに曲げ剛性 $D \equiv Et^3/12(1 - \nu^2)$ 、面内剛性 $K \equiv Et/(1 - \nu^2)$ と定義する。

ひずみ-変位関係式には Donnell 型と Flügge 型の両者を用い、それらによる差異を比較する。まず Donnell 型は、薄肉円筒シェルが比較的偏平であるという近似を行うため、面内変位 u, v の 2 次項を無視した形で表される¹⁾。一方 Flügge 型は、非偏平な薄肉円筒シェルにも対応するように全方向の変位 u, v, w の 2 次項を網羅した次の形で表される²⁾。式中には Flügge 型に拡張したことによる付加項を下線部で示した。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_y &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \kappa_{xy} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right)^2 \right\}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2.3 境界条件と変位関数

座屈後の変位境界条件として、円筒上下面で古典的単純支持 SS3(文献 3) では S3 に相当) を仮定すると、次のように表わせる。

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} = v = 0 \quad \text{at } x = 0, L \quad (5)$$

これらを満足するように、変位関数として次のような二重フーリエ級数を導入する。

$$u = \frac{Lt}{R} \sum_i \sum_j \bar{u}_{ij} \cos \frac{iy}{R} \cos \frac{j\pi x}{L} \quad (6a)$$

$$v = \frac{Lt}{R} \sum_i \sum_j \bar{v}_{ij} \sin \frac{iy}{R} \sin \frac{j\pi x}{L} \quad (6b)$$

$$w = t \sum_i \sum_j \bar{w}_{ij} \cos \frac{iy}{R} \sin \frac{j\pi x}{L} \quad (6c)$$

ここで、 i は周方向の波数、 j は軸方向の半波数であり、 $\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}, \bar{w}_{ij}$ は無次元化変位パラメータである。

初期座屈後の分岐経路については、八巻ら³⁾により一様軸圧縮力を受けるシェルの面外変形モードとして、 $x=L/2$ に関して対称なモードと非対称なモードが報告されているが、本解析では仮定した変形モードの制約より、対称モードのつりあい経路の追跡のみに限定した。

2.4 Ritz 法によるつりあい式の誘導

構成則 (3)、変位関数 (6)、及びひずみ-変位関係式 (4) を式 (1) に代入することにより、 $\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}, \bar{w}_{ij}$ 、及び無次元化軸圧縮荷重 $Q \equiv \sigma L^2 / \pi^2 D$ により全ポテ

ンシヤルエネルギーが次のように表される。

$$\Pi = \Pi(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}, \bar{w}_{ij}, Q) \quad (7)$$

この全ポテンシヤルエネルギーが全ての自由度に関して停留するという条件、すなわち

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{u}_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{v}_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{w}_{ij}} = 0 \quad (8)$$

を課すと $\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}, \bar{w}_{ij}, Q$ に関する連立 3 次非線形代数方程式で表されるつりあい式が導かれ、以下のような形式で書き下すことができる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}, \bar{w}_{ij}, Q) = 0 \quad (9)$$

この (9) 式を標準的な増分法と荷重制御および変位パラメータ制御法を併用した Newton-Raphson 法を用いて解くことにより、つりあい経路を追跡した。

3. 一様軸圧縮力を受ける薄肉円筒シェルの解析

3.1 偏平な薄肉円筒シェルの場合

Flügge 型による解析結果の精度を見るため、 $Z=501$ ($R/t=405$, $L/R=1.14$, $\nu=0.3$) と偏平な薄肉円筒シェルのつりあい経路を Donnell 型による解析結果とともに図-2に示す。ここで縦軸は、無次元化した荷重パラメータ $\Sigma \equiv \sigma/\sigma_{cl}$ を示し、横軸は、 $y=0$ での無次元化軸方向変位量 $\bar{\delta} = -(R/Lt)[u]_{x=0}^x = L$ を表す。 σ_{cl} は、一様軸圧縮応力を微小変位理論に基づいて、座屈前変形を無視して求めた古典座屈応力⁵⁾

$$\sigma_{cl} \equiv \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Et}{R} \quad (10)$$

である。また Z は形状係数で

$$Z \equiv \sqrt{1-\nu^2} \frac{L^2}{Rt} \quad (11)$$

と定義され、Batdorf の曲率パラメータとも呼ばれる⁶⁾。なお、モード数 N 、周方向波数 i 、軸方向半波数 j については追跡する経路のモード $i=b$ に対して以下のものを採用している。

$$N = 60 \begin{cases} i = \begin{cases} 0, b, 2b, 3b & \text{for } \bar{u}_{ij} \\ b, 2b, 3b & \text{for } \bar{v}_{ij} \\ 0, b, 2b & \text{for } \bar{w}_{ij} \end{cases} \\ j = 1, 3, 5, 7, 9, 11 & \text{for } \bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}, \bar{w}_{ij} \end{cases} \quad (12)$$

図において、実線は接線剛性行列の固有値が全て正である安定な経路を示し、破線は固有値が一つ以上負である不安定な経路を示している。Flügge 型による解析結果は、初期座屈荷重点 A や座屈後の各分岐経路 ($i=11, 10, 9$) において Donnell 型による解析結果とほとんど一致しており、シェルが偏平 ($Z=501$, $R/t=405$, $L/R=1.14$) な場合には Donnell 近似でよいことが確認された。図中に示す右肩上がりの各分岐経路 ($i=11, 10, 9$) の先端は、軸方向変位の極大点であり、その後は不安

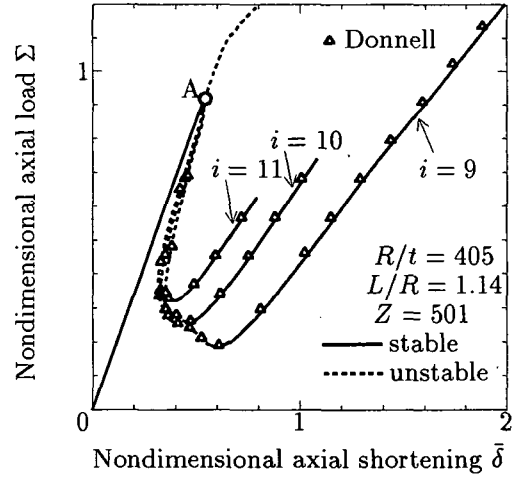


図-2 Flügge 型による偏平なシェルの軸方向圧縮力 Σ と軸方向変位 $\bar{\delta}$ の解析結果

定な経路に移行する⁷⁾。すなわち二次座屈点である。しかし本解析では、座屈モードの倍率を与える無次元化変位パラメータを制御しているものの、軸方向変位を直接制御しているわけではないので、飛び移り点前後を連続して追跡することは一般的にできないため、極大点までの安定経路のみを示すに留めた。以後の図についても、各分岐経路の先端は極大点を意味する。

3.2 非偏平な薄肉円筒シェルの場合

非偏平な場合について、八巻ら³⁾は Flügge の式を用いた座屈解析の結果より、長さ半径比 L/R が大きくなるにつれて周方向波数 i が減っていくことを報告している。そこで本解析では、初期座屈モードが変わることによって座屈後の分岐経路にどのように影響するかを調べるため、八巻らの解析で初期座屈モードが $(i, j) = (5, 1), (3, 1)$ となる次の 2 つの形状のシェルを対象とした。

- $Z=500$ ($R/t=100$, $L/R=2.29$, $\nu=0.3$)
- $Z=3999$ ($R/t=100$, $L/R=6.48$, $\nu=0.3$)

なお、モード数 N 、周方向波数 i 、軸方向半波数 j については計算時間を考慮した結果、追跡する経路のモード $i=b$ に対して以下の値を採用している。

$$N = 48 \begin{cases} i = (12) \text{ 式と同じ} \\ j = \begin{cases} 1, 3, 5, 7, 9, 11 & \text{for } \bar{u}_{ij} \\ 1, 3, 5, 7 & \text{for } \bar{v}_{ij}, \bar{w}_{ij} \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

(1) 初期座屈点について

円筒シェルの初期座屈点は、周方向に同一の波数を持つ座屈モードが異なる位相を持つ実際の場合には多重分岐点となることが知られている。しかし本解析では、式 (6) のように位相を考えていないため、それぞれ周方向

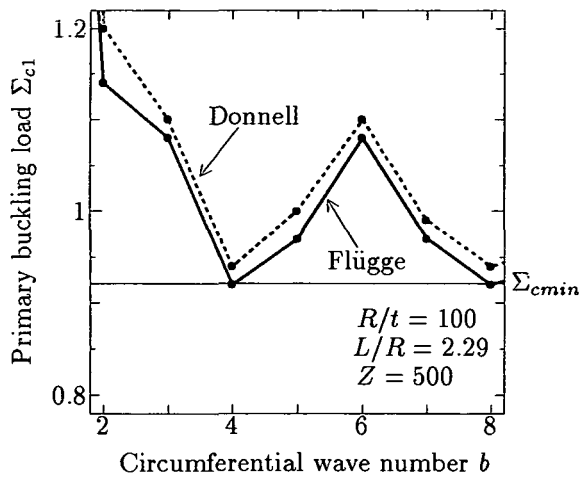


図-3 周方向波数別の初期座屈荷重 ($Z=500$)

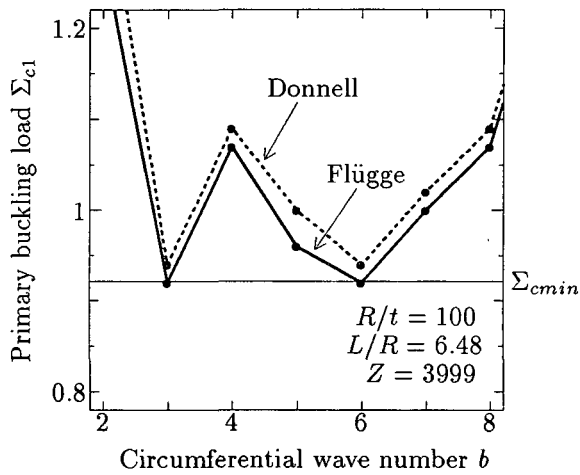


図-4 周方向波数別の初期座屈荷重 ($Z=3999$)

波数別に異なる初期座屈点が存在する。

$Z=500$ および 3999 の周方向波数別の初期座屈荷重 Σ_{c1} を図-3, 4 に示す。また、Donnell 型と Flugge 型それぞれの解析結果にそれほどの違いは見られないが、Flugge 型の方が座屈荷重値が低めに出ることがわかる。

次に初期座屈荷重が最小 (Σ_{cmin}) となるモードを調べてみる。図より Donnell 型、Flugge 型いずれの解析においても最小の座屈荷重を与えるモードは $Z=500$ の時は $b=4, 8$ 、 $Z=3999$ の場合は $b=3, 6$ で 2 つ存在している。そこで、モード数 N を

$$N = 34 \begin{cases} i = \begin{cases} 0, b, 2b & \text{for } \bar{u}_{ij} \\ b, 2b & \text{for } \bar{v}_{ij} \\ 0, b & \text{for } \bar{w}_{ij} \end{cases} \\ j = (13) \text{ と同じ} \end{cases} \quad (14)$$

と減らして再び解析すると、まず $Z=500$ 、 $b=8$ の時と $Z=3999$ 、 $b=6$ の時の初期座屈荷重値はモード数 $N=48$

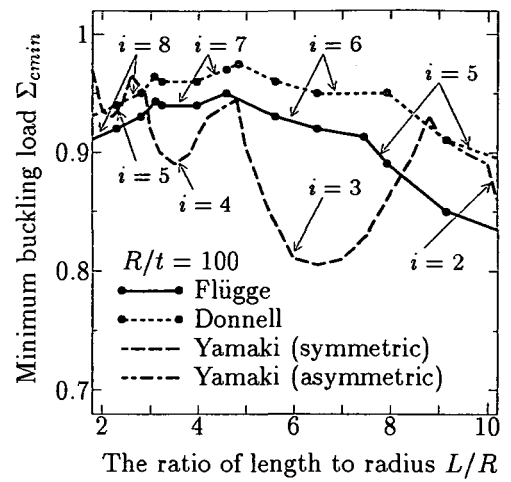


図-5 長さ半径比 L/R による初期座屈荷重の推移

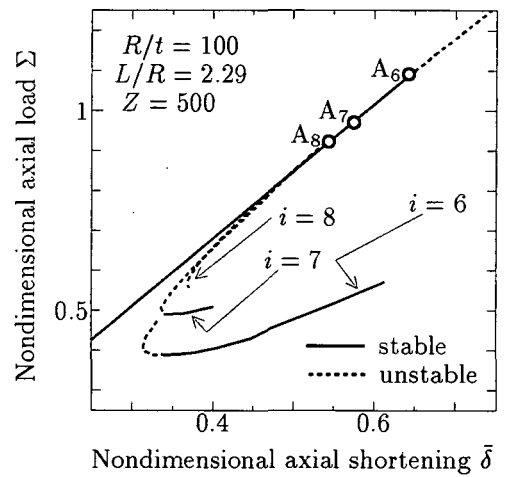


図-6 Flugge 型によるつりあい経路 ($Z=500$: $i=6, 7, 8$)

の時と変わらない。これより $\bar{w}_{ij}$ のモード $i=0, b, 2b$ での $Z=500$ 、 $b=8$ の時のモード $i=2b=16$ 、 $Z=3999$ 、 $b=6$ の時のモード $i=2b=12$ が初期座屈荷重値に影響しないことがわかる。一方 $Z=500$ 、 $b=4$ の時と $Z=3999$ 、 $b=3$ の時の初期座屈荷重値はモード数 $N=48$ の時より大きくなる。これより $\bar{w}_{ij}$ のモード $i=0, b, 2b$ での $Z=500$ 、 $b=4$ の時のモード $i=2b=8$ 、 $Z=3999$ 、 $b=3$ の時のモード $i=2b=6$ が初期座屈荷重値に影響していることがわかる。よって初期座屈モードについては、 $Z=500$ の時は $i=8$ 、 $Z=3999$ の時は $i=6$ とみるのが妥当であると考えられる。

一方、長さ半径比 L/R により初期座屈モードがどのように変化していくのかをみるため、図-5 に最小初期座屈荷重の推移を示す。図より、長さ半径比が大きくなるにつれて Donnell 型、Flugge 型それぞれの解析結果の荷重値の差が大きくなっている。ここで、八巻ら³⁾の解析結果と比較してモード次数 i の値に違いがあるのは

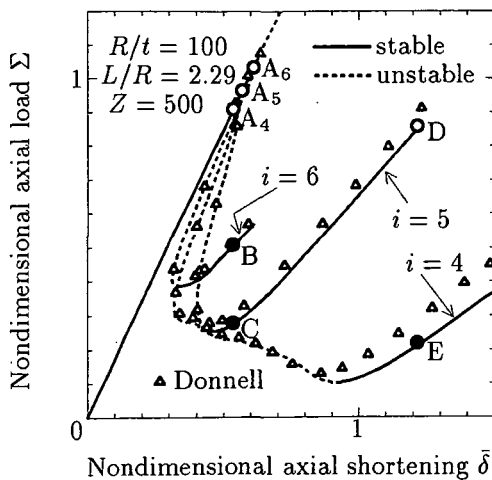


図-7 Flügge 型によるつりあい経路 ($Z=500$: $i=4,5,6$)

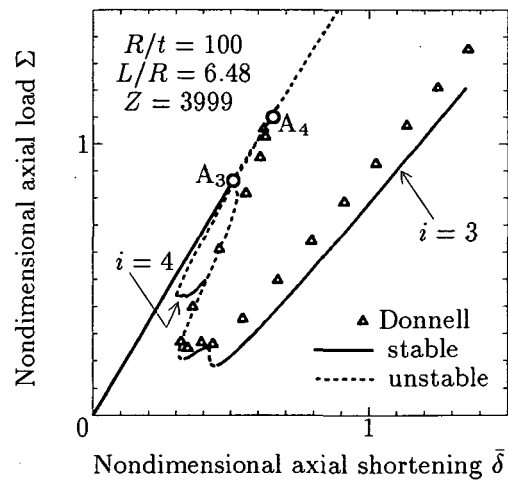


図-9 Flügge 型によるつりあい経路 ($Z=3999$: $i=3,4$)

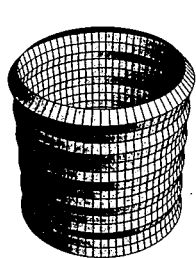


図-8-a A_4 点 ($w \times 50$)

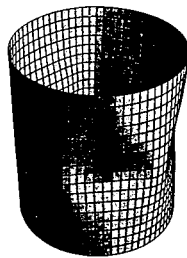


図-8-b C 点

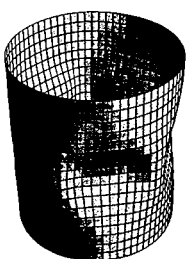


図-8-c D 点

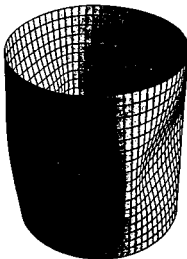


図-8-d E 点

図-8 変形モード ($Z=500$)

拘束条件の違いによるものと考えられるが、長さ半径比が大きくなるにつれて初期座屈モード数が1つずつ減っていくという傾向にある点では一致している。

(2) $Z=500$ の場合の座屈後挙動特性

図-6に Flügge 型による高次モードのつりあい経路 ($i=6,7,8$) を示す。図より初期座屈モード $i=8$ における安定経路は存在せず、このシェル形状における安定経路はモード $i=7$ 以下でしか見つからなかった。このことは Donnell 型による解析においても共通で、つまり座屈後に初期座屈モードより高次のモードに変化することは起こりにくいと考えられる。

また、同じく Flügge 型による低次数のつりあい経路

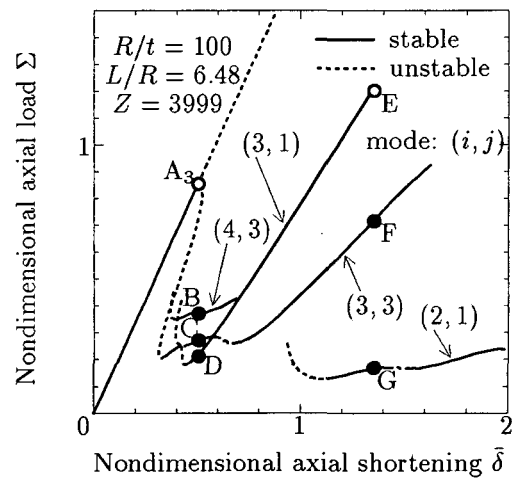


図-10 Flügge 型によるつりあい経路 [$Z=3999$: $(i,j) = (2,1), (3,1), (3,3), (4,3)$]

($i=4,5,6$) を図-7に示す。図中には、Donnell 型によるつりあい経路についてプロットした結果も併記してある。図より Donnell 型、Flügge 型それぞれの解析結果をみると、モード $i=5$ の極大点やモード $i=4$ の安定経路など軸方向変位量 $\deltā$ の大きいところで差が生じている。

この図-7において、軸方向変位 $\deltā$ を単調増加させるよう変位制御すると想定すれば、最小初期座屈点である $A_4 (= A_8)$ までは変位の増加に伴い荷重は線形的に増加する。そしてシェルは座屈して安定性を失い、同じ変位レベルにある安定なつりあい経路 ($i=6$) 上の点 B、あるいは ($i=5$) 上の点 C に飛び移る。ここで点 C での全ポテンシャルエネルギー量は点 B でのそれより小さいので、より安定化するには点 C に飛び移る可能性が高いと考えられる。ただし、この mode jumping が実際に起こるには、モード間を越えるための引き金が必要であ

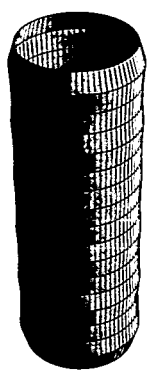


図-11-a A_3 点 ($w \times 50$)

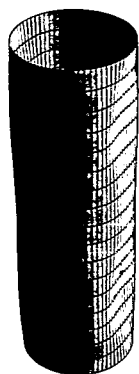


図-11-b B 点

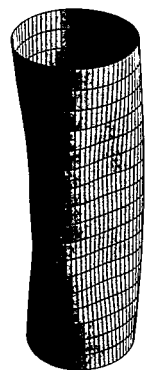


図-11-c C 点

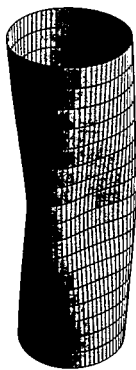


図-11-d D 点

図-11 変形モード A ~ D 点 ($Z=3999$)

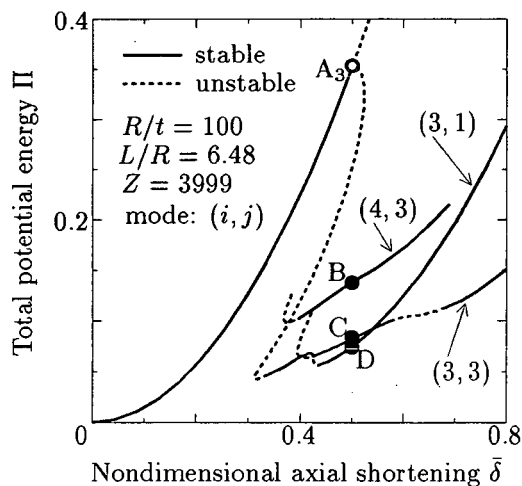


図-12 Flüge 型によるポテンシャルエネルギー Π -軸方向変位 δ 関係 [$Z=3999$: $(i, j)=(3,1), (3,3), (4,3)$]

り、そのような dynamic な解析はここでは実施していない。

δ がさらに増加すると $i = 5$ のつりあい経路をたどり、2次座屈点 D に達する。点 D は変位 δ に関する極

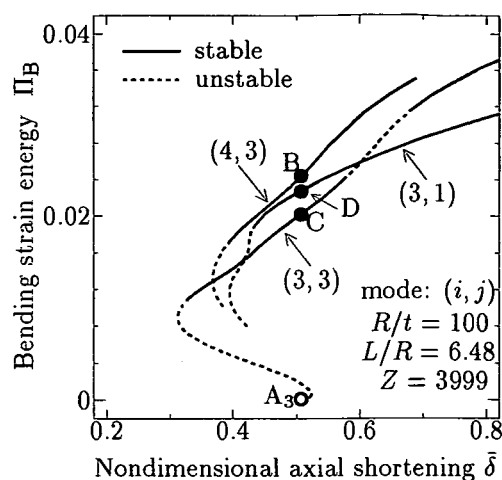


図-13 曲げひずみエネルギーと軸方向変位との関係 [$Z=3999$: $(i, j)=(3,1), (3,3), (4,3)$]

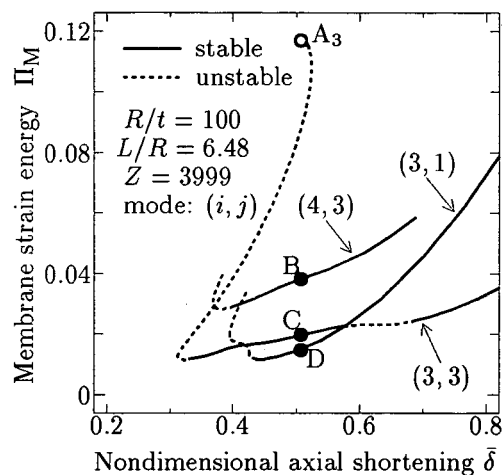


図-14 膜ひずみエネルギーと軸方向変位との関係 [$Z=3999$: $(i, j)=(3,1), (3,3), (4,3)$]

大点であるため、点 D から同じ変位レベルにある安定なつりあい経路 ($i=4$) 上の点 E に飛び移ると予想できる。この時の点 A_4 , C, D, E での変形モードを図-8に示す。これより点 C から点 D に進むにつれて各凹部の変形が大きくなるが、点 D の凸部の1つが消散することでモード $i=5$ から $i=4$ へと変化するモードを示した。もし飛び移りが発生するとすれば、これらのモード間を動的にジャンプすることとなる。

(3) $Z=3999$ の場合の座屈後挙動特性

Flüge 型によるつりあい経路 ($i=3,4$) を図-9に示す。図中には、Donnell 型によるつりあい経路を ($i=3$) の変形モードの経路のみについてプロットした結果も併記してある。これより Donnell 型と Flüge 型とで軸方向変位量 δ の小さい範囲でもつりあい経路にずれが生じていることが分かる。

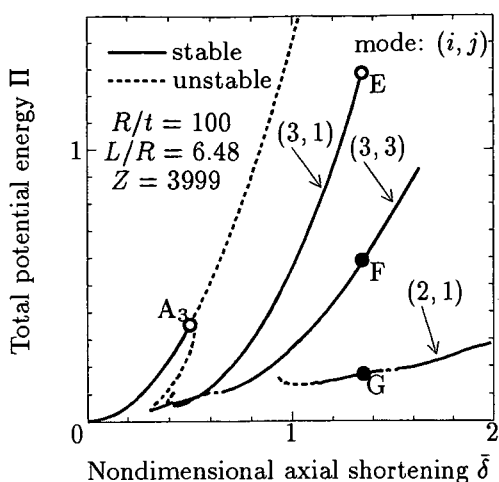


図-15 Flügge 型によるポテンシャルエネルギー Π -軸方向変位 δ 関係 [$Z=3999$: $(i, j)=(2,1), (3,1), (3,3)$]

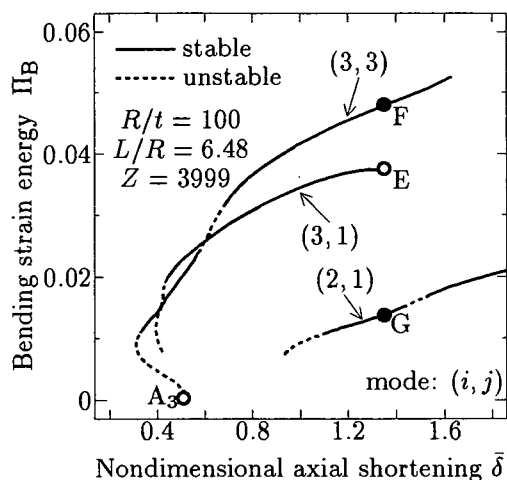


図-17 曲げひずみエネルギーと軸方向変位との関係 [$Z=3999$: $(i, j)=(2,1), (3,1), (3,3)$]

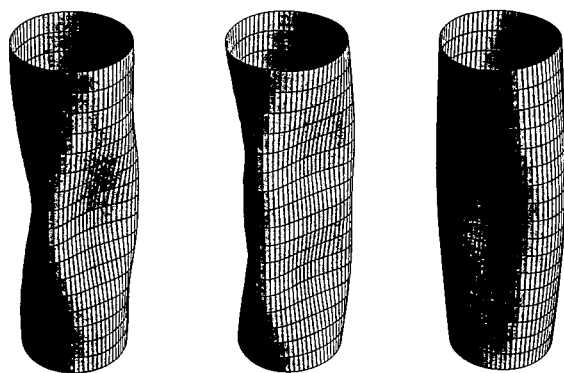


図-16-a E 点 図-16-b F 点 図-16-c G 点

図-16 変形モード E ~ G 点 ($Z=3999$)

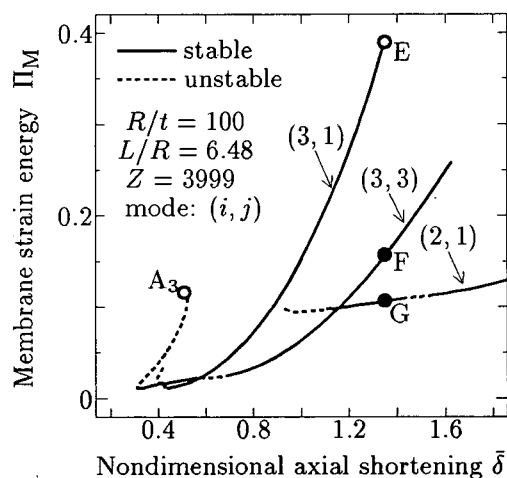


図-18 膜ひずみエネルギーと軸方向変位との関係 [$Z=3999$: $(i, j)=(2,1), (3,1), (3,3)$]

次に飛び移り現象について考えるため、Flügge 型によるより詳しいつりあい経路を図-10 に示す。軸方向変位 δ を制御すると想定すれば、 δ の増加に伴い荷重は初期座屈点 $A_3 (= A_6)$ (図-11-a) に達するまで線形的に増加した後、シェルは座屈して安定性を失い、点 A_3 から同じ変位レベルにある安定なつりあい経路 $(i, j)=(4, 3)$ 上の点 B (図-11-b)、 $(i, j)=(3, 3)$ 上の点 C (図-11-c)、あるいは $(i, j)=(3, 1)$ 上の点 D (図-11-d) のいずれかに飛び移る可能性がある。図-12 に示す全ポテンシャルエネルギー Π と軸方向変位 δ の関係より、全ポテンシャルエネルギーは点 D において一番低く、エネルギーが小さい点に飛び移るとすれば、点 D に飛び移る可能性が最も高いと考えられ、mode jumping の蓋然性については別の考察が必要である。

ここでさらにエネルギー的な考察を行うため、図-13 に曲げひずみエネルギー Π_B と軸方向変位の関係を、図-14 に膜ひずみエネルギー Π_M と軸方向変位の関係を

それぞれ示す。図より初期座屈点 A_3 に達するまでは曲げひずみエネルギーはほとんどゼロであり、膜ひずみエネルギー、すなわち面内剛性のみにより荷重に抵抗している。しかし座屈後は膜ひずみエネルギーが急激に低下し、逆に曲げひずみエネルギーがある程度増加することにより、面内剛性と曲げ剛性の両者が有効となる。さらに軸方向変位が増加する時のモード $(i, j)=(3, 1)$ とモード $(i, j)=(3, 3)$ とで比較すると、モード $(i, j)=(3, 3)$ の方が曲げひずみエネルギーの増加が著しく、逆に膜ひずみエネルギーの増加は緩やかである。このことから、軸方向半波数 j の違いにより座屈後の各剛性の増加のしかたが異なることがわかる。

図-12 をより大きい δ の範囲まで示した図-15 において、初期座屈後、点 D ($(i, j)=(3, 1)$) に飛び移ったとすると、次に安定経路上の極大点 E (図-16-a) に達す

る。この後、前述のようにシェルは再び座屈して安定性を失い、安定経路 $(i, j)=(3, 3)$ 上の点 F (図-16-b)、あるいは $(i, j)=(2, 1)$ 上の点 G (図-16-c) へと移行するが、図-15 からは、エネルギー量は点 G の方が低く、よって点 G に飛び移る可能性が高いと考えられる。また、図-13, 14 の描画範囲を拡大した図-17, 18 では、極大点 E に近づくとつれて曲げひずみエネルギーがある値に収束しているのがみられる。これより、曲げひずみエネルギーが上限に達した時、2 次座屈現象が生じると言い換えることもできる。

以上のように $Z=3999$ の場合では、 $Z=500$ の場合とは違って、偏平では見られなかった軸方向半波数の多い変形モードの経路が見られる。これについては、シェル形状が非偏平になるほど円筒シェルの側面の軸方向の長さと同方向の長さの比は大きくなるので、1 つの凹部の軸方向の長さと同方向の長さの比がある程度一定であるとすれば、周方向の凹部の数は減少し、逆に軸方向の凹部の数は増加すると考えられる。つまり、この $Z=3999$ の場合よりもさらに非偏平なシェルの場合には、より軸方向半波数の多い変形モードの経路が存在すると予測することができる。

4. まとめと結論

一様軸圧縮力を受ける薄肉円筒シェルの座屈後挙動解析を行い、ポテンシャルエネルギーの観点から飛び移り現象を考察することで、以下の結論を得た。

- (1) シェルが非偏平になった場合の Donnell 型、Flügge 型それぞれによる解析結果の差異を、軸方向圧縮力-軸方向変位関係および初期座屈荷重-周方向波数関係より数値的に示した。
- (2) 初期座屈点は一般に多重分岐点であるが、本解析のように周方向へ位相を考慮しない波形を仮定すると、周方向波数によって異なる初期座屈荷重が得られる。この解析により、初期座屈荷重が最小

となる周方向波数を調べることによって真の初期座屈モードを推定し、長さ半径比 L/R が大きくなるにつれて初期座屈モードにおける周方向波数が減っていくことを数値的にも確認した。

- (3) 非偏平なシェルにおいては、偏平では見られなかった軸方向半波数の多い変形モードの安定経路が存在することがわかった。そして、ポテンシャルエネルギーの観点からは軸方向半波数 $j=1$ のモードに飛び移る可能性が高いことを推測した。ただし、実際に mode jumping が生じるか否かについては別の議論が必要である。

最後にシェル形状がより非偏平になった場合や、座屈後の変形モードについて非対称モードを考慮した場合、どのようなになるのかは今後の課題となる。

参考文献

- 1) Donnell, L.H. and Wan C.C.: Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns, *J. of Applied Mech.*, ASME, Vol.17, pp.73-83, 1950.
- 2) Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszyinderschale, *Ingenieur Arch.*, Vol.3, pp.463-506, 1932.
- 3) Yamaki, N.: ELASTIC STABILITY OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS, Elsevier, Amsterdam, 1984.
- 4) Yamada, S. and Croll, J.G.A.: Buckling and post-buckling characteristics of pressure-loaded cylinders, *J. of Applied Mech.*, ASME, Vol.60, pp.290-299, 1993.
- 5) Koiter, W.T.: On the stability of elastic equilibrium, *Ph.D. Dissertation*, Delft, Holland, 1945. (English translation: NASA Tech. Trans. F10: 833, 1967).
- 6) Batdorf, S.B.: A Simplified Method of Elastic Stability Analysis for Thin Cylindrical Shells, NACA Rep.879, 1947.
- 7) 横山 薫、中沢 正利、岩熊 哲夫: 薄肉円筒シェルの座屈後挙動特性、土木学会第 52 回年次学術講演会講演概要集、I-A92, pp.184-185, 1997.9.

(1998 年 4 月 24 日 受付)