

J 積分の一般化とその応用

Generalization of J-integral and its Applications

大塚厚二*

Kohji OHTSUKA

*非会員 理博 広島電機大学助教授 工学部情報工学科 (〒 739-0321 広島市安芸区中野 6 丁目 1 番地)

The driving force of fracture phenomena is the released energy by crack extension, which is expressed with J -integral in two-dimensional special case. In this paper, a generalization $J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ of J -integral is proposed, which has two parameters ω and $\mathbf{X}$, in 2-D and 3-D general cases. Here $\mathbf{u}$ stands for the displacement vector. The symbol $\mathbf{X}$ express the vector field derived from the crack extension, and ω the domain where we get the information. The generalized J -integral $J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ is the sum of the integral $P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ over the line/surface $\partial\omega$ and the integral $R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ over the domain ω . The formula $J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ is derived in 1981 from the mathematical research of 3-D quasi-static fracture problems by the author. The integral $R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ is well defined for the weak solution of the variational problems from elasticity, by which we can express the energy release rate and applicable for finite element method.

Key Words : Fracture Mechanics, J -integral, 3-dimensional problem, Conservation law

1. はじめに

破壊問題における亀裂進展の駆動力は、亀裂進展により解放されたエネルギーである。亀裂進展面積(長さ)と解放エネルギーの比率であるエネルギー解放率を表現する多くの式が提案され、研究されてきた。そのひとつである J 積分によるエネルギー解放率の表現^{1),2)}は、線形弾性だけでなく非線形弾性や一部の塑性でも利用できるものとして有名である。本来、 J 積分は 2 次元問題に適用できる計算法として開発されてきた。そのため、 J 積分の径路独立性にばかり注目されてきた傾向がある。筆者は 1980 年ごろ、3 次元問題におけるエネルギー解放率の表現式を数学の問題として研究した^{3),4)}。そのとき導出したのが、本論文で使われる一般化された J 積分 $J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X}) = P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X}) + R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ である。ここで、 $\mathbf{u}$ は変位ベクトル、 ω は亀裂など欠陥の動きを調べたい部分(領域)を表し、 $\mathbf{X}$ は動きを表すベクトル場である。また、 $P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ は領域の縁 $\partial\omega$ での積分で従来の J 積分に相当する。そして、 $R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ は領域 ω 内部での積分である。エネルギー解放率と領域積分とを結びつけたのは、同時期に独立に Ohtsuka⁴⁾、de Lorenzi⁵⁾、Destuyder and Djaoua⁶⁾ が行ったとされる⁷⁾。他にも、 T^* 積分⁸⁾など J 積分の一般化が多数提案されている。論文⁴⁾では、3 次元問題を扱うと共に、破壊問題において統一的な視点を与えた点が他と大きく異なる。

本論文では、破壊現象を工学的問題でなく、数理問題として扱う。そのため破壊の評価には、エネルギー最小原理に基づくエネルギー解放率のみを採用し、工学的

仮説を用いない一般的な枠組で考える。説明の関係で、微小変形での線形弾性の範囲で述べるが、本論文の結果の多くは非線形弾性やコッセラ弾性体などでも数学的に成り立つことが証明できる⁹⁾。基本的枠組みや証明は筆者の論文⁴⁾に書かれているが、3 次元問題だけを扱い、亀裂を縁付 2 次元多様体として扱うなどあまりに数学的すぎた。そこで本論文では、曲線亀裂について亀裂進展速度ベクトル場の考えを導入し、2 次元問題での J 積分の一般化に関する説明を試みた。最近筆者が興味を持っている経路積分を使わない $R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ のみによるエネルギー解放率の表現や、数値計算法についても述べた。曲線亀裂進展について、一般には亀裂進展速度ベクトル場は複雑になるが、亀裂進展方向は亀裂先端での接線方向にのみに依存することを本論文で証明する。そのため、亀裂進展速度ベクトル場を簡略化することが可能となる。また講演等での発表のみになっている、屈折亀裂についても述べた。一般化された J 積分を用いると、2 次元の結果は 3 次元に自然に拡張できる。3 次元での結果は主として論文⁴⁾によるが、本論文の 2 次元の結果により一段と深みが出たと考えている。本論文の個々の内容が工学的に新しい結果でないとしても、過去の成果に対し統一的視点を与え、証明を付けることで破壊力学の理論研究における基盤が強固となり、今後の研究の見通しがよくなることを期待している。

2. 2次元問題での一般化

2.1 変分法による変位ベクトルの構成

まず、関数解析を用いて変位ベクトル $\mathbf{u}$ を求める。すなわち、エネルギー最小原理と同等な議論を関数解析で行う。通常の破壊力学の議論と異なり、変位ベクトルに関する滑らかさの仮定や、亀裂先端での変位ベクトルの挙動は必要としない。簡単のため、微小変形での線形弾性の枠組

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} &= (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2\end{aligned}$$

についてだけ述べる。ここで、 $C_{ijkl} = C_{ijkl}(x)$ は Hooke のテンソルで、 $\partial_j = \partial/\partial x_j$ 、そして $W(x, \varepsilon) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2$ となる。さらに、ある正定数 $\alpha_0 > 0$ が存在し、

$$C_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha_0\xi_{ij}\xi_{ij} \quad (1)$$

が任意の実数 $\xi_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2$ に対して成立すると仮定する。板の静止形状 Ω_Σ は、曲線 Γ で囲まれた領域

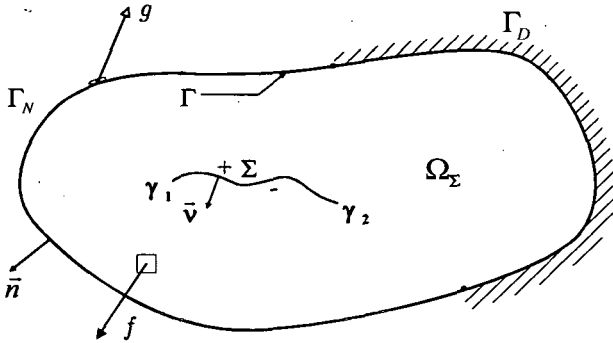


図-1 領域 Ω_Σ で定義された亀裂をもつ弾性場

Ω から、亀裂の静止形状 Σ を除いた集合 $\Omega_\Sigma = \Omega \setminus \Sigma$ で表されたとする。変位ベクトル $\mathbf{u}$ は、 Ω_Σ で定義され、 Σ において不連続性が許されたとする。領域 Ω に内部力 $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ が作用し、縁 Γ の一部 Γ_D で固定され、 $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$ で力 $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_N)^2$ が与えられているとする (図-1 参照)。ここで、関数 v が $L^2(\Omega)$ に属するとは、

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx < \infty$$

を満たすルベーグ可積分関数であることを意味する。そして、 $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ とは、 $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ で $f_i \in L^2(\Omega), i = 1, 2$ 、を示している。同様に、 $L^2(\Gamma_N)$ とは Γ の線素 dl に関する Γ_N で定義された 2 乗可積分関数の関数空間である。

変位ベクトル $\mathbf{u}$ を、Schwartz 超関数の意味での Ω_Σ での偏微分 $\partial_j u, j = 1, 2$ 、が 2 乗可積分である関数空間 $H^1(\Omega_\Sigma)^2$ で求める。関数空間 $H^1(\Omega_\Sigma)$ の関数 v に

は、(長さに相当する) ノルム $\|v\|_{1, \Omega_\Sigma}$ が

$$\|v\|_{1, \Omega_\Sigma} = \left\{ \int_{\Omega_\Sigma} |v(x)|^2 + |\partial_1 v(x)|^2 + |\partial_2 v(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

で定義される。すなわち、変位ベクトル $\mathbf{u}$ は

$$\|\mathbf{u}\|_{1, \Omega_\Sigma} = \{\|u_1\|_{1, \Omega_\Sigma}^2 + \|u_2\|_{1, \Omega_\Sigma}^2\}^{1/2}$$

が有限で Γ_D で変形しない関数の空間

$$V(\Omega_\Sigma) = \{v \in H^1(\Omega_\Sigma)^2; v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$$

で、ポテンシャルエネルギー汎関数

$$\mathcal{E}(v; \mathcal{L}, \Omega_\Sigma) = \int_{\Omega_\Sigma} \{W(x, \varepsilon) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\} dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dl$$

を最小にするベクトル値関数

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}; \mathcal{L}, \Omega_\Sigma) = \min_{\mathbf{v} \in V(\Omega_\Sigma)} \mathcal{E}(\mathbf{v}; \mathcal{L}, \Omega_\Sigma)$$

として求められる。ここで、 $\mathcal{L}$ は $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ を表している。仮定 (1) の下で、次の数学的結果が得られる¹⁰⁾。

解の存在 板の縁の一部 Γ_D を固定しているので、変位ベクトル $\mathbf{u}$ は一意に存在する。

解の滑らかさ 亀裂先端近傍を除く内部で、変位ベクトル $\mathbf{u}$ は 2 階微分が 2 乗可積分である。

解の特異性 等方弾性では、亀裂先端近傍で $\sqrt{r}$ の特異性をもつ。ここで、 r は亀裂先端からの距離。そのため、亀裂先端近傍では 2 階微分は 2 乗可積分ではない¹¹⁾。

本論文ではこのように、ポテンシャルエネルギーが定義できる限界となる関数空間において変位ベクトルを求める。ただし、転位ではエネルギーが発散する可能性があるため、本論文の結果を直接的に使用できない。

2.2 滑らかな亀裂進展

亀裂 Σ は、図-2 のように縁をもつ滑らかな曲線

$$\Sigma = \{(x_1, x_2); x_1 = \psi_1(s), x_2 = \psi_2(s), s_1 \leq s \leq s_2\}$$

とする。亀裂の縁 $\gamma_1 = (\psi_1(s_1), \psi_2(s_1)), \gamma_2 = (\psi_1(s_2), \psi_2(s_2))$ は滑らかに進展すると仮定する。時間を表すパラメータとして τ を用い、亀裂先端の移動 $\gamma_i(\tau) = \gamma + \phi(\tau, \gamma_i)$ は図-2 のように滑らかな曲線を描き、 τ に関して微分できると仮定する。

仮想進展亀裂

$$\Sigma(\tau) = \Sigma \cup \delta\Sigma(\tau, \gamma_1) \cup \delta\Sigma(\tau, \gamma_2) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\delta\Sigma(\tau, \gamma_k) &= \{(x_1, x_2); x_i = \phi_i(s, \gamma_k), i = 1, 2, 0 \leq s \leq \tau\} \\ k &= 1, 2\end{aligned}$$

を考える。とりあえず $\Sigma(\tau)$ は滑らかな曲線で、関数 $s \mapsto \phi_i(s, \gamma_k), i = 1, 2, k = 1, 2$ は滑らかとする。点 $\gamma_k, k = 1, 2$ における亀裂速度ベクトル

$$\mathbf{v}_{\gamma_k} = \left(\left. \frac{d\phi_1(\tau, \gamma_k)}{d\tau} \right|_{\tau=0}, \left. \frac{d\phi_2(\tau, \gamma_k)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \right) \quad (3)$$

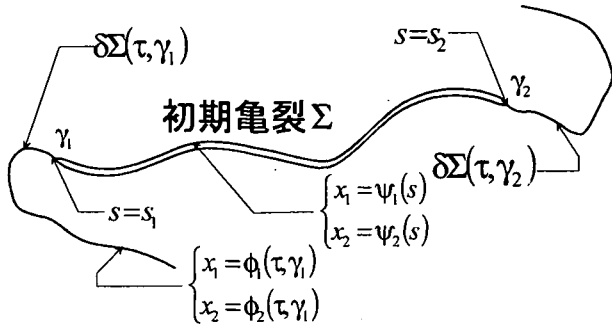


図-2 滑らかな亀裂進展 $\Sigma(\tau)$

を図-3 のように γ_k を含む適当な領域 $\omega(\gamma_k)$ において $\Sigma(\tau, \gamma_k)$ に沿った曲線座標系で平行移動して得られたベクトル場を $X_{\Sigma(\tau, \gamma_k)}$ で表すことにする。以後ベクトル場 $X_{\Sigma(\tau, \gamma_k)}$ を γ_k における亀裂進展速度ベクトル場と呼ぶ。進展亀裂 $\Sigma(\tau)$ は無限に伸びた滑らかな曲線

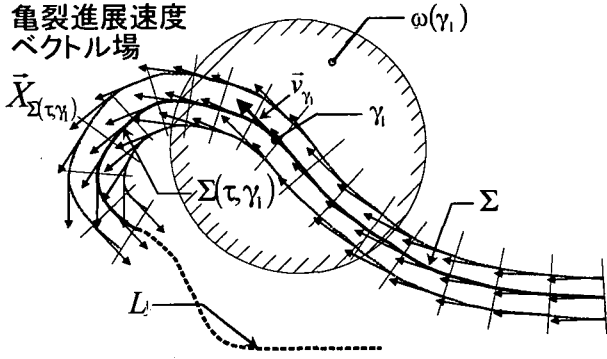


図-3 領域 $\omega(\gamma_1)$ と亀裂進展速度ベクトル場 $X_{\Sigma(\tau, \gamma_1)}$

L 上にあるとする。 L からの距離が δ 以下の帯状領域を $U(L, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^2; \inf_{y \in L} |x - y| < \delta\}$ とする。任意の $x \in U(L, \delta)$ に対して、 L への垂線の交点がただ一点 $P(x) \in L$ となるように $\delta > 0$ を取ることが出来る。このとき $U(L, \delta)$ に L への垂線と L への平行な曲線の群によって曲線座標系を定義できる。亀裂先端 γ_1 の速度ベクトル v_{γ_1} を、 L 上の任意の点 λ に対して、接するベクトルで $U(L, \delta)$ の曲座標系で同じ方向で同じ長さ $|v_{\gamma_1}|$ をもつものは唯一つ決まり、これを α_λ とする。このように、 v_{γ_1} を平行移動して、 L 全体にベクトルを定義できる。次に L に平行な曲線に同様な接ベクトルを決めることが出来き、 $U(L, \delta)$ 全体に v_{γ_1} を平行移動してベクトル場 $X_{\Sigma(\tau, \gamma_1)}$ を定義でき、これを「 v_{γ_1} を $\Sigma(\tau, \gamma_1)$ に沿った曲座標系で平行移動して得られたベクトル場」と呼んだ。

仮想亀裂進展 $\Sigma(\tau)$ において、負荷 $\mathcal{L} = (f, g)$ は一定で、弾性場は慣性項は無視できる準静的なものであるとする。変位ベクトル $u(\tau)$ は領域 $\Omega_{\Sigma(\tau)} = \Omega \setminus \Sigma(\tau)$

における偏微分境界値問題

$$\begin{cases} -\partial_j \sigma_{ij}(u(\tau)) = f_i & \text{on } \Omega_{\Sigma(\tau)} \\ \sigma_{ij}(u(\tau)) n_j = g_i & \text{on } \Gamma_N \\ u(\tau) = 0 & \text{on } \Gamma_D \\ \sigma_{ij}(u(\tau))^+ \nu_j = \sigma_{ij}(u(\tau))^- \nu_j = 0 & \text{on } \Sigma(\tau) \\ u(\tau)^+ = u(\tau)^- & \text{on } \partial \Sigma(\tau) \end{cases} \quad (4)$$

の解となる。ここで、 $n = (n_1, n_2)$ は Γ 上の外向き単位法線ベクトル、 $\varphi^\pm$ は関数 φ の亀裂面 $\Sigma(\tau)$ における表または裏の値を表し、 $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ は $\Sigma(\tau)$ における表から裏に向きづけられた単位法線ベクトルである(図-1 参照)。変位ベクトル $u(\tau)$ は、関数空間

$$V(\Omega_{\Sigma(\tau)}) = \{v \in H^1(\Omega_{\Sigma(\tau)})^2; v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$$

におけるポテンシャルエネルギー汎関数

$$\mathcal{E}(v; \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma(\tau)}) = \int_{\Omega_{\Sigma(\tau)}} \{W(x, \varepsilon) - f \cdot v\} dx - \int_{\Gamma_N} g \cdot v dl$$

を最小にするベクトル値関数

$$\mathcal{E}(u(\tau); \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma}) = \min_{v \in V(\Omega_{\Sigma(\tau)})} \mathcal{E}(v; \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma})$$

として求められる。変位ベクトル $u(\tau)$ はすべての $v \in V(\Omega_{\Sigma(\tau)})$ に対して、等式

$$\int_{\Omega_{\Sigma(\tau)}} \sigma_{ij}(u(\tau)) \varepsilon_{ij}(v) dx = \int_{\Omega_{\Sigma(\tau)}} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v dl \quad (5)$$

を満たし、評価式

$$\begin{aligned} \|u(\tau)\|_{1, \Omega_{\Sigma(\tau)}} &\leq C \|\mathcal{L}\|, \\ \|\mathcal{L}\| &= \{\|f\|_{0, \Omega}^2 + \|g\|_{0, \Gamma_N}^2\}^{1/2} \end{aligned} \quad (6)$$

が成り立つ。ただし C は、 $\mathcal{L} = (f, g)$ に無関係な正定数である。

この工学的環境の下での仮想亀裂進展 $\Sigma(\tau)$ に対し、エネルギー差は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u; \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma}) - \mathcal{E}(u(\tau); \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma(\tau)}) \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\Sigma(\tau)}} \sigma_{ij}(u - u(\tau)) \varepsilon_{ij}(u - u(\tau)) dx \end{aligned} \quad (7)$$

と表される。この式の左辺を亀裂進展長さ $|\Sigma(\tau) \setminus \Sigma| = |\delta \Sigma(\tau, \gamma_1)| + |\delta \Sigma(\tau, \gamma_2)|$ で割り $\tau \rightarrow 0$ としたもの

$$G(\mathcal{L}, \Sigma(\cdot)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(u; \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma}) - \mathcal{E}(u(\tau); \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma(\tau)})}{|\Sigma(\tau) \setminus \Sigma|}$$

をエネルギー解放率という。ここで、 $|\Sigma(\tau) \setminus \Sigma|$ は亀裂進展の長さを表し、 $\Sigma(\cdot)$ は亀裂進展 $s \mapsto \Sigma(s)$, $0 \leq s \leq \tau$ を表す。

2.3 J積分の一般化

亀裂 Σ は x_1 -軸上にあり、亀裂先端の1つ γ が原点と一致すると仮定する。次に、 x_1 -軸の正方向へ $\tau > 0$ だけ進展した亀裂 $\Sigma(\tau)$ を考える。このとき、亀裂進展速度ベクトル場は

$$\mathbf{X}_{\Sigma(\tau, \gamma)} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$$

となる。原点を囲む領域 ω において、板が等質で、内部力が零ならばエネルギー解放率 $\mathcal{G}(\mathcal{L}, \Sigma(\cdot))$ は図-4 のように領域 ω の境界 $\partial\omega$ 上の積分

$$J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) = \int_{\partial\omega} \{W(\varepsilon)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) - \sigma_{ij} n_j (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla) u_i\} dl \quad (8)$$

で表される。径路 $\partial\omega$ 上の積分 $J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)$ はJ積分と呼ばれ、径路 $\partial\omega$ に独立であることが知られている。ここで、 $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ は $\partial\omega$ 上の単位外法線ベクトル、 $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ 、そして dl は $\partial\omega$ での線素である。

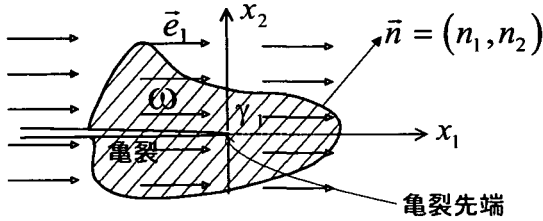


図-4 直進する直線亀裂での進展ベクトル場と領域 ω

そこで、J積分を亀裂進展速度ベクトル場をパラメータとして持つエネルギー解放率の表現式としてとらえ、一般の亀裂進展 (2) における表現式を導く。

亀裂先端 γ_1 のみの進展を考え、 $(X_1, X_2) = \mathbf{X} = \mathbf{X}_{\Sigma(\tau, \gamma_1)}$ 、 $\omega = \omega(\gamma_1)$ とする。径路積分 $P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ を、式 (8) のベクトル $\mathbf{e}_1$ に $\mathbf{X}$ を代入したものとする。もし亀裂先端近傍で $\mathbf{u}$ が滑らかなら、

$$\begin{aligned} & \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \mathbf{X} \cdot \nabla W(x, \varepsilon) dx \\ &= - \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} W(x, \varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{X} dx \\ & \quad + \int_{\omega \cap \Sigma} [W(x, \varepsilon)] (\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\nu}) dl \\ & \quad + \int_{\partial(\omega \cap \Omega)} W(x, \varepsilon) (\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\nu}) dl, \quad (9) \\ & \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \mathbf{X} \cdot \nabla W(x, \varepsilon) dx \\ &= \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \mathbf{X} \cdot \nabla_x W(x, \varepsilon) dx \\ & \quad + \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \partial_j (X_k \partial_k u_i) - \sigma_{ij}(\mathbf{u}) (\partial_j X_k) \partial_k u_i dx \\ &= \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \mathbf{X} \cdot \nabla_x W(x, \varepsilon) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{\partial(\omega \cap \Sigma)} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j (\mathbf{X} \cdot \nabla u_i) dl \\ & + \int_{\omega \cap \Sigma} \sigma_{ij}(\mathbf{u})^+ \nu_j \mathbf{X} \cdot (\nabla u_i)^+ dl \\ & - \int_{\omega \cap \Sigma} \sigma_{ij}(\mathbf{u})^- \nu_j \mathbf{X} \cdot (\nabla u_i)^- dl \\ & - \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}) (\mathbf{X} \cdot \nabla u_i) + \sigma_{ij}(\mathbf{u}) (\partial_j X_k) \partial_k u_i dx, \quad (10) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $[\![\varphi]\!]$ は関数 φ の亀裂の上/下面での値 $\varphi^\pm$ の差 $\varphi^+ - \varphi^-$ で、 $\partial_j = \partial/\partial x_j$ である。ベクトル場 $\mathbf{X}$ が亀裂面に接することから $\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ on Σ となり、亀裂面で応力自由から $\sigma_{ij}(\mathbf{u})^\pm \nu_j = 0$ on Σ となる。そして $-\partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = f_i$ から、2式 (9), (10) の差を取ると、

$$\begin{aligned} 0 &= P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X}) - \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \{W(x, \varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{X} + f_i (\mathbf{X} \cdot \nabla u_i)\} dx \\ & \quad - \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \{\mathbf{X} \cdot \nabla_x W(x, \varepsilon) - \sigma_{ij}(\mathbf{u}) (\partial_j X_k) \partial_k u_i\} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、「 ω の内部に亀裂がなければ、どのようなベクトル場 $\mathbf{X}$ でも $J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X}) = 0$ でなくてはならない」と考えられる。一般化されたJ積分 $J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ は次の形になると予想される。

$$J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X}) = P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X}) + R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X}), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X}) &= \int_{\partial\omega} \{W(x, \varepsilon) (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}) - \sigma_{ij} n_j (\mathbf{X} \cdot \nabla) u_i\} dl, \\ R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X}) &= - \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \{(\mathbf{X} \cdot \nabla_x W(x, \varepsilon) + f_i (\mathbf{X} \cdot \nabla) u_i \\ & \quad - \sigma_{ij} \partial_j X_k \partial_k u_i + W(x, \varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{X}\} dx. \end{aligned}$$

ここで、 $R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ が「変位ベクトルの高々1階の偏微分」しか含んでいないことが重要である。なぜなら、変分法で求めた変位ベクトルは、亀裂先端近くでは1階偏微分の2乗可積分しか保証されていない。論文⁴⁾によって、一般の亀裂進展 (2) に対して

$$\mathcal{G}(\mathcal{L}, \Sigma(\cdot)) = \sum_{k=1}^2 J_{\omega(\gamma_k)}(\mathbf{u}, \mathbf{X}_{\Sigma(\tau, \gamma_k)}) |\nu_{\gamma_k}|^{-1} \quad (12)$$

が成り立つ。また、論文¹⁵⁾には、亀裂をもつ等方弾性板におけるK値やJ積分との関係について証明が与えられている。

2.4 ソボレフ・ノルムによる P_ω, R_ω の評価

この変分法で求められた変位ベクトル $\mathbf{u}$ について、領域積分 $R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ は ω に無関係に

$$|R_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})| \leq C \{\|f\|_{0, \Omega_\Sigma}^2 + \|\mathbf{u}\|_{1, \Omega_\Sigma}^2\} \quad (13)$$

の形の評価式が得られることである。ここで、 C は負荷 $\mathcal{L} = (f, g)$ や領域 ω に無関係な正定数である。

残念ながら径路積分 $P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ については、閉曲線 $\partial\omega$ 上の積分となるため、より高い微分の情報が必要となる。2階微分が2乗可積分となる関数の空間 $H^2(\Omega_\Sigma)$ と $H^1(\Omega_\Sigma)$ の間を補完することで、 α 階微分可能 ($1 \leq \alpha \leq 2$) な関数の空間 $H^\alpha(\Omega_\Sigma)$ を作ることが出来る。径路積分 $P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ については、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$|P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})| \leq C(\partial\omega) \|\mathbf{u}\|_{(3/2)+\epsilon, U(\partial\omega)}^2 \quad (14)$$

が最良の評価式である¹²⁾。ここで、 $U(\partial\omega)$ は閉曲線 $\partial\omega$ を含み、亀裂先端を含まない環状領域で、 $\|\cdot\|_{(3/2)+\epsilon, U(\partial\omega)}$ は $U(\partial\omega)$ 上のソボレフ空間 $H^{(3/2)+\epsilon}(U(\partial\omega))$ のノルム(長さ)である。この評価式が最良であることは、ソボレフ空間のトレース定理を使って証明される。ところが、亀裂先端での特異性を表す関数 $r^{1/2}\varphi(\theta)$ は

$$r^{1/2}\varphi(\theta) \notin H^{(3/2)+\epsilon}(\Omega_\Sigma), \epsilon > 0 \quad (15)$$

であることが証明できる^{12, Theorem 1.4.5.3}。ここで、 $\varphi(\theta)$ は亀裂先端を中心とする局所極座標 (r, θ) の角度に関する滑らかな関数である。このため、(14) から径路積分 $P_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{X})$ は数学的に不安定である。

2.5 エネルギー解放率の領域積分による表現

関数 η_ω を図-5 のような、

$$\eta_\omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \omega \\ 0 & x \notin \omega \\ 0 \text{ から } 1 \text{ の値} & x \in \omega \setminus \bar{\omega} \end{cases} \quad (16)$$

を満たす区分的に1次な連続関数とする。ここで、 ω_0 は ω を真に含む ($\omega_0 \supset \bar{\omega}$) 適当な領域とする。区分的に1次なので、1階の微分は不連続となるが、本質的に微分は有界である。厳密な言い方では、ルベグ測度が零な集合を除いて1階微分が有界である。亀裂先端

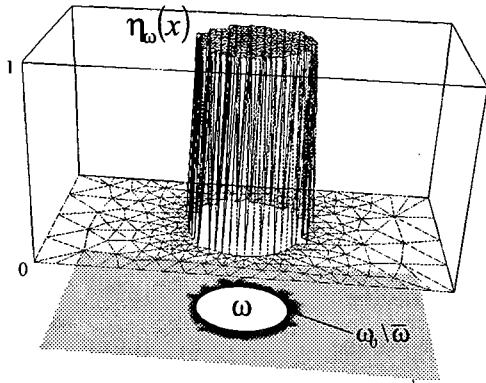


図-5 領域 ω と関数 $\eta_\omega(x)$ の概形

γ_k を囲む領域 $\omega(\gamma_k)$, $\omega_0(\gamma_k)$ ($\supset \bar{\omega}(\gamma_k)$) を考えると、

$$\mathcal{G}(\mathcal{L}, \Sigma(\cdot)) = \sum_{k=1}^2 R_{\Omega_\Sigma}(\mathbf{u}, \eta_{\omega(\gamma_k)} \mathbf{X}_{\Sigma(\tau, \gamma_k)}) |\mathbf{v}_{\gamma_k}|^{-1} \quad (17)$$

が証明できる¹³⁾。式 (17) の右辺の積分領域は、板全体になっていることを注意されたい。さらに評価式

$$\begin{aligned} & |R_{\Omega_\Sigma}(\mathbf{u}, \eta_{\omega(\gamma_k)} \mathbf{X}_{\Sigma(\tau, \gamma_k)})| \\ & \leq C_0 \{ \|\nabla \mathbf{X}_{\Sigma(\tau, \gamma_k)}\|_{L^\infty(\omega_0(\gamma_k))} \\ & \quad + \|\nabla \eta_{\omega(\gamma_k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|\mathbf{X}_{\Sigma(\tau, \gamma_k)}\|_{L^\infty(\omega_0(\gamma_k))} \} \\ & \quad \times \left\{ \|f\|_{0, \omega_0(\gamma_k)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{1, \omega_0(\gamma_k) \cap \Omega_\Sigma}^2 \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

を得る。ここで関数 $\varphi(x)$ に対する記号 $\|\varphi\|_{L^\infty(D)}$ は、ルベグ積分の意味で測度零を無視した絶対値の上限

$$\|\varphi\|_{L^\infty(D)} = \text{ess sup}_{x \in D} |\varphi(x)|$$

を表す。

2.6 エネルギー解放率と亀裂進展

ここでは、異なる亀裂進展 $s \mapsto \Sigma_\alpha(s)$, $0 \leq s \leq \tau$ と $s \mapsto \Sigma_\beta(s)$, $0 \leq s \leq \tau$ を考える。この2つの亀裂進展での亀裂先端 γ_k , $k=1, 2$ における亀裂進展速度ベクトル ((3) を参照) をそれぞれ $\mathbf{v}_{\alpha, \gamma_k}$, $\mathbf{v}_{\beta, \gamma_k}$ としたとき、 $\mathbf{v}_{\alpha, \gamma_k} = \mathbf{v}_{\beta, \gamma_k}$ ならば、

$$\mathcal{G}(\mathcal{L}, \Sigma_\alpha(\cdot)) = \mathcal{G}(\mathcal{L}, \Sigma_\beta(\cdot)) \quad (19)$$

となることを示す。

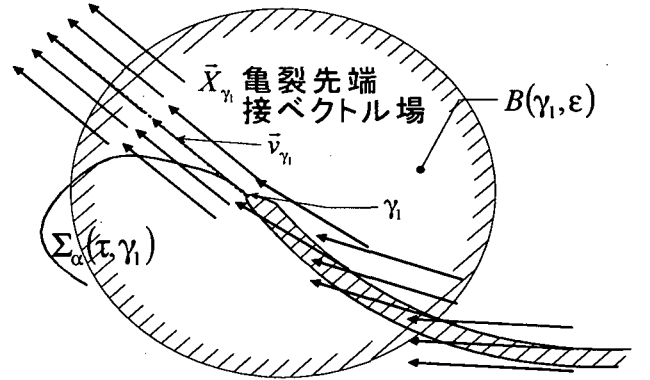


図-6 亀裂先端進展速度ベクトルの接線方向への拡大と $\Sigma_\alpha(\tau, \gamma_1)$

ベクトル $\mathbf{v}_{\alpha, \gamma_k}$ を図-6 のように亀裂 Σ と γ_k の接線に沿った曲線座標系において平行移動して作ったベクトル場を $\mathbf{X}_{\gamma_k}$ とする。亀裂先端 γ_k を中心とし、半径 ϵ の円盤を $B(\gamma_k, \epsilon)$ で表す。このとき、亀裂進展 $\Sigma_\alpha(\tau)$ に沿った曲線座標系における平行移動によるベクトル場を $\mathbf{X}_{\Sigma_\alpha(\tau, \gamma_k)}$ としたとき、

$$\|\mathbf{X}_{\gamma_k} - \mathbf{X}_{\Sigma_\alpha(\tau, \gamma_k)}\|_{L^\infty(B(\gamma_k, 2\epsilon))} \leq M_1 \epsilon, \quad (20)$$

$$\|\nabla \mathbf{X}_{\gamma_k} - \nabla \mathbf{X}_{\Sigma_\alpha(\tau, \gamma_k)}\|_{L^\infty(B(\gamma_k, 2\epsilon))} \leq M_1 \epsilon$$

が成り立つ。ここで M_1 は ϵ に無関係な正定数である。

関数 $\eta_{\epsilon, \gamma_k}$ を $\omega = B(\gamma_k, \epsilon)$ とし、 $\omega_0 = B(\gamma_k, 2\epsilon)$ としたときの (16) をみたと関数とする。このとき

$$\|\eta_{\epsilon, \gamma_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad \|\nabla \eta_{\epsilon, \gamma_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq M_2/\epsilon \quad (21)$$

となる ϵ に無関係な正定数 M_2 が存在する。

関係式

$$R_{\Omega_\Sigma}(u, \eta_{\epsilon, \gamma_k} X_{\Sigma_\alpha(\tau, \gamma_k)}) - R_{\Omega_\Sigma}(u, \eta_{\epsilon, \gamma_k} X_{\gamma_k}) \\ = R_{\Omega_\Sigma}(u, \eta_{\epsilon, \gamma_k} (X_{\Sigma_\alpha(\tau, \gamma_k)} - X_{\gamma_k})) \quad (22)$$

に (18), (20), (21) を適用すると

$$|R_{\Omega_\Sigma}(u, \eta_{\epsilon, \gamma_k} (X_{\Sigma_\alpha(\tau, \gamma_k)} - X_{\gamma_k}))| \\ \leq C_0 \{M_1 \epsilon + M_1 M_2\} \\ \times \left\{ \|f\|_{0, B(\gamma_k, 2\epsilon)}^2 + \|u\|_{1, B(\gamma_k, 2\epsilon) \cap \Omega_\Sigma}^2 \right\} \quad (23)$$

を得る。そして $\epsilon \rightarrow 0$ とすると

$$\|f\|_{0, B(\gamma_k, 2\epsilon)}^2 + \|u\|_{1, B(\gamma_k, 2\epsilon) \cap \Omega_\Sigma}^2 \rightarrow 0$$

となる。ところが、 $R_{\Omega_\Sigma}(u, \eta_{\epsilon, \gamma_k} X_{\Sigma_\alpha(\tau, \gamma_k)})$ と $R_{\Omega_\Sigma}(u, \eta_{\epsilon, \gamma_k} X_{\gamma_k})$ は ϵ に無関係なので、(22) と (23) そして (17) から (19) が導ける。

2.7 滑らかでない亀裂進展

関係式 (19) より、エネルギー解放率は亀裂進展の接線方向だけに依存することが証明された。ここでは、亀裂先端での接線が不連続である場合を考える。亀裂進展の記号は (2) と同じものを使う。亀裂先端 γ_k , $k = 1, 2$ で

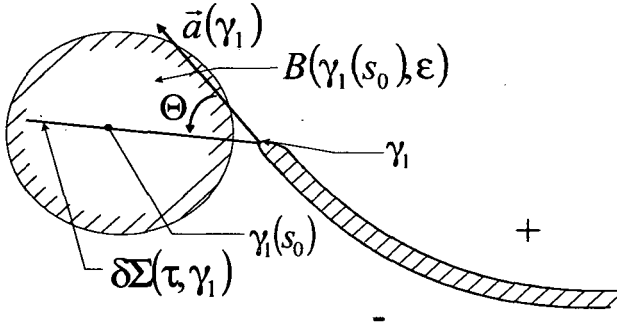


図-7 接線方向に角度 Θ をもつ屈折亀裂

の Σ への単位接ベクトルを $\alpha(\gamma_k)$ とする。図-7 の亀裂先端 γ_1 での屈折亀裂進展を考える。屈折亀裂 $\delta\Sigma(\tau, \gamma_1)$ は、 $\alpha(\gamma_k)$ との成す角度が Θ となる線分としてよい。角度を、亀裂面では零、プラス側では $-\pi$ 、マイナス側では π となるように取る。屈折亀裂でエネルギー解放率が存在することは、エネルギーのパラメータ τ に関する右微分可能性を示す。よって、ある数 $\tau > 0$ に対して、

$$s \mapsto \mathcal{E}(u(s); \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma(s)})$$

は区間 $[0, \tau]$ で連続で、 $\delta\Sigma(\tau, \gamma_1)$ は滑らかなので、開区間 $(0, \tau)$ で微分可能である。任意の $0 < s_0 < \tau$ において (12) から

$$G_\Theta(\mathcal{L}, \Sigma(s_0)(\cdot)) \\ = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\mathcal{E}(u(s_0); \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma(s_0)}) - \mathcal{E}(u(s_0 + \delta); \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma(s_0 + \delta)})}{|\Sigma(s_0 + \delta) \setminus \Sigma(s_0)|}$$

は

$$G_\Theta(\mathcal{L}, \Sigma(s_0)(\cdot)) = J_{B(\gamma_1(s_0), \epsilon)}(u(s_0), X_{\Sigma(\tau, \gamma_1(s_0))}) |v_{\gamma_1(s_0)}|^{-1}$$

と表される。ただし、 $B(\gamma_1(s_0), \epsilon)$ は図-7 のように Σ と交わらないとする。平均値の定理から

$$\mathcal{E}(u; \mathcal{L}, \Omega_\Sigma) - \mathcal{E}(u(\tau); \mathcal{L}, \Omega_{\Sigma(\tau)}) \\ = \tau J_{B(\gamma_1(s_0), \epsilon)}(u(s_0), X_{\Sigma(\tau, \gamma_1(s_0))}) \quad (24)$$

となる $0 < s_0 < \tau$, $\epsilon > 0$ が存在する。ところが、(24) は ϵ には無関係に成り立ち、エネルギー解放率が存在することから、

$$G_\Theta(\mathcal{L}, \Sigma(\cdot)) = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_{B(\gamma_1(s_0), \epsilon)}(u(s_0), X_{\Sigma(\tau, \gamma_1(s_0))}) \quad (25)$$

が成り立つ。残念ながら、式 (25) で $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ とすることは、有限要素法で J 積分の積分経路を非常に小さく取ることになるため実用的ではないと思われる。

平面応力状態である等方弾性の板については、 $K_{i, \Theta}(s_0)$, $i = 1, 2$ を $\gamma_1(s_0)$ における応力拡大係数としたとき、(25) から

$$G_\Theta(\mathcal{L}, \Sigma(\cdot)) = \lim_{s_0 \rightarrow 0} (1/E) \{K_{1, \Theta}(s_0)^2 + K_{2, \Theta}(s_0)^2\} \quad (26)$$

が成り立つ。ここで、 E はヤング率である。

2.8 有限要素解析

T_h を最大メッシュサイズが h で正則な Ω_Σ の三角形分割とする。メッシュ上で 1 次関数から構成される関数空間 $V(\Omega_\Sigma)$ の有限部分空間 V_h を考える。変位ベクトル u に対する 1 次要素近似解 u_h は Céa の補題¹⁴, Theorem 2.4) と区分的 1 次関数による関数近似から

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega_\Sigma} \leq Ch \quad (27)$$

を得る。ここで、 C は h に依存しない正定数。2 点 $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ での特異性により、解が悪くなるため、

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega_\Sigma} \leq Ch^\alpha, \quad \alpha < 3/2 \quad (28)$$

程度の評価以上のものは得られない^{11, 6.3)}。また、高次要素を近似を使っても、(15) から (28) 以上の評価は難しい。

有限要素法を用いた数値計算法を、次のステップで行う。

Step1: 2 点 γ_1, γ_2 の近くで細分された三角形分割 T_h を生成する (8 参照)。

Step2: 三角形分割 T_h における有限要素計算を行い、近似解 u_h を求める。

Step3: 点 γ_i を中心とする半径

$\epsilon_0 > 0$ の円盤を $B(\gamma_i, \epsilon_0)$ とする。領域 $\omega(\gamma_i) = B(\gamma_i, \epsilon_0)$, $\omega_0(\gamma_i) = B(\gamma_i, 2\epsilon_0)$ として関数 $\eta_{\omega(\gamma_i)}$ を作る。

Step4:

$$R_{\Omega_\Sigma}(\mathbf{u}_h, \eta_{\gamma_i}, \mathbf{X}_{\gamma_i}) \quad i = 1, 2 \quad (29)$$

を計算する。 $\eta_{\gamma_i} = \eta_{\omega(\gamma_i)}$.

理論的には、誤差評価 (27) と (18) から

$$|\mathcal{G}(\mathcal{L}, \Sigma_{\gamma_i}(\tau)) - R_{\Omega_\Sigma}(\mathbf{u}_h, \eta_{\gamma_i}, \mathbf{X}_{\gamma_i})| \leq C(\eta_{\gamma_i})h \quad (30)$$

となる。ここで、メッシュサイズ h に依存しない定数 $C(\eta_{\gamma_i})$ は (18) にあるように関数 η_{γ_i} の偏微分に依存する。

数値計算の簡便法として、Step3 を

Step3': 領域 $\omega(\gamma_i) = B(\gamma_i, \epsilon_0)$ で 1, 他で零となる関数 ($\omega(\gamma_i)$ の特性関数) の 1 次近似を $\eta_{\omega(\gamma_i)}$ とする (図-5 参照)

としても計算できる。ただし、(30) にあるように、 $B(\gamma_i, \epsilon_0)$ の 1 次近似関数 η_{γ_i} を用いると、三角形分割を細かくすると $\|\nabla \eta_{\gamma_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ が大きくなるので計算精度は Step3 の方法より悪くなる。

2.9 計算例

この節では厳密解との比較のため、等方弾性を考える。図-8 のような長さ 2 の正方形の中心線上に亀裂があり、原点が亀裂先端となる板を考える。平面ひずみでの厳密解との比較のため

$$u_0 = \frac{K_1}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\cos(\theta/2)(\kappa - 1 + 2\sin^2(\theta/2)))$$

$$v_0 = \frac{K_2}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\sin(\theta/2)(\kappa + 1 - 2\cos^2(\theta/2)))$$

を境界条件とした問題を解く。ここで、 μ はラーメの定数、 $\kappa = 3 - 4\nu$ で ν はポアソン比。正方形領域 Ω の周を Γ とし、亀裂線分を Σ とする。問題

$$\begin{cases} -\partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = 0 & \text{in } \Omega_\Sigma, \\ u_1 = u_0, u_2 = v_0 & \text{on } \Gamma, \\ \sigma_{i2}(\mathbf{u})^+ = \sigma_{i2}(\mathbf{u})^- = 0, i = 1, 2 & \text{on } \Sigma, \end{cases}$$

について考える。解析的には、 $\mathbf{u} = (u_0, v_0)$ となる。

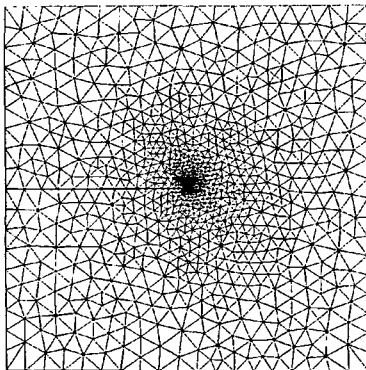


図-8 $R_{\Omega_\Sigma}(\mathbf{u}, \eta_\epsilon \mathbf{e}_1)$ の数値計算に使った三角形分割

弾性係数をヤング率 $E = 21.5$, ポアソン比 $\nu = 0.29$, $\mu = E/(2(1+\nu))$ とした。図-8 のようなメッシュ分割で 1 次要素近似計算を行い、原点を中心とし、半径 ϵ の円盤で 1, 他で零となる関数 (特性関数) χ_ϵ の一次近似 η_ϵ による近似計算 $R_{\Omega_\Sigma}(\mathbf{u}_h, \eta_\epsilon \mathbf{e}_1)$ を行った結果をプロットしたのが図-9 である (Step3' を用いた)。横軸は特性関数の半径 ϵ , 縦軸は $K_1 = 1$ のときの理論値 0.0426 との相対誤差

$$|R_{\Omega_\Sigma}(\mathbf{u}_h, \eta_\epsilon \mathbf{e}_1) - 0.0426| / 0.0426$$

である。グラフ中の「誤差 m 」にある数字 m は、ソボレフ・ノルムの相対誤差

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_\Sigma} (\|\mathbf{u}\|_{1, \Omega_\Sigma})^{-1}$$

を表している。ソボレフ・ノルム誤差 3.6% の場合を除き、ノルム誤差 2.1% 以下ではエネルギー解放率の理論値との誤差が 0.5% 以下である。最も計算精度のよいノルム誤差 0.7% での近似が予想以上に上がらないのは、Step3' を用いたのが理由であろう。領域積分で

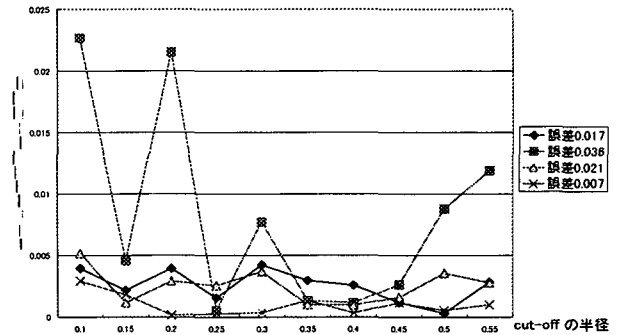


図-9 特性関数の半径とエネルギー解放率の数値計算

は近似解 $\mathbf{u}_h$ の半径 ϵ での平均的量を計算する。そのため、メッシュが粗くても半径 ϵ が大きくなると一般に計算誤差が減少する。解のノルム誤差が 3.6% と大きいときでも、 $0.30 \leq \epsilon \leq 0.45$ での計算誤差が 0.5% 以下となっている。

以上の議論から、面積分 $R_{\Omega_\Sigma}(\mathbf{u}, \eta_{\omega(\gamma_i)} \mathbf{X}_{\gamma_i})$ はエネルギー解放率の良い表現式 (17) を与えることが分かった。

3. 三次元問題への一般化

以下、図-11 のように静止形状が曲面 Γ で囲まれた領域 Ω となう線形弾性体中に亀裂がある場合を考える。亀裂の静止形状は、縁を持つ曲面 Σ で、亀裂の縁は $\partial\Sigma$ で表す。ただし、亀裂は Ω の内部にあるものとする。境界 Γ の一部 Γ_D で固定され、残りの境界 $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$ で表面力 $\mathbf{g}$ が与えられていると仮定する。次に、図-10 のような仮想亀裂進展を考える。

としたとき,

$$\begin{aligned} G(\mathcal{L}, \Sigma(\cdot)) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(u; \mathcal{L}, \Sigma) - \mathcal{E}(u(\tau); \mathcal{L}, \Sigma(\tau))}{|\Sigma(\tau) \setminus \Sigma|} \\ \mathcal{E}(u(\tau); \mathcal{L}, \Sigma(\tau)) &= \int_{\Omega_{\Sigma(\tau)}} \{W(x, \varepsilon) - f \cdot u(\tau)\} dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} g \cdot u(\tau) ds \end{aligned}$$

となる。エネルギー解放率は図-14 のような亀裂の縁 $\partial\Sigma$ を囲む領域 ω における一般 J 積分で

$$G(\mathcal{L}, \Sigma(\cdot)) = J_\omega(u, X_{\Sigma(\tau)}) \left(\int_{\partial\Sigma} \dot{\phi}_\lambda dl \right)^{-1} \quad (34)$$

と表される⁴⁾。ここで、 $|\Sigma(\varepsilon) \setminus \Sigma|$ は $\tau = \sigma$ における進展亀裂面 $\Sigma(\varepsilon) \setminus \Sigma$ の面積で、 ds は Γ 上の面素で、 dl は $\partial\Sigma$ での線素である。歪エネルギー密度関数 $W(x, \varepsilon) = \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)/2$ は、等方や等質でなくてもよく、(1) と同様な仮定を満たせばよい。一般 J 積分は、(11) と同様に 3 次元ベクトル場 X に対して

$$\begin{aligned} J_\omega(u, X) &= P_\omega(u, X) + R_\omega(u, X), \quad (35) \\ P_\omega(u, X) &= \int_{\partial\omega} \{W(x, \varepsilon)(X \cdot n) - \sigma_{ij}n_j(X \cdot \nabla)u_i\} dl, \\ R_\omega(u, X) &= - \int_{\omega \cap \Omega_\Sigma} \{(X \cdot \nabla_x W(x, \varepsilon) + f_i(X \cdot \nabla)u_i \\ &\quad - \sigma_{ij}\partial_j X_k \partial_k u_i + W(x, \varepsilon)\text{div} X\} dx. \end{aligned}$$

となる。ここで $X_k, k = 1, 2, 3$ は X の成分である。

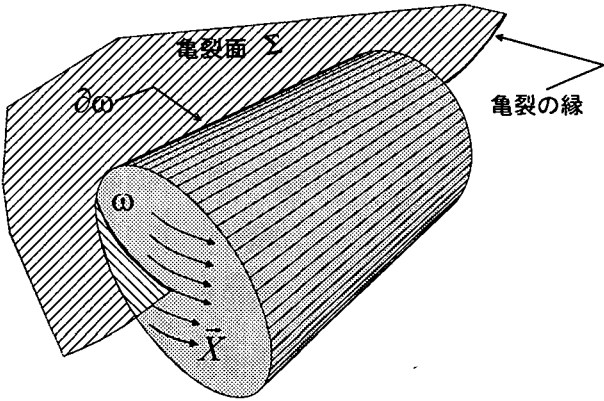


図-14 亀裂先端を含む領域 ω とベクトル場 X

3.2 一般 J 積分の重要な性質

(1) 領域独立性

領域 ω の内部に亀裂の縁や境界を含まないなら $J_\omega(u, X) = 0$ となる。このことから、領域 ω が同じ亀裂の縁を含み、亀裂面に接する限り $J_\omega(u, X)$ は ω に依存しない。

(2) ベクトル場への線形性

一般 J 積分はベクトル場に関して線形である。すなわち、

$$J_\omega(u, \alpha X + \beta Y) = \alpha J_\omega(u, X) + \beta J_\omega(u, Y).$$

(3) 特異性の分離と加法性

分離できる複数亀裂 $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ をもつ問題で、 ω を亀裂全体を含む領域とし、 X をすべての亀裂に接するベクトル場とする。各亀裂の縁 $\partial\Sigma_j, j = 1, \dots, m$ を含み、互いに交わらない領域を $\omega(\partial\Sigma_j), j = 1, \dots, m$ とする。このとき、

$$J_\omega(u, X) = \sum_{j=1}^m J_{\omega(\partial\Sigma_j)}(u, X)$$

が成り立つ。これは積分の加法性から導ける。

(4) 負荷に関する連続性

負荷を $f \in L^2(\Omega)^3, g \in L^2(\Gamma_N)^3$ とする。このとき、

$$|J_\omega(u, X)| \leq C (\|f\|_{0,\Omega}^2 + \|g\|_{0,\Gamma_N}^2)$$

が成り立つ。ただし、正定数 C は f, g に依存しない。

3.3 数値計算法

亀裂の縁 $\partial\Sigma$ を含む図-14 のような領域 ω に対して、領域 $\omega_0 \supset \omega$ を考える。関数 $\eta_\omega(x)$ は (16) を満たす 3 次元空間で定義された関数とする。このとき、

$$J_\omega(u, X) = R_{\Omega_\Sigma}(u, \eta_\omega X)$$

となる。

T_h を最大メッシュサイズが h で正則な Ω_Σ の三角錐分割とする。三角錐上で 1 次な連続関数から構成される関数空間 $V(\Omega_\Sigma)$ の有限部分空間 V_h を考える。関数 u_h を変位ベクトルの近似解とすると、誤差評価 (27) を得る。よって (30) と同様な式

$$|R_{\Omega_\Sigma}(u, \eta_\omega X_{\Sigma(\tau)}) - R_{\Omega_\Sigma}(u_h, \eta_\omega X_{\Sigma(\tau)})| \leq C(\eta_\omega)h \quad (36)$$

を得る。あと、 $\int_{\partial\Sigma} \dot{\phi}_\lambda dl$ を計算すれば、エネルギー解放率が求まる。

亀裂先端における点 $\lambda \in \partial\Sigma$ での応力拡大係数の分布は、次のように形式的に求めることが出来る。亀裂の縁 $\partial\Sigma$ で定義された、点 $\gamma \in \partial\Sigma$ のディラック関数 δ_γ に収束する関数列 $\varphi_j, j = 1, \dots, \infty$ を考える。すなわち、 $\partial\Sigma$ で連続な任意の関数 ψ に対して

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi_j(l)\psi(l)dl \rightarrow \psi(\gamma) \quad \text{as } j \rightarrow \infty$$

となるものを使う。亀裂の縁 $\partial\Sigma$ で定義されたベクトル場 $\varphi_j \lambda$ を Π に沿って拡張し、さらに Π に垂直な方向へ平行移動したベクトル場を X_{φ_j} とする (図-12 と図-13 を参照)。そして、十分小さな h と十分大きな j に対して

$$\mathcal{K}(\gamma) = R_{\Omega_\Sigma}(u_h, \eta_\omega X_{\varphi_j}).$$

を数値計算できれば、

$$G(\mathcal{L}, \{\Sigma(\tau)\}) \simeq \int_{\partial\Sigma} \mathcal{K}(l)\dot{\phi}_\lambda(l)dl \left(\int_{\partial\Sigma} \dot{\phi}_\lambda dl \right)^{-1}.$$

となる。もし、弾性体が等方等質で $h \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$ としたとき、

$$\mathcal{K}(l) = \frac{1}{E} (K_1^2(l) + K_2^2(l)) + \frac{1+\nu}{E} K_3^2(l)$$

となることが証明できる。ここで、 $K_i(l), i = 1, 2, 3$ は $l \in \partial\Omega$ における応力拡大係数で、 ν はポアソン比である。

3.4 保存則との関係

3次元における Eshelby の提案した J 積分¹⁶⁾は、現在では弾性体の保存則と結び付けられて議論されている¹⁷⁾。

等質で線形な弾性体を考え、領域 ω の内部でその弾性場は滑らかであるとし、内部力は恒等的に零であるとする。そのとき次の保存則が成立する。

$$J_k(\mathbf{u}) := \int_{\partial\omega} \{W(\varepsilon)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{n}) - T_i(\mathbf{e}_k \cdot \nabla)u_i\} ds = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (37)$$

$$M(\mathbf{u}) := \int_{\partial\omega} \{W(\varepsilon)x_i n_i - T_j(\partial_i u_j)x_i - (T(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u})/2\} ds = 0. \quad (38)$$

さらに弾性体が等方ならば、 $k = 1, 2, 3$ に対し、

$$L_k(\mathbf{u}) := \int_{\partial\omega} \epsilon_{klm} \{W(\varepsilon)x_m n_l - T_l(\mathbf{u})u_m - T_p(\mathbf{u})(\partial_l u_p)x_m\} ds = 0. \quad (39)$$

ここで、 $\mathbf{e}_k$ は x_k -軸方向の単位ベクトル、 $T_i = \sigma_{ij}n_j$ で、 ϵ_{klm} は交代テンソルの成分である。保存則 (37)–(39) は線形弾性体が剛体変形に関して不変な性質をもつこととあら導かれる。そして論文¹⁷⁾ には、上記以外の保存則が存在しないことが証明されている。

保存則 (37)–(39) は、亀裂先端に特異性があるとき、保存則が壊れるので、破壊の物理量として破壊力学で利用される。ただし次の結果が示すように、保存則は一般 J 積分に特殊なベクトル場を代入したものでない。3次元のエネルギー解放率を直接表現するものでない。

等質で線形な弾性体を考え、領域 ω の内部で弾性場は滑らかであるとし、内部力は恒等的に零であるとする。そのとき、次が成り立つ⁴⁾。

$$J_k(\mathbf{u}) = J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{e}_k), \quad (k = 1, 2, 3). \quad (40)$$

$$M(\mathbf{u}) = J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{r}). \quad (41)$$

さらに弾性体が等方ならば

$$L_k(\mathbf{u}) = J_\omega(\mathbf{u}, \mathbf{q}_k), \quad (k = 1, 2, 3). \quad (42)$$

ここで、 $\mathbf{q}_k = (\epsilon_{k1l}x_l, \epsilon_{k2l}x_l, \epsilon_{k3l}x_l)$ で x_k -軸中心の回転をあらわし、 $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ である。

保存則は一般 J 積分の特別な場合であり、ベクトル場 $\mathbf{e}_k, \mathbf{q}_k, \mathbf{r}$ は亀裂進展速度ベクトル場としては特殊

なので、保存則とエネルギー解放率とを直接結びつけるのは無理がある。

謝辞 金沢大学の矢富教授には、工学的知識の提供などをいただいた。また Bui 教授には、領域積分の重要性を American Mathematical Review において指摘していただき謝意を表する。そして、パリ大学の Pironneau 教授をはじめとする FreeFEM のグループには一般 J 積分を数値計算するツールを作成していただき感謝する。

参考文献

- 1) Rice, J.R.: A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech., 35(1968), 379–386.
- 2) Cherepanov, G.P.: Crack propagation in continuous media, J. Appl. Math. Mech., 31(1967), 503–512.
- 3) Ohtsuka, K.: J-integral and two-dimensional fracture mechanics, 京大数理解析研究所考究録 386, pp.235–248, 1980.
- 4) Ohtsuka, K.: Generalized J-integral and three dimensional fracture mechanics I, Hiroshima Math. J., Vol. 11, pp. 21–52, 1981.
- 5) De Lorenzi, H.G.: Three-dimensional elasto-plastic fracture mechanics with Adina Comp. & Struct., Vol. 13, pp. 613–621, 1981.
- 6) Destuynder, P. and Djaoua, M.: Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, Math. Methods Appl. Sci., Vol. 3, pp. 70–87, 1981.
- 7) Bui, H.D.: 青木繁他訳, 材料力学における逆問題, 裳華房, 1994.
- 8) Nishioka, T. and Atluri, S. N.: Path independent integrals, energy release rates and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamic fracture mechanics, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 18, pp.1–22, 1983.
- 9) Ohtsuka, K.: Generalized J-integral and its applications I – Basic theory, Japan J. Applied Math., Vol. 2, pp.329–350, 1985.
- 10) Fichera, G.: Existence theorem in elasticity, Handbuch der Physik, Vol. VIa/2, Festkörpermechanik II, Springer-Verlag, Berlin, pp.347–389, 1972.
- 11) Grisvard, P.: Singularities in boundary value problems, Masson, 1992.
- 12) Grisvard, P.: Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, 1985.
- 13) Ohtsuka, K. and Bochniak, M.: Shape sensitivity analysis of stress intensity factors by generalized J-integral, Math. Methods Appl. Sci., to appear.
- 14) Johnson, C.: Numerical solution of partial differential equation by the finite element method, Cambridge Univ. Press, 1992.
- 15) Ohtsuka, K.: Mathematical aspects of fracture mechanics, Lecture Notes in Num. Appl. Anal., Vol. 13, pp.39–59, 1994.
- 16) Eshelby, J.D.: The continuum theory of lattice defects, Solid State Physics, Vol. 3, pp. 79–144, 1956.
- 17) Knowles J. and Sternberg, E.: On a class of conservation laws in linearized and finite elasticities, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 44, 187–211, 1972.

(1998 年 4 月 25 日 受付)