

縞状滑り線発生荷重の確率変動理論

Stochastic Strength Variation at the Emergence
of
Parallel Shear Bands

池田 清宏*, 室田 一雄**, 小山 茂***, 佐藤 太造****

Kiyohiro IKEDA, Kazuo MUROTA, Shigeru KOYAMA and Taizo SATO

*東北大学工学部土木工学科 (〒 980-8579 仙台市青葉区)

**京都大学数理解析研究所 (〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町)

***信州大学工学部社会開発工学科 (〒 380 長野市若里 500)

****日本国土開発株式会社 (〒 107-8466 東京都港区赤坂 4-9-9)

This paper presents a theory on the imperfect bifurcation behavior at the emergence of parallel shear bands on uniform materials, and that of the statistical variation of the strength of these materials which often is governed by this emergence. It is shown by means of the group-theoretic bifurcation theory that the emergence can be explained as a symmetry-breaking bifurcation if the underlying symmetry is exploited to model the local uniformity of materials. The mechanism of the stochastic variation of uniform materials can be modeled in the theory of bifurcation by ascribing such variation to the stochastic variation of initial imperfections among them, which turns into the variation of the strength through imperfect bifurcation. Further, with these imperfections modeled to be normally-distributed multi-variate random variables, the probability density functions of the critical load (strength) are derived.

Key Words : bifurcation, stochastic variation of strength, parallel shear bands

1. まえがき

縞状のすべり線やブロック状の割れ等のパターンを発生する材料は数多く存在する。例えば、砂や土¹⁾, 岩²⁾, 金属やクリスタル^{3), 4), 5)}がその代表例としてあげられる。著者らは、このようなパターンの発生を対称性崩壊分岐現象として捉え、そのメカニズムを群論的分岐理論により記述している^{6), 7)}。

金属等材料に縞状のすべり線が発生し、荷重の低下要因になることは Hill-Hutchinson⁸⁾の塑性分岐理論により解明されている。一方、金属等の破壊強度の確率変動に関しては、破壊力学的な見地にもとづく Weibull 分布が幅広く用いられている。このように変形メカニズムは「塑性分岐」、強度の変動メカニズムは「破壊力学的な Weibull 分布」という金属分野の現行の学問体系には問題があると言えよう。

Koiter⁹⁾は、シェル等の構造系の座屈強度が初期不整の大きさの $2/3$ 乗に (初期不整が小さい場合に漸近的に) 比例して低下することを明らかにした。この漸近則はその後 Thompson・Hunt¹⁰⁾により体系化された。著者等は、単一の初期不整変数に対するこれらの漸近理論を有限個の不整変数へと一般化し^{11), 12)}, 種々の初期不整が正規分布に従う場合の強度発現の仕組の理論を提案し^{13), 14), 15)}, シェル等の構造例に適用しその妥当性を

検証してきた¹⁶⁾。この理論により座屈荷重 (強度) の確率密度関数が先験的に求まることは、確率論的な議論を行うに際し非常に有利である。しかしこの関数形は座屈荷重を支配する特異点により異なるので、特異点の種類に応じた個別の議論が必要になる。Ikeda・Murota・Terada¹⁷⁾は、分岐により縞状の解が発生する場合の初期不整の確率変動に伴う分岐荷重の確率変動を表す基礎式を提案している。この確率変動理論は、前述の問題を解決するものであり、「変形メカニズム」と「強度の変動メカニズム」とを整合させるものである。本研究ではこの基礎式の数値解を得ることにより、縞状滑り線の発生荷重の確率変動のメカニズムを解明することとする。

2. 周期境界を持つ長方形領域の分岐構造

著者ら^{6), 7), 17)}は、周期境界を持つ長方形領域の代表的な変形パターンと分岐の仕組みを群論的分岐理論により記述している。この章ではその結果の概要を示す (群論的分岐理論の詳細については付録を参照)。

2.1 対称性の記述法と代表的な分岐モード

長方形領域として

$$\{(X, Y) \mid 0 \leq X \leq L_X(f), 0 \leq Y \leq L_Y(f)\} \quad (1)$$

を考える。ここで、 $L_X(f)$ は X 方向の長さを、 $L_Y(f)$ は Y 方向の長さを表わし、いずれも荷重パラメータ f に

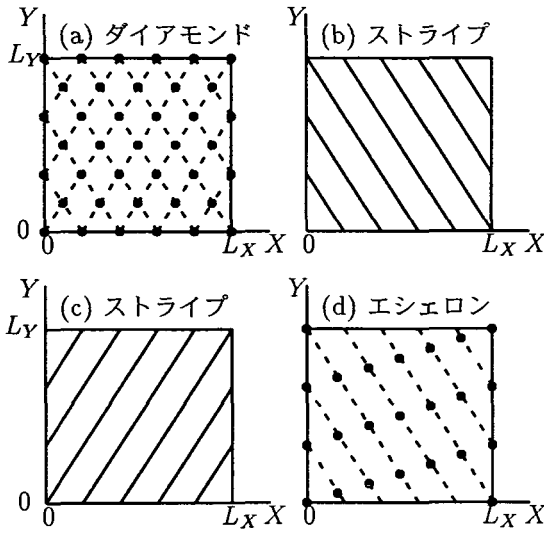


図-1 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 同変な系の代表的な分岐モードの模式図

よって変化する。この領域の境界の影響を除くために、長方形領域の両端は周期的な境界とし、滑らかにつながっていると仮定する。

この長方形領域は変換

$$\begin{aligned} t_X(l_X) &: X \rightarrow X + l_X \\ \sigma_X &: X \rightarrow -X \\ t_Y(l_Y) &: Y \rightarrow Y + l_Y \\ \sigma_Y &: Y \rightarrow -Y \end{aligned}$$

に関して不変であり、周期対称性と鏡映対称性を持つ。ただし、 $t_X(l_X)$ は X 軸方向への長さ l_X の並進変換、 σ_X は YZ 平面に関しての鏡映変換を表わす。 $t_Y(l_Y)$ は Y 軸方向への長さ l_Y の並進変換、 σ_Y は XZ 平面に関しての鏡映変換を表わす。この対称性を表わす群は

$$G = C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \quad (2)$$

である。ここに、

$$C_{\infty v} = \langle t_X(l_X), \sigma_X \rangle, \quad \tilde{C}_{\infty v} = \langle t_Y(l_Y), \sigma_Y \rangle$$

であり、 $\langle \cdot \rangle$ は括弧内の元により生成される群を示す。

分岐後のこの長方形領域の変形パターンは、対称群 G の部分群により表わされる。以下に代表的な変形パターンとそれを表わす部分群を示す。

1) ダイヤモンドパターン (Diamond Pattern)

$$DI_{n\tilde{n}} = \left\langle \sigma_X \sigma_Y, t_X \left(\frac{L_X}{2n} \right) t_Y \left(\frac{L_Y}{2\tilde{n}} \right), t_X \left(\frac{L_X}{2n} \right) t_Y \left(-\frac{L_Y}{2\tilde{n}} \right) \right\rangle \quad (3)$$

2) ストライプパターン (Oblique Stripe Pattern)

$$OB_{n\tilde{n}}^{\pm} = \left\langle \sigma_X \sigma_Y, \left\{ t_X(l_X) t_Y(l_Y) \mid n \frac{l_X}{L_X} \pm \tilde{n} \frac{l_Y}{L_Y} = N, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \right\rangle$$

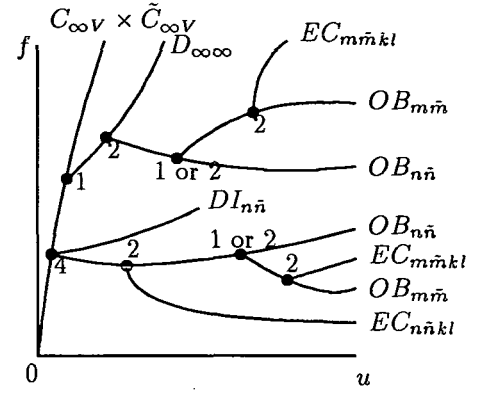


図-2 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 同変な系の代表的な分岐の仕組み図⁷⁾

3) エシェロンモード (Echelon Mode), 雁行モード

$$EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm} = \left\langle \sigma_X \sigma_Y, t_X \left(\mp L_X \frac{\tilde{n}}{dk} \right) t_Y \left(L_Y \frac{n}{dk} \right), t_X \left(\frac{L_X}{d} \left(p \mp \frac{\tilde{n}l}{dk} \right) \right) t_Y \left(\frac{L_Y}{d} \left(\tilde{p} + \frac{nl}{dk} \right) \right) \right\rangle$$

ここに、 n と $\tilde{n}$ はそれぞれ X 方向と Y 方向の周波数を表わす正整数、 k はある正整数、 d は n と $\tilde{n}$ の最大公約数、 l は $0 \leq l \leq d-1$ を満足する整数、 p と $\tilde{p}$ は $np + \tilde{n}\tilde{p} = d$ を満たす整数である。

上記の変形パターンの模式図を図 1 に示す。図中、実線 (—) と黒丸 (●) は同一の物理特性 (応力、変位等) を持つ線や点の位置を表わす。

2.2 分岐階層

図 2 に $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 同変な系の分岐の仕組み図を示す。図中の数字は分岐点の多重度 M を表わし、 $D_{\infty\infty} = \langle \sigma_X \sigma_Y, t_X(l_X), t_Y(l_Y) \rangle$ である。例えば、 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 不変な主経路上の 4 重分岐点からダイヤモンドパターンの分岐解 $DI_{n\tilde{n}}$ とストライプパターンの分岐解 $OB_{n\tilde{n}}$ が同時に分岐し、 $OB_{n\tilde{n}}$ 不変な経路上の 2 重分岐点からエシェロンモード $EC_{n\tilde{n}kl}$ が分岐している。最初は全く均質であった領域が分岐にともない、パターンを発生しながら乱れて行くことになる。

2.3 4 重分岐点の分岐方程式

ダイヤモンドパターンの分岐解 $DI_{n\tilde{n}}$ とストライプパターンの分岐解 $OB_{n\tilde{n}}$ が同時に分岐する 4 重分岐点の分岐方程式とその分岐挙動のメカニズムは、著者ら⁶⁾ が既に求めている。これはこの系の分岐方程式 (I.5) が対称条件 (I.9) のもとでどのような解を持つかを調べたものである。Ikeda・Murota・Terada¹⁷⁾ はこの方法論を初期不整を持つ不完全系へ拡張し、以下に示す分岐方程式を誘導した。

$$\tilde{h}(x, y, \tilde{f}, \epsilon) = \begin{pmatrix} \alpha\epsilon + x \left(\tilde{f} + Px^2 + Qy^2 \right) \\ \beta\epsilon + y \left(\tilde{f} + Qx^2 + Py^2 \right) \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

ここに、 $\tilde{f}$ は完全系分岐点からの荷重の増分、 ϵ は初期不整、 x と y は完全系分岐点からのゼロ固有値の固有ベクトル方向の増分変位を表す。また P と Q は任意の係数で、 α と β ($\alpha, \beta \geq 0$) は初期不整のパターンを表わす変数であり、 $d \sim N(0, W^{-1})$ で式 (I.12) が成り立つ、 α^2 と β^2 は互いに独立でそれぞれ指数分布 (自由度 2 の χ^2 分布) に従うことが Ikeda・Murota・Terada¹⁷⁾ により示されている。 $x = 0$ または $y = 0$ がストライプパターンに対応し、 $x = \pm y$ がダイヤモンドパターンに対応するように座標系を取ることとする。このとき、 $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ の場合は、初期不整ベクトルがストライプパターンの対称性を持つ、また $\alpha = \pm\beta$ の場合は、初期不整ベクトルがダイヤモンドパターンの対称性を持つ特殊な場合となる。

この系の特異性条件式 (I.6) は式 (4) を用いて

$$\begin{vmatrix} \tilde{f} + 3Px^2 + Qy^2 & 2Qxy \\ 2Qxy & \tilde{f} + 3Py^2 + Qx^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

となる。

本論文の目的は α^2 と β^2 がそれぞれ前述の分布に従う場合に、系の最大荷重 f_c の確率変動を調べることである。最大荷重 f_c は式 (4) と (5) を連立して Newton-Raphson 法などにより解くことにより求まる。しかし、両式は非線形方程式であるために解が複数存在するが、複数の解の中から物理的に意味がある解 (高々 1 個) を選ぶことが問題となる。系の最大荷重を支配する物理的に意味のある解を確定するために、第 4 章では 4 重分岐点近傍における完全系の挙動を、第 5 章では不完全系の挙動をそれぞれ調べる。さらに第 6 章ではこの結果を踏まえた形で、最大荷重 f_c の確率密度関数を求める。

3. 4 重分岐点近傍における完全系の挙動

完全系の釣合い式は、式 (4) において $\epsilon = 0$ とおくことにより、

$$\tilde{h}(x, y, \tilde{f}, 0) = \begin{pmatrix} x(\tilde{f} + Px^2 + Qy^2) \\ y(\tilde{f} + Qx^2 + Py^2) \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

となる。 $P = Q$ の場合には式 (6) の第 1 式と第 2 式の因子が同一となってしまうので $P = Q$ が成立するか否かにより解の性状が異なる。

3.1 $P = Q$

$P = Q$ の場合、式 (6) を満たす解は次の 2 つに分類される。

1. 自明解: $x = y = 0$,
2. シート状の解: $\tilde{f} = -P(x^2 + y^2)$.

ここで求めた $x, y, \tilde{f}$ の関係を図 3 にプロットする。

3.2 $P \neq Q$

$P \neq Q$ の場合、式 (4) を満たす解は次の 3 つに分類される ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)。

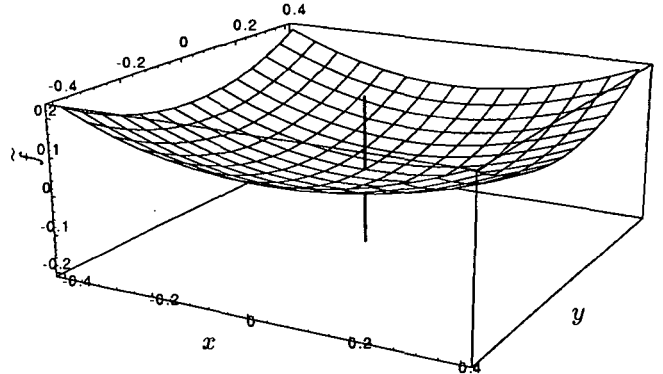


図-3 完全系の解の挙動 ($P = Q, P > 0$)

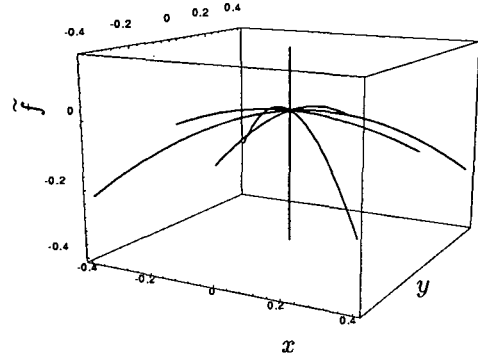


図-4 完全系の解の挙動 ($P > 0, Q = 0$)

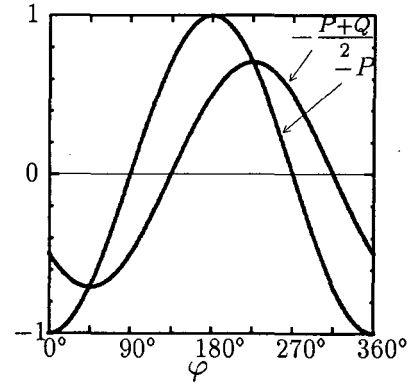


図-5 $-P$, $-(P+Q)/2$ と $\varphi = \tan^{-1}(Q/P)$ の関係図

1. 自明解: $x = y = 0$,
 2. ストライプパターン: $x = 0$, $\tilde{f} = -Py^2 = -Pr^2$,
または $y = 0$, $\tilde{f} = -Px^2 = -Pr^2$,
 3. ダイヤモンドパターン: $x = \pm y$, $\tilde{f} = -(P+Q)x^2 = -[(P+Q)/2]r^2$.
- $x, y, \tilde{f}$ の関係を $P > 0, Q = 0$ の場合に対し図 4 に示す。

ストライプパターンに対応する分岐解 $x = 0$, $\tilde{f} = -Py^2$ の性状は係数 $-P$ の符号により、ダイヤモンドパターンに対応する分岐解 $x = \pm y$, $\tilde{f} = -(P+Q)x^2$ の性状は係数 $-(P+Q)$ の符号により、また両者の大小関係は $-P$ と $-(P+Q)/2$ の大小関係により支配される。 $\varphi = \tan^{-1}(Q/P)$ においてこれらの係数の値の変化を

図5に示す。この図から明らかなように、 $\varphi = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ は解の性状が変化する特殊な角度である。例えば、 $90^\circ < \varphi < 135^\circ$ の場合には、 $-(P+Q)/2 < 0 < -P$ であるので、ストライプパターンの解は $\tilde{f} > 0$ の部分に存在し、ダイヤモンドパターン解は $\tilde{f} < 0$ の部分に存在する。このような解の性状の変化は、後に明らかになるように、不完全系の挙動にも大きな影響を及ぼす重要な性質である。

4. 4重分岐点近傍における不完全系の挙動

この章では不完全系の分岐方程式(4)をもとに、4重分岐点の近傍における不完全系の挙動を明らかにする。初期不整のパターンを表わす変数 α と β がある特定の値を取る場合には、挙動が定性的に全く異なることには注意が必要である ($\alpha = 0$ または $\beta = 0$ の場合は、初期不整ベクトルがストライプパターンの対称性を持つ、また $\alpha = \pm\beta$ の場合は、初期不整ベクトルがダイヤモンドパターンの対称性を持つ特殊な場合である)。上記の4種類の特殊な場合は定性的には等価であるので、以下 $\alpha = 0$ を特殊な場合の代表として取り上げることとする。

4.1 初期不整に対称性がある場合 ($\alpha = 0$)

$\alpha = 0$ の場合には、分岐方程式(4)は

$$\begin{cases} x = 0 \text{ または, } \tilde{f} + Px^2 + Qy^2 = 0 \\ \beta\epsilon + y(\tilde{f} + Qx^2 + Py^2) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

となる。

$x = 0$ の時は式(7)の第2式に $x = 0$ を代入することにより、

$$\tilde{f} = -\left(Py^2 + \frac{\beta\epsilon}{y}\right) \quad (8)$$

と主経路に対応する $\tilde{f}$ と y の関係が求まる。この関係を図6にプロットする。 $y = 0$ の軸に沿って下側から上がってくる基本経路が物理的に意味がある、実際に起こり得る経路である。図5の $-P < 0$ の部分に対応する $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ と $270^\circ < \varphi < 360^\circ$ の場合には(図6の $\varphi = 30^\circ$ はこの場合に相当)、この経路上に極大点が存在し、この極大点がこの系の最大荷重を支配するのである。一方、 $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ の場合には(図6の $\varphi = 100^\circ$ はこの場合に相当)、このような極大点は存在しないので、この系の最大荷重はこの4重分岐点の近傍には存在しないことになる。このような物理的に意味がある基本経路上の極大点の存在の有無は、本論文の目的である強度の確率変動の記述に際し、特に留意すべき点である。

$x \neq 0$ の時は式(7)は

$$\begin{cases} \tilde{f} + Px^2 + Qy^2 = 0 \\ \beta\epsilon + y(\tilde{f} + Qx^2 + Py^2) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

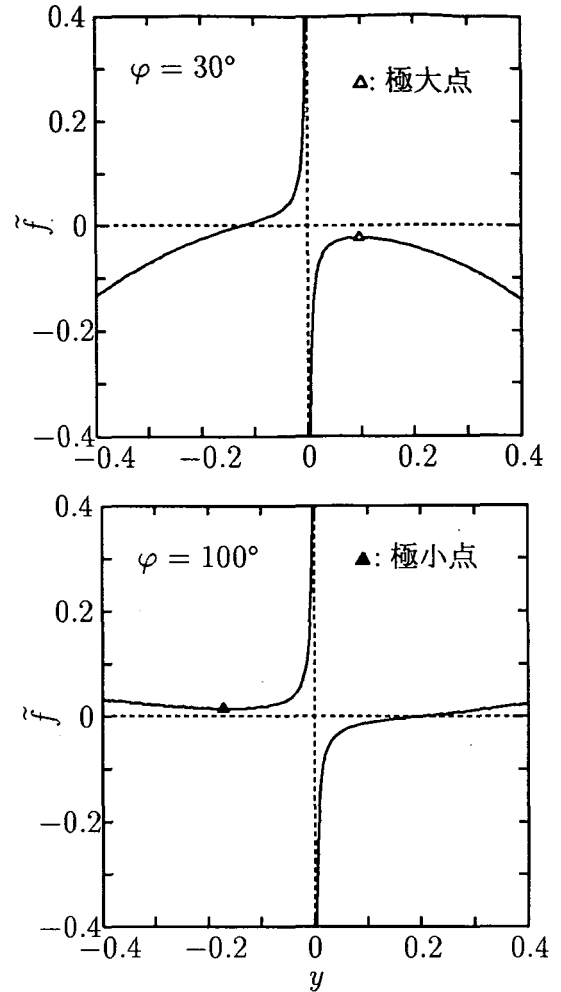


図-6 解の軌跡 ($x = 0, \alpha = 0, \beta = 0.05, \epsilon = 0.03$)

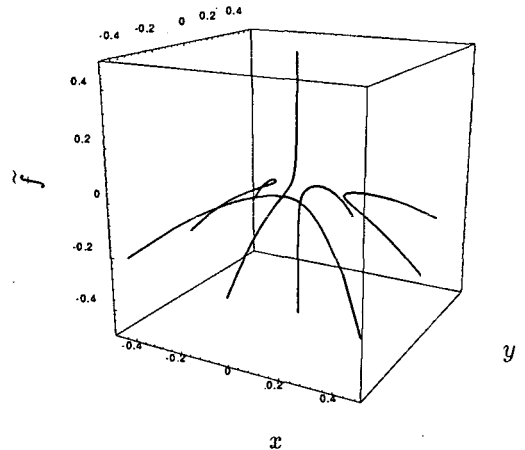


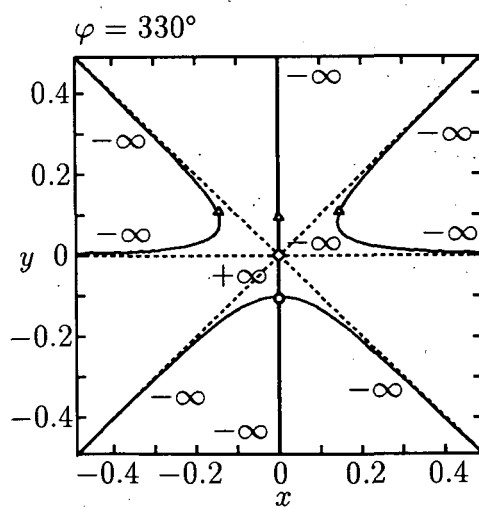
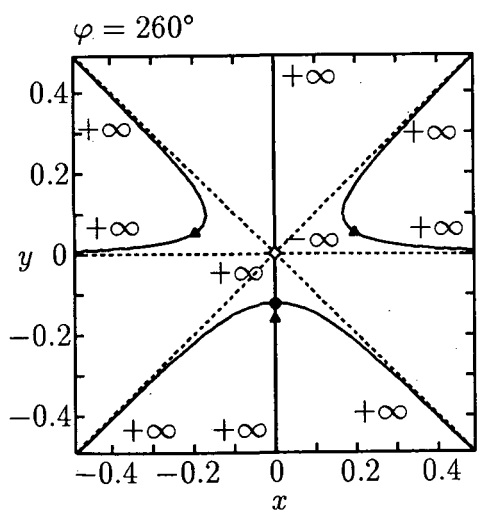
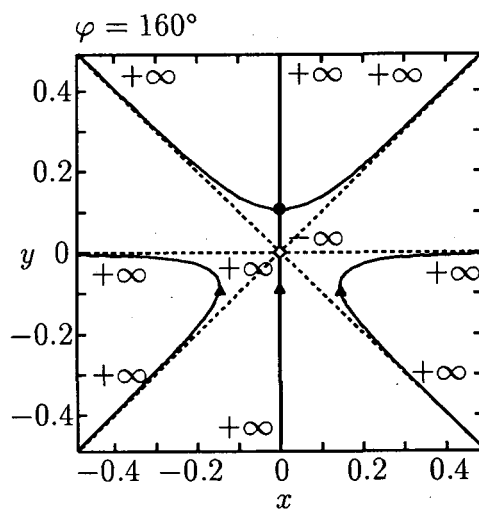
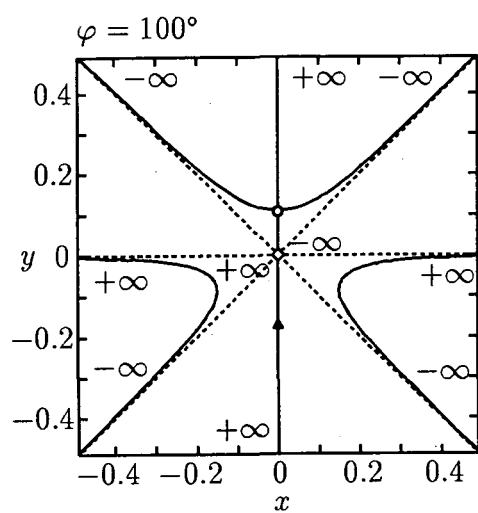
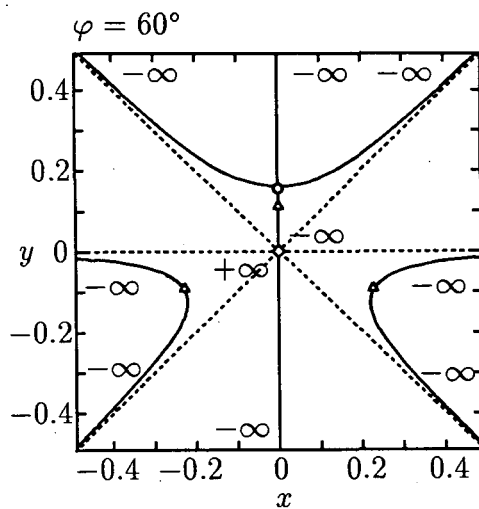
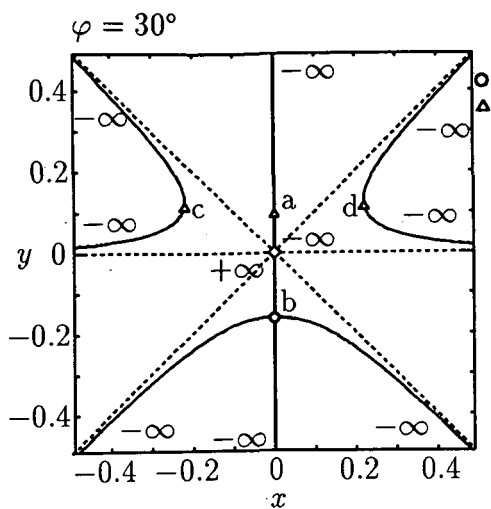
図-7 不完全系の解の挙動 ($\alpha = 0, \varphi = 0^\circ$)

となる。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおいて、式(9)を解くと、

$$\tilde{f} = -r^2(P \cos^2 \theta + Q \sin^2 \theta) \quad (10)$$

と $\tilde{f}$ が r と θ の関数として求まり、また

$$\beta\epsilon - (P - Q)r^3 \sin \theta \cos 2\theta = 0 \quad (11)$$



●: 安定分岐点
▲: 極小点

○: 不安定分岐点
△: 極大点

図-8 不完全系の解の挙動の平面図 ($\alpha = 0$)

と r と θ に関する式が求まる。式 (11) で $P = Q$ と仮定すると、 $\beta\epsilon = 0$ となり矛盾が生じるので、 $P \neq Q$ とおけることが分かる。このとき、式 (11) を r について解くと、

$$r = \left[\frac{\beta}{(P - Q) \sin \theta \cos 2\theta} \right]^{1/3} \epsilon^{1/3} \quad (12)$$

と r が θ の関数として表される。ただし、式 (12) の分母が 0 となる

$$\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ \quad (13)$$

に対しては $r = +\infty$ となるので、式 (13) が $r - \theta$ 曲線の漸近線となる。

$\varphi = 0^\circ$ の場合に、荷重変位曲線を三次元表示したのが図 7 である。この曲線群の中で物理的に意味があるのは $(r, \tilde{f}) = (0, -\infty)$ から $r = 0$ ($x = y = 0$) に沿って上がってくる基本経路だけである。それ以外の経路は遊離経路であり、実際には起こり得ない現象に対応する。

$x, y, \tilde{f}$ の関係を $x-y$ 平面に投影した曲線を図 8 に示す。図中の $+\infty, -\infty$ は対応する経路の $\tilde{f}$ が漸近線に沿って、それぞれ $+\infty, -\infty$ へと発散することを意味する。また、原点の (○) 印はこの点に解が存在しないことを示す。

例えば、 $0^\circ < \varphi < 45^\circ$ の場合には、基本経路上に極大点 a が存在し、この点における荷重がこの系の最大荷重となる。原点に沿って下がっていく遊離経路上に不安定分岐点 b が存在し、 $y > 0$ の部分の 2 本の遊離経路上には y 軸に関して対称な位置に極大点 c, d が存在する。

また、 $90^\circ < \varphi < \tan^{-1}(-\frac{3}{2})$ の場合には、基本経路上に最大荷重を支配する不安定分岐点が存在する。また反対側の原点に沿って下がっていく遊離経路上に極小点が存在し、他の 2 本の遊離経路は $-\infty$ から $+\infty$ へと発散し、経路上に極値は存在しない。

さらに、 $135^\circ < \varphi < 180^\circ$ の場合には、基本経路上に安定分岐点が存在し、反対側の原点に沿って下がっていく遊離経路上に極小点が存在する。この場合には最大荷重は存在しない。また他の 2 本の遊離経路上には、 y 軸に関して対称な位置に極小点が 2 個存在する。

このように、最大荷重を支配する特異点の種類とその存在が φ の値により異なることには注意を要する。

特異点の座標 $(x_c, y_c, \tilde{f}_c)$ は分岐方程式 (9) と特異性条件式 (5) 式を連立して解くことにより以下のように求まる。

- 基本経路上の極大点 ($P > 0$) または反対側の遊離経路上の極小点 ($P < 0$)

$$\left(0, \left(\frac{\beta}{2P} \right)^{1/3} \epsilon^{1/3}, -3P^{1/3} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{2/3} \epsilon^{2/3} \right)$$

- 基本経路上または反対側の遊離経路上の分岐点

$$\left(0, \left(\frac{\beta}{Q - P} \right)^{1/3} \epsilon^{1/3}, -Q \left(\frac{\beta}{P - Q} \right)^{2/3} \epsilon^{2/3} \right)$$

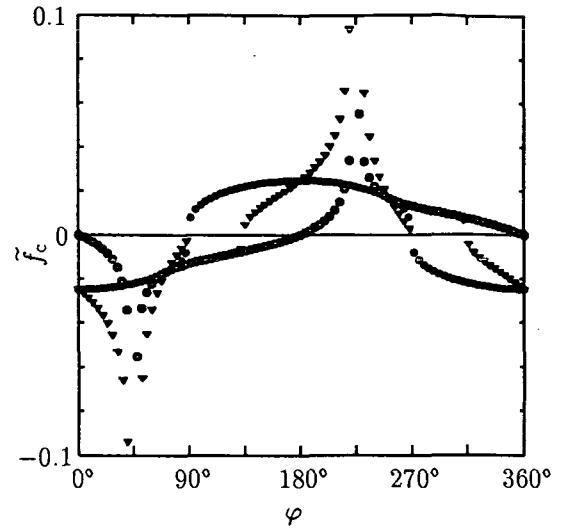


図-9 $\varphi \sim \tilde{f}_c$ 関係 ($\alpha = 0, \beta = 0.05, \epsilon = 0.03$)

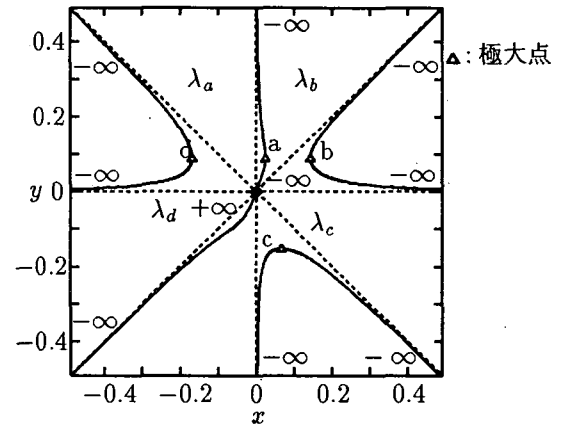


図-10 不完全系の解の挙動の平面図 ($\varphi = 0^\circ, \alpha = 0.02, \beta = 0.05, \epsilon = 0.03$)

- 2 本の遊離経路 ($x \neq 0$) 上の極大、極小点 [$P(3P + 2Q) > 0, P \neq Q$ の時に存在]

$$\left(\pm \left(\frac{3P + 2Q}{P} \right)^{1/2} \left[\frac{P\beta}{2(P^2 - Q^2)} \right]^{1/3} \epsilon^{1/3}, \left[\frac{P\beta}{2(P^2 - Q^2)} \right]^{1/3} \epsilon^{1/3}, -3(P + Q) \left[\frac{P\beta}{2(P - Q)} \right]^{2/3} \epsilon^{2/3} \right)$$

係数 P と Q の値、すなわち $\varphi = \tan^{-1}(Q/P)$ を変化させた時の、これらの極値と φ との関係を図-9 に示す。この図から、ある φ における極値の数、及びその大小関係がわかる。

4.2 初期不整に対称性がない場合

初期不整に対称性がない場合 ($\alpha \neq \beta, \alpha, \beta > 0$) の不完全系の挙動と特異点の位置を調べることにする。

- (1) $Q = 0$ ($\varphi = 0^\circ$)

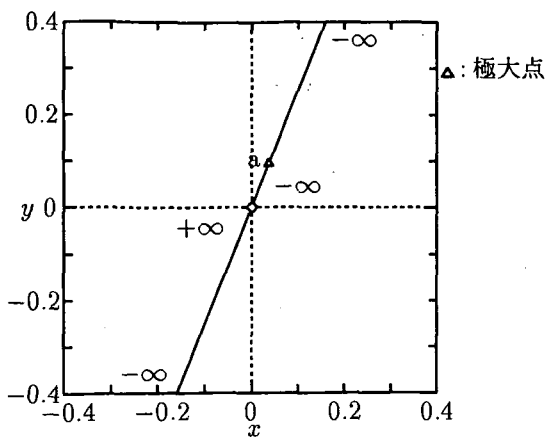


図-11 不完全系の解の挙動の平面図 ($\varphi = 45^\circ$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.05$, $\epsilon = 0.03$)

$Q = 0$ ($\varphi = 0^\circ$) の時, 分岐方程式 (4) は

$$\begin{cases} \alpha\epsilon + x(\tilde{f} + Px^2) = 0 \\ \beta\epsilon + y(\tilde{f} + Py^2) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

となり, 特異性条件式 (5) は

$$(\tilde{f} + 3Px^2)(\tilde{f} + 3Py^2) = 0 \quad (15)$$

となる。

式 (14) が表わす解の軌跡の求め方は, 後に取り上げる $P \neq Q$ の場合と本質的に同一であるので, ここでは省略し, 図 10 にその結果だけを示す。基本経路は原点 $(x, y) = (0, 0)$ から $\psi = \tan^{-1}(\alpha/\beta)$ の方向に飛び出し, 極大点 a を経由し, x 軸の正の部分に漸近する。

(14) と (15) 式とを連立して解くことにより, 図 10 の特異点 a, b, d の位置は

$$\left(x_c, \left(\frac{\beta}{2P} \right)^{1/3}, -3P^{1/3} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{2/3} \epsilon^{2/3} \right) \quad (16)$$

と, また特異点 c の位置は

$$\left(\left(\frac{\alpha}{2P} \right)^{1/3}, y_c, -3P^{1/3} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2/3} \epsilon^{2/3} \right)$$

と求まる。ここで x_c と y_c はそれぞれ,

$$\beta\epsilon + y(\tilde{f} + Py^2) = 0$$

$$\alpha\epsilon + x(\tilde{f} + Px^2) = 0$$

を満足する解である。

(2) $P = Q$ ($\varphi = 45^\circ$)

$P = Q$ ($\varphi = 45^\circ$) のとき, 分岐方程式 (4) は

$$\begin{cases} \alpha\epsilon + x\tilde{f} + Px(x^2 + y^2) = 0 \\ \beta\epsilon + y\tilde{f} + Py(x^2 + y^2) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

と書き直せる。式 (17) を解くことにより,

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \quad (18)$$

と x と y の関係が求まる。式 (18) を式 (17) に代入すると,

$$\tilde{f} = -\frac{\alpha}{x}\epsilon - \frac{P}{\alpha^2}(\alpha^2 + \beta^2)x^2 \quad (19)$$

と $\tilde{f}$ が x の関数として求まる。この場合には, 図 11 に示すように, 式 (19) から求まる基本経路と遊離経路のみが存在し, 基本経路上に極大点 a が存在する。反対側の遊離経路は原点に沿って下がっていき $-\infty$ に発散してしまい, 極値は存在しない。

式 (19) の極値が満たすべき条件は,

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = \frac{1}{x^3\alpha^2} [\alpha^3\epsilon - 2P(\alpha^2 + \beta^2)x^3] = 0 \quad (20)$$

であり, 上式を x について解くと

$$x = \frac{\alpha}{[2P(\alpha^2 + \beta^2)]^{1/3}} \epsilon^{1/3} \quad (21)$$

と求まり, これを式 (17) と (18) に代入することにより, 極大点 a の座標が

$$\left(\frac{\alpha}{[2P(\alpha^2 + \beta^2)]^{1/3}} \epsilon^{1/3}, \frac{\beta}{[2P(\alpha^2 + \beta^2)]^{1/3}} \epsilon^{1/3}, -\frac{3}{4^{1/3}} [(\alpha^2 + \beta^2)P]^{1/3} \epsilon^{2/3} \right) \quad (22)$$

と求まる。

(3) $P \neq Q$ ($\varphi \neq 45^\circ$)

$P \neq Q$ ($\varphi \neq 45^\circ$) のとき, 分岐方程式 (4) から $\tilde{f}$ を消去すると,

$$(\alpha y - \beta x)\epsilon + (P - Q)xy(x^2 - y^2) = 0 \quad (23)$$

という x と y の関係式が求まる。さらに

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\alpha = a \cos \psi, \quad \beta = a \sin \psi$$

とおくと, 式 (23) より

$$r = -\left(\frac{4a}{P - Q} \right)^{1/3} \left(\frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin 4\theta} \right)^{1/3} \epsilon^{1/3} \quad (24)$$

と r が θ の関数として求まり,

$$\tilde{f} = -\frac{a}{r} \cos(\theta - \psi)\epsilon - Pr^2 + \frac{P - Q}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (25)$$

と $\tilde{f}$ が r と θ の関数として求まる。

$\alpha = 0$ の時と同様にこの関係を三次元表示したのが図 12 である ($\varphi = 0^\circ$)。この曲線群の中で物理的に意味があるのは $x = y = 0$ に沿って上がってくる基本経路だけであり, それ以外の 4 本の経路は遊離経路である。

$x, y, \tilde{f}$ の関係を x - y 平面に投影した曲線を図 13 に示す。以下各種の $\varphi (= \tan^{-1} \frac{Q}{P})$ の値に対し, 解の性状を記述する。

1. $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ, 315^\circ < \varphi < 360^\circ$

直線 $x = y$ に沿って下がっていく基本経路上に極大点 a が存在する。反対側の遊離経路は原点付近から直線 $x = y$ に沿って下がっていく極値を持たない経路である。他の 3 つの遊離経路上にはそれぞれ

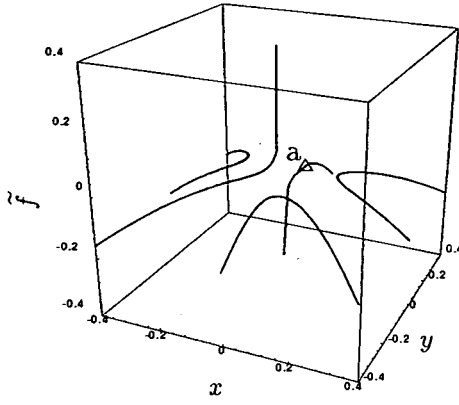


図-12 不完全系の解の挙動 ($\alpha \neq 0, \varphi = 0^\circ$)

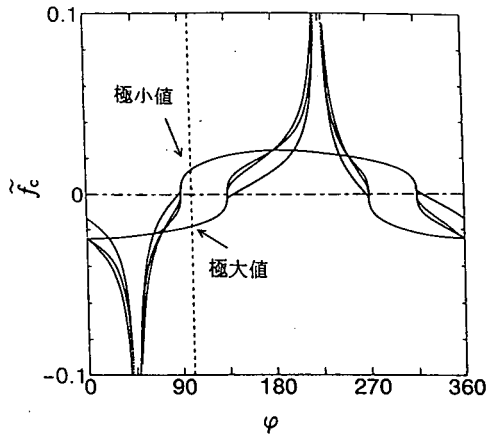


図-14 $\varphi \sim \tilde{f}_c$ 関係 ($\alpha = 0.02, \beta = 0.05, \epsilon = 0.03$)

極大点が存在する。ただし、 $\varphi = 45^\circ$ では他の3つの遊離経路は消失する。

2. $90^\circ < \varphi < 135^\circ$

基本経路上に極大点が存在し、反対側の遊離経路上には極小点が存在する。他の3つの遊離経路上には極値は存在しない。

3. $135^\circ < \varphi < 225^\circ$

基本経路上には極値が存在せず、反対側の遊離経路上には極小点が存在する。他の3つの遊離経路上にはそれぞれ極大点が存在する。

4. $225^\circ < \varphi < 270^\circ$

基本経路上には極値が存在せず、反対側の遊離経路上には極小点、他の3つの遊離経路上にはそれぞれ極小点が存在する。

5. $270^\circ < \varphi < 315^\circ$

基本経路上には極大点、反対側の遊離経路上には極小点が存在し、他の3つの遊離経路上には極値は存在しない。

分岐方程式(4)と特異性条件式(5)を連立して数値的に解くことにより求めた $\tilde{f}_c$ の値と φ の関係を図14に示

す。 $0^\circ \leq \varphi < 135^\circ$ と $270^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ の場合には、 $\tilde{f}_c < 0$ となることに対応し、基本経路上に極大点が存在するため、この系には最大荷重が存在する。

5. 極値の確率分布

この章では分岐方程式(4)の初期不整変数 α^2 と β^2 が指数分布(自由度2の χ^2 分布)

$$\phi_{\alpha^2}(\alpha^2) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (26a)$$

$$\phi_{\beta^2}(\beta^2) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) \quad (26b)$$

に従うことを基礎として、最大強度の確率密度関数を求める。

5.1 $Q = 0$ ($\varphi = 0^\circ$)

式(16)より、 $Q = 0$ ($\varphi = 0^\circ$) の場合の基本経路上の極大点の荷重は

$$\tilde{f}_c = -3P^{1/3} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2/3} \epsilon^{2/3} \quad (27)$$

により与えられる。式(26)を式(27)を用いて変数変換することにより、 $\tilde{f}_c$ の確率密度関数は

$$\phi_{\tilde{f}_c}(\tilde{f}_c) = \frac{6|\tilde{f}_c|^2}{27P\epsilon^2} \exp\left(-\frac{2|\tilde{f}_c|^3}{27P\epsilon^2}\right) \quad (28)$$

($-\infty < \tilde{f}_c < 0$) と求まる。この確率密度関数を図15にプロットする。

5.2 $P = Q$ ($\varphi = 45^\circ$)

次に $P = Q$ ($\varphi = 45^\circ$) の時の確率密度関数を誘導する。式(22)より、基本経路上の極大点の荷重は

$$\tilde{f}_c = -\frac{3}{4^{1/3}} [(\alpha^2 + \beta^2)P]^{1/3} \epsilon^{1/3}$$

により与えられる。また、 $x_3 = \alpha^2 + \beta^2$ の確率密度関数は χ^2 分布の加法定理より

$$\phi_{x_3} = \frac{1}{4} x_3 \exp\left(-\frac{x_3}{2}\right) \quad (29)$$

となる。よって $\tilde{f}_c$ の確率密度関数は

$$\phi_{\tilde{f}_c}(\tilde{f}_c) = \frac{4|\tilde{f}_c|^5}{243P^2\epsilon^4} \exp\left(-\frac{2|\tilde{f}_c|^3}{27P\epsilon^2}\right) \quad (30)$$

($-\infty < \tilde{f}_c < 0$) と求まる。この確率密度関数を図15にプロットする。

5.3 $Q \neq 0, P \neq Q$ ($\varphi \neq 0^\circ, 45^\circ$)

$Q \neq 0, P \neq Q$ ($\varphi \neq 0^\circ, 45^\circ$) の場合には、最大荷重 $\tilde{f}_c$ の確率密度関数は解析的には求まらないので、数値解析により求めることとする。 α^2, β^2 は互いに独立で、それぞれ自由度2の χ^2 分布に従うという仮定にもとづき、 $0 \leq \alpha, \beta \leq 7$ の区間を等分割し、最大荷重 $\tilde{f}_c$ の確率密度を数値積分することにより、確率密度関数曲線の

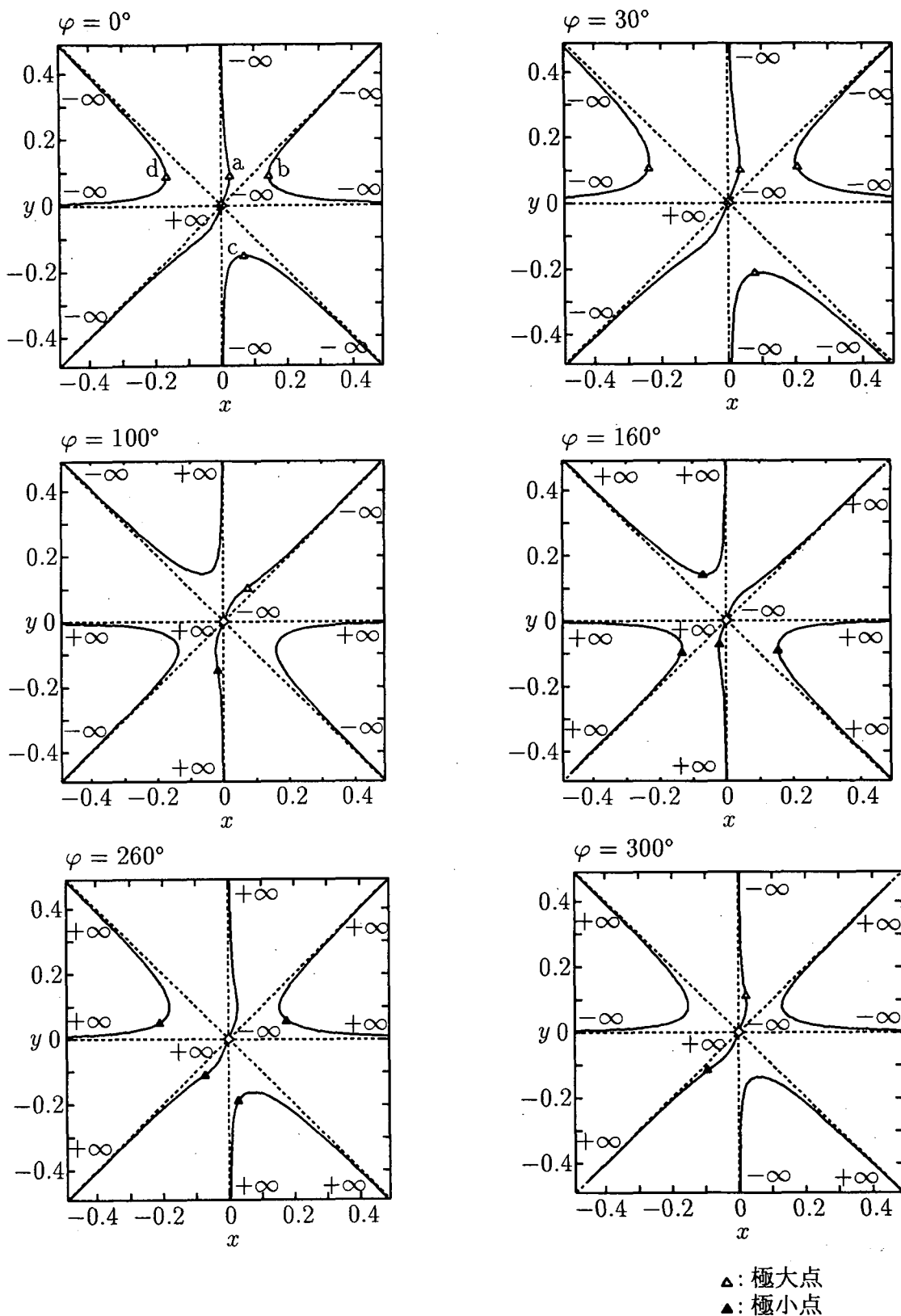


図-13 不完全系の解の挙動の平面図 ($\alpha \neq \beta, \alpha, \beta > 0$)

数値解を求め、図 15 にプロットした。ここで $\varphi = 0^\circ$ は $Q = 0$, $\varphi = 45^\circ$ は $P = Q$, $\varphi = 315^\circ$ は $P = -Q$ にそれぞれ対応する特殊なケースである。また、この図の作成にあたり、基本経路上の極大点は $0^\circ \leq \varphi < 135^\circ$ と $270^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ の場合にしか存在しないことを考慮した。

6. 結論

本論文では分岐という視点に基づく材料の強度発現の理論を提案した。この理論は、金属の分岐の初期に現れる縞状の滑り線が発生する場合の強度の変動を記述するものであり、分岐モードに着目した材料実験データを蓄積することの重要性を示唆するものである。本理論による実験データの記述が今後の課題である。

破壊力学による強度分布 (Weibull 分布) はある下限値を持つ分布であるのに対し、分岐理論による分布はある上限値を持つ分布であり、全く性質が異なっている。物理現象としては材料の強さは上限も下限も持つものであることから、破壊力学と分岐という複眼的な視野を持った研究が望まれる。

参考文献

- Ikeda, K. and Murota, K.: Recursive bifurcation as sources of complexity in soil shearing behavior. *Soils and Foundations*, 37(3), 17-29, 1997.
- Davis, G.H.: *Structural Geology of Rocks & Regions*. John Wiley and Sons, 1984.
- Bai, Y. and Dodd, B.: *Adiabatic Shear Localization — Occurrence, Theories and Applications*. Pergamon, 1992.
- Duszek-Perzyna, M. K. and Perzyna, P.: Adiabatic shear band localization in elastic-plastic single crystals. *Int. J. Solids Structures*, 30, 61-89, 1993.
- Poirier, J.-P.: *Creep of Crystals: High-temperature deformation processes in metals, ceramics and minerals*. Cambridge University Press, 1985.
- Ikeda, K., Murota, K. and Nakano, M.: Echelon modes in uniform materials. *Int. J. Solids Structures*, 31, 2709-2733, 1994.
- Ikeda, K., Murota, K. and Terada, K.: Bifurcation mechanism underlying echelon-mode formation. To appear in *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, 1998.
- Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 239-264, 1975.
- Koiter, W.T.: On the stability of elastic equilibrium. Ph. D. Dissertation. Delft, Holland (English translation: NASA Tech. Trans. F10: 833, 1967), 1945.
- Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W.: *A General Theory of Elastic Stability*. John Wiley and Sons, 1973.
- Ikeda, K. and Murota, K.: Critical initial imperfection of structures. *Int. J. Solids Structures*, 26(8), 865-886, 1990.
- Murota, K. and Ikeda, K.: Critical imperfection of symmetric structures. *SIAM Journal on Appl. Math.*, 51(5), 1222-1254, 1991.
- Ikeda, K. and Murota, K.: Random initial imperfections of structures. *Int. J. Solids Structures*, 28(8), 1003-1021, 1991.
- Murota, K. and Ikeda, K.: On random imperfection for structures of regular-polygonal symmetry. *SIAM J. Appl. Math.*, 52(6), 1780-1803, 1992.
- Ikeda, K. and Murota, K.: Statistics of normally distributed initial imperfections. *Int. J. Solids Structures*, 30(18), 2445-2467, 1993.
- Ikeda, K., Murota, K., and Elishakoff, I.: Reliability of structures subject to normally distributed initial imperfections. *Computers & Structures*, 59(3), 463-469, 1996.
- Ikeda, K., Murota, K. and Terada, K.: Stochastic strength variation of uniform materials with imperfections. In preparation, 1998.
- Sattinger, D.H.: *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory*. Lecture Notes in Mathematics 762 Springer, Berlin, 1979.
- Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 1, 1985.
- Golubitsky, M., Stewart, I., and Schaeffer, D.G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 2, 1988.

付録 I 分岐理論

この節では確率変動する初期不整を持つ材料や構造系の強度変動の理論^{12),15)}を紹介する。ある非線形の釣合方程式

$$H(u, f, v) = 0 \quad (I.1)$$

を考える。ここに f は荷重パラメータを、 u は N 次元の節点変位 (位置) ベクトルを、 v は p 次元の初期不整ベクトルを、 H は十分滑らかな非線形関数をそれぞれ表す。この系の接線剛性行列 (Jacobian) を

$$J = J(u, f, v) = (J_{ij}) = \left(\frac{\partial H_i}{\partial u_j} \right)$$

とする。式の誘導を簡略にするために、行列 J は対称であること (すなわちポテンシャル系であること) を仮定する。

ある一定の初期不整ベクトル v に対して、式 (I.1) の解 (u, f) は釣合径路を形成する。主径路上の最初の特異点を $(u_c, f_c) = (u_c(v), f_c(v))$ とし、特に完全系の主径路上の特異点を (u_c^0, f_c^0, v^0) と表す (下付き添字 $(\cdot)_c$ は特異点に関係する値であることを、上付き添字 $(\cdot)^0$ は完全系に関係する値であることをそれぞれ表す)。接線剛

性行列はこれらの点で特異となり、特異性条件式

$$\det[J(u_c, f_c, v)] = 0 \quad (I.2)$$

を満足する。

特異点が M 重特異点である場合には正規直交基底ベクトル ξ_i ($i = 1, \dots, N$) を

$$\begin{aligned} \xi_i^T J^0 &= 0^T, & i &= 1, \dots, M, \\ \xi_i^T \xi_j &= \delta_{ij}, & i, j &= 1, \dots, N \end{aligned}$$

を満足するように選べる（ここに δ_{ij} は Kronecker のデルタである）。

荷重パラメータと変位ベクトル u を

$$f = f_c^0 + \tilde{f}, \quad f_c = f_c^0 + \tilde{f}_c, \quad u = u_c^0 + \sum_{j=1}^N w_j \xi_j \quad (I.3)$$

と、それぞれ完全系の特異点の値からの増分値として表す。 $\tilde{f}$ は荷重の増分量を、 $\tilde{f}_c$ は座屈荷重（特異点の荷重）の増分量を、 w_j ($j = 1, \dots, N$) は正規直交基底ベクトル ξ_j ($j = 1, \dots, N$) 方向の増分変位を表す。また初期不整ベクトル v も

$$v = v^0 + \epsilon d \quad (I.4)$$

と完全系の値からの増分値として表す。ここに初期不整ベクトル v の増分を、初期不整の大きさを表すスカラー $\epsilon (> 0)$ とパターンを表すベクトル

$$d = (d_1, \dots, d_p)^T$$

とに分解した。初期不整ベクトル v がランダムに与えられたときの、座屈荷重の変動量に興味がある。そこで初期不整の大きさ ϵ が小さく、モード d が平均 0、多変数正規分布 $N(0, W^{-1})$ に従うと仮定する。 W^{-1} はある正定値の共分散行列を表す。

非線形釣合式 (I.1) から、特異点でも特異とならない $N-M$ 個の固有ベクトルに対応する変数を消去することにより、式 (I.3) と (I.4) で定義した増分量に対する M 個の釣合式

$$h(w, \tilde{f}, \epsilon) = 0 \quad (\text{あるいは } \tilde{h}(w, \tilde{f}, v) = 0) \quad (I.5)$$

が求まる ($w = (w_1, \dots, w_M)^T$)。この式は、特に完全系 $v = v^0$ に対しては「分岐方程式」と呼ばれるものである。このように分岐方程式を誘導する手法は工学の分野では「Elimination of passive coordinates¹⁰⁾」、数学の分野では「Liapunov-Schmidt 分解¹⁹⁾」と呼ばれる重要な手法である。縮約した式 (I.5) に対する特異性条件式は

$$\det \left(\frac{\partial h}{\partial w} \right) = 0 \quad (I.6)$$

となる。このように本理論はある特異点とその分岐モードに着目するという立場を取ることで、特異点や分岐モードが変動するような場合には適用できないことには注意を要する。

付録 I1 漸近理論

初期不整の漸近理論^{9),10),11),12)}により明らかにされたように、初期不整の介在による完全系の座屈荷重の変動量 $\tilde{f}_c$ は初期不整の大きさ ϵ が十分小さい場合には、縮約した式 (I.5) とこの式の特異性条件式 (I.6) を連立して解くことにより

$$\tilde{f}_c = f_c - f_c^0 \sim C(d)\epsilon^\rho \quad (I.7)$$

と表される^{10),11)}。この式中の指数 ρ と係数 $C(d)$ は特異点の種類に応じて変るので、変動量 $\tilde{f}_c$ の特性も特異点毎に異なる。典型的には $\rho = 2/3, 1/2$ などである。

付録 I2 群対称性

非線形釣合式 (I.1) が群同変性を持つ、すなわち、ある群 G に対して

$$T(g)H(u, f, v) = H(T(g)u, f, S(g)v), \quad \forall g \in G \quad (I.8)$$

が成り立つ場合を考える。ここに $T(g)$ は N 次元の変位 u に対する、群 G の $N \times N$ のユニタリ表現行列であり、 $S(g)$ は p 次元の初期不整 v に対する、 $p \times p$ のユニタリ表現行列である。表現行列とは群 G の元 g が引き起こす座標変換を、対応するベクトル空間に対して書き表したものである。群同変性の式 (I.8) は、系の対称条件を初期不整を含める形で一般化したものである。この式は、もし (u, f, v) が非線形方程式 $H = 0$ の解であれば、この解を表現行列により座標変換した $(T(g)u, f, S(g)v)$ も解となることを表しており、解の多価性すなわち分岐の条件となっている。

本論文では自明解（最も対称性が高い解）からの分岐に着目するので、特異点における変位ベクトル u_c^0 と初期不整ベクトル v^0 がともに G 不変であると仮定する。

釣合式の群同変性 (I.8) は Liapunov-Schmidt 分解により縮約した式 (I.5) にも遺伝し^{12),18)},

$$\tilde{T}(g)\tilde{h}(w, \tilde{f}, v) = \tilde{h}(\tilde{T}(g)w, \tilde{f}, S(g)v), \quad \forall g \in G \quad (I.9)$$

という同変条件式が成り立つ。ここに $\tilde{T}$ は J^0 の核での M 次元の表現行列である。

式 (I.8) を初期不整変数ベクトル v に関して偏微分すると初期不整に対する対称条件式

$$T(g)B = BS(g), \quad \forall g \in G \quad (I.10)$$

が求まる。式中

$$B = (B_{ij}) = \left(\frac{\partial H_i}{\partial v_j} \right) \bigg|_{(u, f, v) = (u_c^0, f_c^0, v^0)} \quad i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, p \quad (I.11)$$

は初期不整の影響を表す初期不整感度行列である。

初期不整ベクトル ϵd が正規分布 $N(0, \epsilon^2 W^{-1})$ に従うことに関連し、共分散行列 W^{-1} の群対称性

$$S(g)WS(g)^T = W, \quad \forall g \in G \quad (I.12)$$

を仮定する。

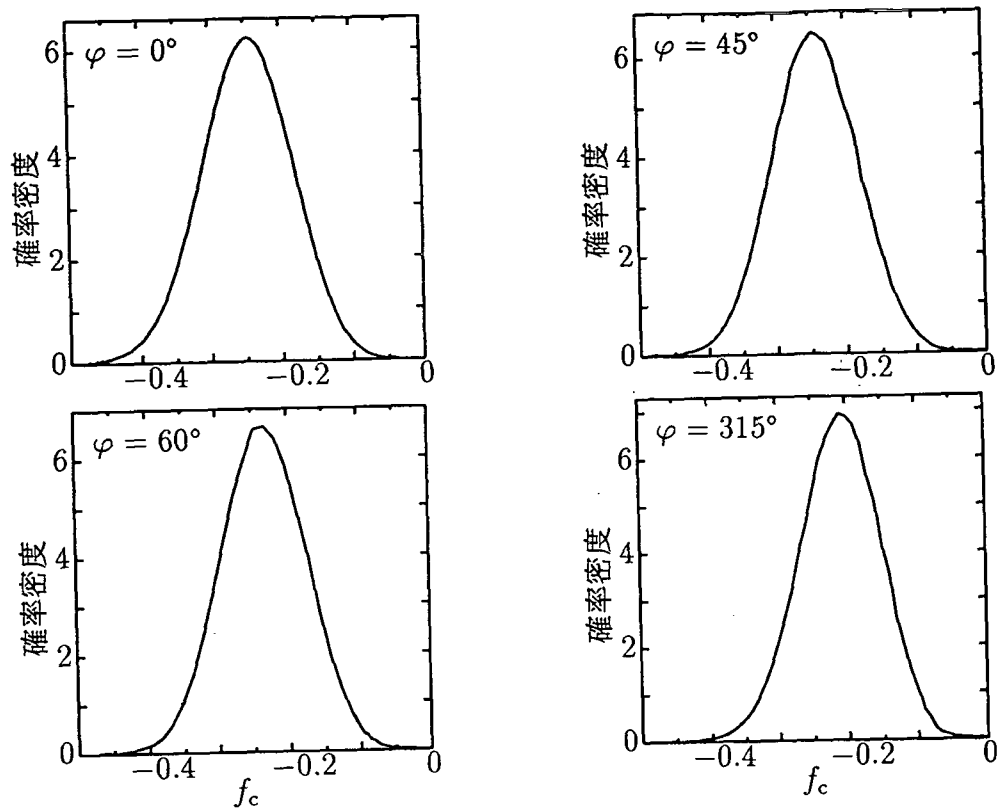


図-15 最大荷重の確率密度関数 ($\epsilon = 0.03$)

(1998 年 4 月 24 日 受付)