

曲げねじり弾塑性挙動が表現できる ファイバーモデルの理論と逆L形橋脚への適用

長谷川 秀也¹・野中 哲也²・森下 宜明³・
吉野 廣一⁴・馬越 一也⁵・岩村 真樹⁶

¹正会員 名古屋工業大学大学院 社会工学専攻 博士後期課程（〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町）

²正会員 博（工） 名古屋工業大学大学院教授 社会工学専攻（〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町）

³正会員 名古屋高速道路公社 都心アクセス事業部（〒453-0804 名古屋市中村区黄金通7-28-1）

⁴非会員 株式会社地震工学研究開発センター（〒460-0012 名古屋市中区千代田3-8-2）

⁵正会員 博（工） 株式会社地震工学研究開発センター（〒810-0004 福岡市中央区渡辺通4-6-20）

⁶非会員 株式会社地震工学研究開発センター（〒460-0012 名古屋市中区千代田3-8-2）

1. はじめに

鋼橋、特に鋼製橋脚に対する実務耐震設計（動的解析およびPushover解析）においては、ファイバーモデルでモデル化する場合が多くなってきた。鋼製橋脚に対してPushover解析を実施すると、柱基部には主に圧縮曲げが作用するため、通常は梁理論で十分に対応できる。ファイバーモデルは、土木学会の新技术小委員会¹⁾で提案され（当時は、「ファイバーモデル」ではなく「 $\sigma - \epsilon$ モデル」と言っていた）、その後、ファイバーモデルについての研究が進み、文献2),3)等でまとめられている。

ファイバーモデルは、断面内に任意に積分点を設けることができるFEM梁要素といえる。梁要素であるため、軸線方向の直応力だけで塑性化を表現する。部材と作用荷重の関係によっては、軸力と曲げだけでなく、せん断やねじりが発生し、さらにはそれらが連成して塑性化することもある。その代表例が、逆L形橋脚に対して橋軸方向に荷重を作用させたPushover解析である。このように応力レベルで直応力とせん断応力が連成して弾塑性挙動を表現するには、シェル要素によるモデル化が一般的である。

本研究では、その連成が考慮できるファイバーモデル（本研究で、「拡張版ファイバーモデル」と呼ぶ）を提案する。まず、各応力成分が連成する拡張版ファイバーモデルの理論を説明した上で、曲げねじりを受ける単純な柱に対するPushover解析を例にして、拡張版ファイバーモデルを用いれば、曲げと

ねじりが連成した弾塑性挙動（荷重-変位曲線や最大耐力の算出）が表現できることを、シェルモデルの解析結果と比較して確認する。単純な柱で確認した後に、実務レベルの2種類（T形橋脚と逆L形橋脚）の矩形断面鋼製橋脚に対して同様にPushover解析を行い、シェルモデルとの比較を行うことによって、拡張版ファイバーモデルの実務への適用性について検討する。なお、本研究では、コンクリートが充填されていない鋼製橋脚を対象にしている。

2. 拡張版ファイバーモデルの理論

本研究では、解析ソフトSeanFEM⁴⁾を用いてPushover解析を実施した。この解析ソフトの塑性理論の部分は、文献5)を参考にして開発した。なお、有限変位理論については、文献6)を参考にしている。

(1) 弾塑性マトリックスの算出

塑性時の構成則を示すと、

$$\dot{\sigma} = C(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) \quad (1)$$

ここに、 C ：弾性定数

$\dot{\epsilon}_p$ ：塑性ひずみ速度

また、塑性流れ則は、

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} a \quad (2)$$

ここに、 $\dot{\lambda}$ ：塑性ひずみ速度係数

a は、次式で定義される塑性ポテンシャル f の法線方向ベクトルである。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = a \quad (3)$$

降伏曲面は、

$$f = \sigma_e(\sigma) - \sigma_0(\varepsilon_{ps}) \quad (4)$$

ここに、 σ_e : 有効応力

σ_0 : 降伏応力

ε_{ps} : 有効塑性ひずみ

式(2)を式(1)に代入すると、

$$\dot{\sigma} = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}a) \quad (5)$$

増分表示すると、

$$\Delta\sigma = C(\Delta\varepsilon - \Delta\lambda a) \quad (6)$$

これに前ステップの応力 σ^p を加算して

$$\sigma = \sigma^p + \Delta\sigma = \sigma^p + C\Delta\varepsilon - \Delta\lambda Ca = \sigma_t - \Delta\lambda Ca \quad (7)$$

ここで、 σ_t は、次式で定義する試行応力である。

$$\sigma_t = \sigma^p + C\Delta\varepsilon \quad (8)$$

式(7)が塑性時の応力算定の基本式で、試行応力が降伏曲面の外に出たとき、 Ca ベクトル方向に $\Delta\lambda$ 倍に戻して、降伏曲面の応力を算定することを意味する。

ここから一般的な弾塑性マトリックスを誘導する。

Backward Euler 法による応力算出式は、

$$\sigma = \sigma^p + C\Delta\varepsilon - \Delta\lambda Ca = \sigma_t - \Delta\lambda Ca \quad (9)$$

これを微分すると、

$$\dot{\sigma} = C(\dot{\Delta\varepsilon}) - (\dot{\Delta\lambda}) Ca - (\Delta\lambda) C \frac{\partial a}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \quad (10)$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \left(I + (\Delta\lambda) C \frac{\partial a}{\partial \sigma} \right)^{-1} C((\dot{\Delta\varepsilon}) - (\dot{\Delta\lambda})a) \\ &= Q^{-1} C((\dot{\Delta\varepsilon}) - (\dot{\Delta\lambda})a) = R((\dot{\Delta\varepsilon}) - (\dot{\Delta\lambda})a) \end{aligned} \quad (11)$$

塑性が進行しても、応力は降伏曲面上に維持する。

降伏曲面 f が $f = \sigma_e - \sigma_0$ であるためには、

$$\dot{f} = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_{ps}} \dot{\varepsilon}_{ps} = a^t - h(\dot{\Delta\lambda}) = 0 \quad (12)$$

ただし、

$$h = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_{ps}} \quad (13)$$

式(10)を式(11)に代入すると、

$$a^t R((\dot{\Delta\varepsilon}) - (\dot{\Delta\lambda})a) - h(\dot{\Delta\lambda}) = 0 \quad (14)$$

$$(\dot{\Delta\lambda}) = \frac{a^t R(\dot{\Delta\varepsilon})}{a^t R a + h} \quad (15)$$

また、(12)を(10)に代入すると、

$$\dot{\sigma} = R(\dot{\Delta\varepsilon}) - \frac{a^t R(\dot{\Delta\varepsilon})}{a^t R a + h} R a = \left\{ R - \frac{(R a)(R a)^t}{a^t R a + h} \right\} (\dot{\Delta\varepsilon}) \quad (16)$$

式(15)から、弾塑性マトリックスは、

$$C_{ep} = R - \frac{(R a)(R a)^t}{a^t R a + h} \quad (17)$$

ただし、

$$R = Q^{-1} C \quad (18)$$

$$Q = I + \Delta\lambda C a \frac{\partial a}{\partial \sigma} \quad (19)$$

なお、 $\Delta\lambda=0$ とすると、 $R=C$ となり通常の C_{ep} となる。

(2) ファイバーモデルの弾塑性マトリックス

次に、本理論のファイバーモデルの弾塑性マトリックスについて説明する。

多軸の偏差応力は、次式のようになる。

$$S = \{s_x, s_y, s_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\} \quad (20)$$

ここで、

$$\begin{aligned} s_x &= (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)/3 \\ s_y &= (-\sigma_x + 2\sigma_y - \sigma_z)/3 \\ s_z &= (-\sigma_x - \sigma_y + 2\sigma_z)/3 \end{aligned} \quad (21)$$

ファイバーモデルすなわち梁要素の場合は、

$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$ とおくことになり、偏差応力は、

$$S = \left\{ 2\sigma_x/3, -\sigma_x/3, -\sigma_x/3, \tau_{xy}, \tau_{xz}, 0 \right\} \quad (22)$$

これに対する相当応力 (Mises 応力) は、

$$\begin{aligned} \sigma_e(\sigma) &= \sqrt{\frac{3}{2}}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + \\ &2\tau_{yz}^2)^{1/2} = (\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (23)$$

また、降伏関数 (塑性ポテンシャル) は、次式のようになる。

$$f = \sigma_e(\sigma) - \sigma_0(\varepsilon_{ps}) \quad (24)$$

ただし、応力ベクトルは、

$$\sigma = \{\sigma, \tau_{xy}, \tau_{xz}\} \quad (25)$$

法線ベクトルは、

$$a = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma_e} \{\sigma_x, 3\tau_{xy}, 3\tau_{xz}\} \quad (26)$$

弾性の構成則をマトリックス表現すると次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & & \\ & \kappa G & \\ & & \kappa G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

この方程式の弾性定数が C である。

式(25)~(27)から、ファイバーモデルの弾塑性マトリックスとして、前述の式(17)の C_{ep} を求めることになる。

なお、本論文では、コンクリートが充填されていない鋼製橋脚を対象にしているため、式(23)に Mises 応力を用いたが、コンクリートが充填された鋼製橋脚の場合には、コンクリート部分を Drucker-Prager 等で評価すればよい。

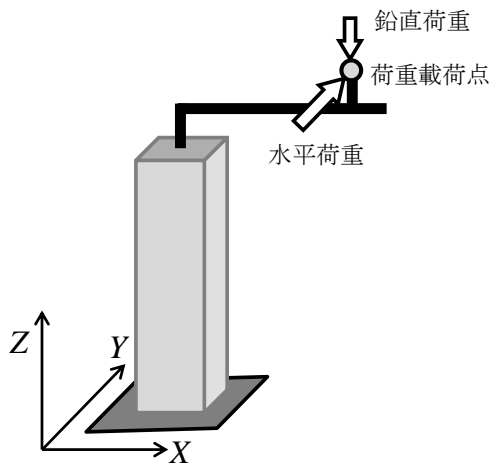


図-1 逆L形の柱と荷重条件

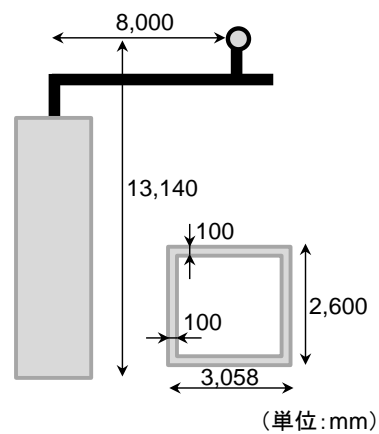


図-2 柱の寸法

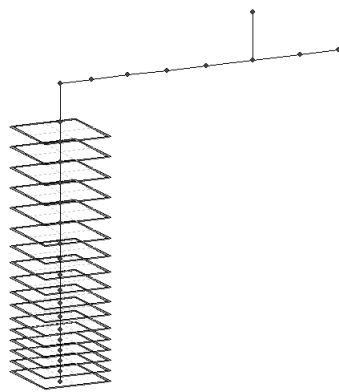


図-3 ファイバーモデル

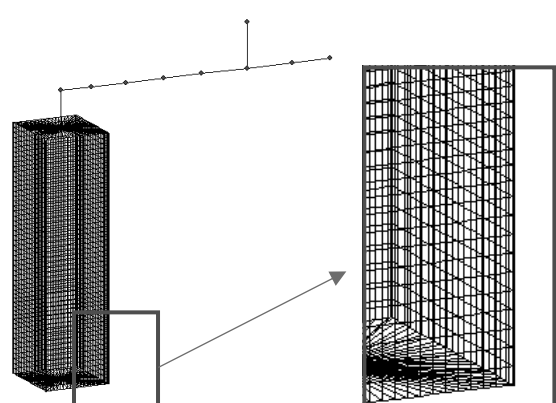


図-4 シェルモデル

3. 曲げとねじりせん断力を受ける柱の弾塑性挙動

(1) 解析対象および解析条件

ファイバーモデルにおいて、曲げによるせん断応力と（曲げせん断応力）と軸圧縮による直応力が連成する弾塑性挙動に対する研究は、文献 7)で示されているので、ここではねじりによるせん断応力（ねじりせん断応力）と曲げによる直応力の連成について、前述した式(23)の相当応力（Mises 応力）により評価できることを、簡単な柱を例にして確認する。

ここでの検討対象の逆L形の柱を図-1に示す。この柱の荷重載荷点に対して、鉛直荷重（Z 軸方向）を作用させた状態で、水平荷重（Y 方向）に荷重（強制変位）させて、柱に対して曲げねじり荷重を発生させる。柱の寸法を図-2に示す。この図の断面寸法からわかるように、曲げねじりにより局所的な変形が起きないように板厚を十分に厚くした矩形断面の逆L型の柱となっている。なお、標準的な鋼製橋脚の柱と異なり、無補剛断面でダイヤフラムや横リブは存在しない。

(2) 解析モデルおよび検討方法

図-1の柱に対して、ファイバー要素によるファイバーモデルおよびシェル要素によるシェルモデルをそれぞれ図-3、図-4に示す。梁部については、各モデルとも弾性梁要素でモデル化し、弾性梁要素の軸心から荷重載荷点までは剛体でモデル化した。

ファイバーモデルについては、直応力だけで降伏点の判定および降伏後の挙動を表現する通常ファイバーモデル（以下、「通常ファイバーモデル」）とせん断応力の連成を考慮したファイバーモデル（以下、「拡張版ファイバーモデル」）の2種類で比較検討する。また、その連成挙動が正確に表現できるシェルモデルとの比較も行う。なお、降伏後のひずみ硬化については、どのモデルも $E/100$ とした。

(3) 解析結果および考察

各モデルの解析結果の荷重-変位曲線を比較して図-5に示す。この図から、拡張版ファイバーモデルが、シェルモデルと非常に高い精度で一致しているのがわかる。一方、通常ファイバーモデルは、直ひずみだけの評価となり、ねじりによる塑性化が考慮できないため、どうしても荷重を高く評価して

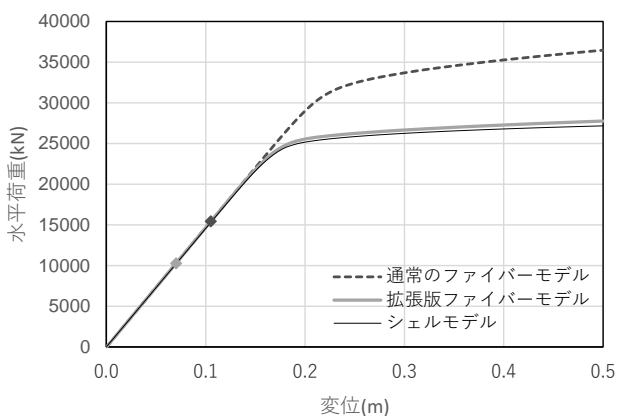


図-5 荷重-変位曲線

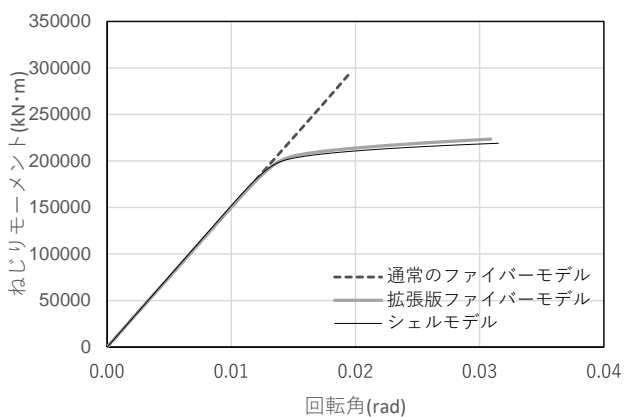
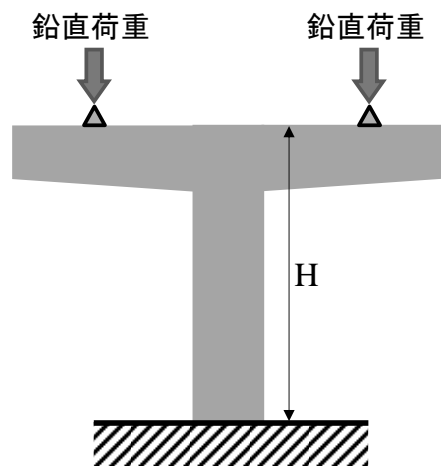


図-6 ねじりモーメントと回転角の関係

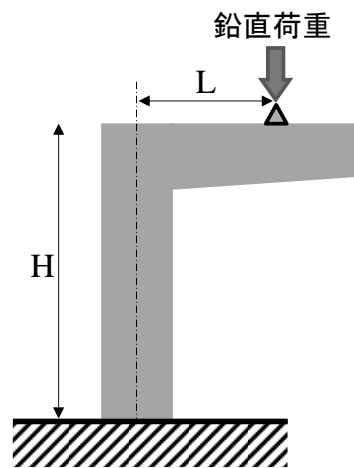
しまう。荷重だけでなく降伏点に着目して、通常のファイバーモデルと拡張版ファイバーモデルを比較すると、同図内の丸印で示しているように拡張版ファイバーモデルが *Mises* で評価しているため、当然ながら直応力だけで評価する通常のファイバーモデルより早い段階で降伏することになった。なお、この降伏は、柱断面内の全積分点において最初に降伏した時点とし、各モデルとも矩形断面の角部であった。

また、ねじりモーメントと回転角の関係のグラフを図-6に示す。この図から、通常のファイバーモデルがねじり剛性が完全に線形状態であるのに対して、拡張版ファイバーモデルは、シェルモデルと同様に降伏後ねじり剛性が低下している。なお、シェルモデルのねじりモーメントは、柱基部の断面中心に集約させた剛体要素に発生するねじりモーメントである。

以上から、拡張版ファイバーモデルを用いれば、図-1に示すような単純な逆L形柱の曲げねじり弾塑性挙動に対して、かなりの精度で評価できることが確認できた。



(a) T形橋脚



(b) 逆L形橋脚

図-7 検討対象の鋼製橋脚

表-1 検討対象の橋脚

橋脚名	脚形式	柱高さ H(m)	梁張り出し L(m)
T1	T形	13.14 (標準)	なし
T2	T形	7.76 (低い)	なし
L1	逆L形	13.14 (標準)	4.425 (小)
L2	逆L形	13.14 (標準)	8.0 (大)

4. 実務レベルの鋼製橋脚への適用

(1) 解析対象および解析条件

今後の実橋脚への適用を考えて、図-7に示すようにコンクリートが充填されていない2種類の形式(T形橋脚と逆L形橋脚)の鋼製橋脚を解析対象として検討を行うことにする。また、各型式の橋脚に対して、柱高さHおよび梁の張り出しLを変化させた(表-1参照)。なお、本研究では逆L形橋脚を

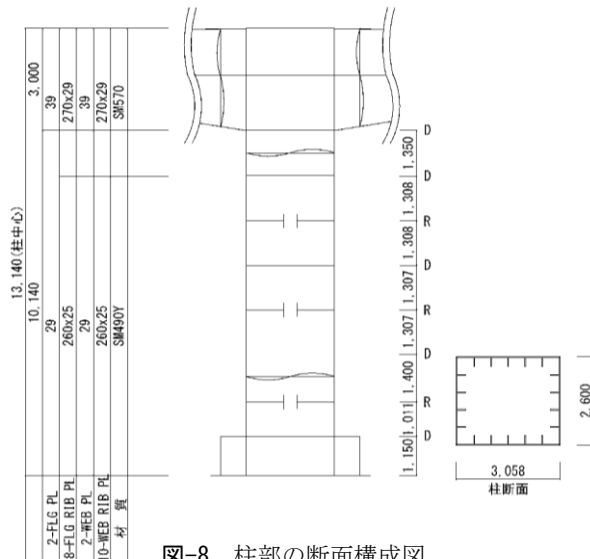
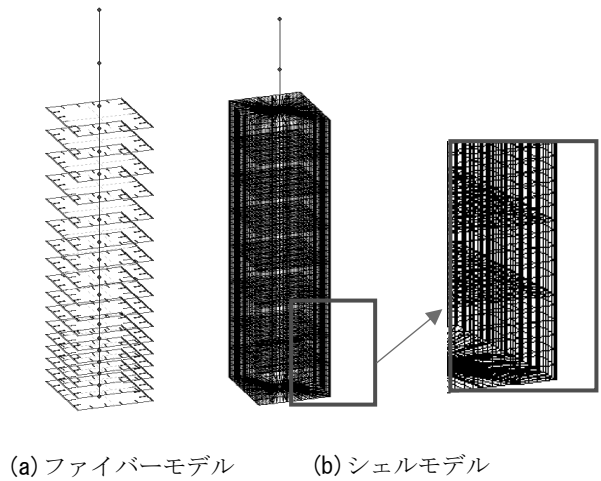
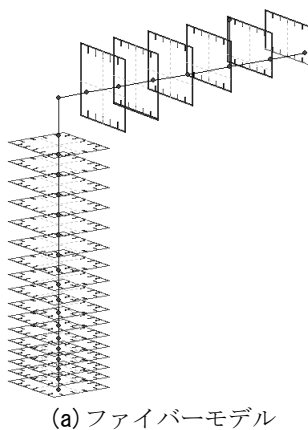


図-8 柱部の断面構成図

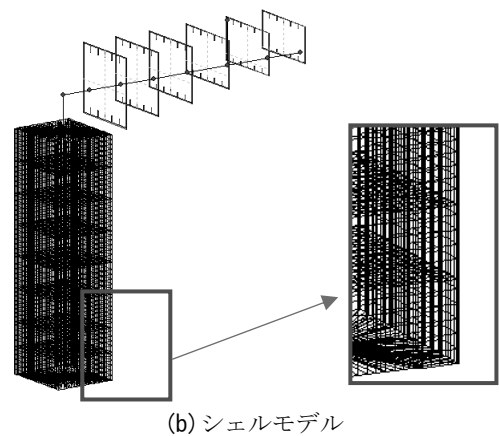


(a) ファイバーモデル (b) シェルモデル

図-9 T形橋脚のモデル



(a) ファイバーモデル



(b) シェルモデル

図-10 逆L形橋脚のモデル

中心に検討するが、ここでは簡単に T 形橋脚についても検討している。

本橋脚に対して、鉛直荷重（桁の死荷重）を作用させた状態で、橋軸方向に載荷する Pushover 解析を行う。なお、本検討では、T 形橋脚および逆 L 形橋脚の鉛直荷重（T 形橋脚の場合は左右の鉛直荷重の合計）は同じ値（軸力比：0.06）とした。また、柱部も同じ寸法（図-8 参照）とした。鉛直荷重が同じでも、T 形橋脚と逆 L 形橋脚の形式、柱高さ、張り出し長さによって柱の断面寸法が変わるが、ここでは比較検討のために同じ柱断面と仮定した。

(2) 解析モデルおよび検討方法

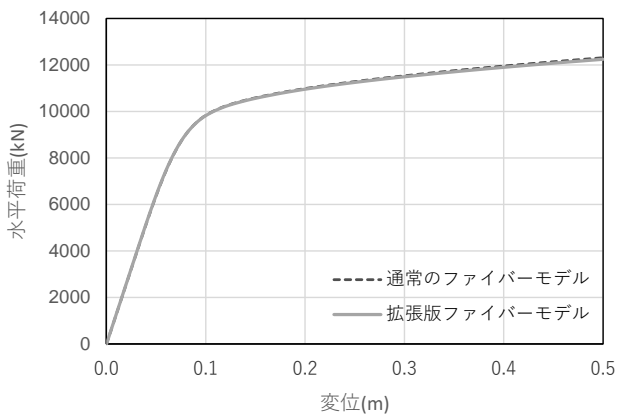
T形橋脚に対して、ファイバーモデルの解析モデルを図-9(a)に、シェルモデルの解析モデルを同図(b)にそれぞれ示す。シェルモデルは、局部座屈が表現できる程度に要素分割を行った。左右対称のT形橋脚に対して地震荷重（水平荷重）を橋軸方向に作用させるため、ここでは梁をモデル化せず、荷重作用点を柱天端とした。

また、逆 L 形橋脚に対しても、ファイバーモデルとシェルモデルでモデル化し、図-10 に示す。梁部は局部変形（局部座屈）が発生しないため、各モデルとも同じようにファイバーモデルでモデル化し、隅角部は剛体とした。

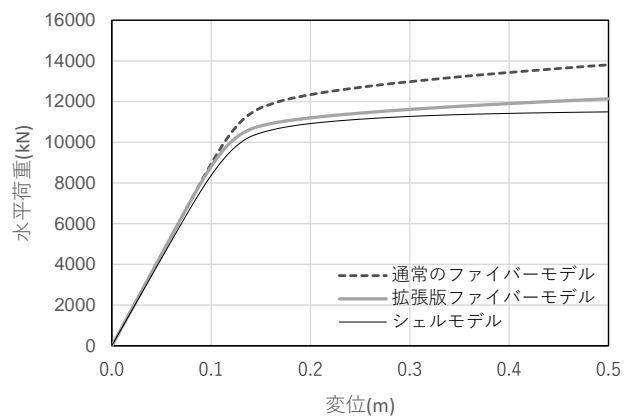
ファイバーモデルについては、ここでも連成が考慮できない通常のファイバーモデルと連成が考慮できる拡張版ファイバーモデルの2ケース、さらに連成が正確に評価できるシェルモデルとの比較検討を行う。

(3) 曲げせん断弾塑性挙動のT形橋脚の解析結果

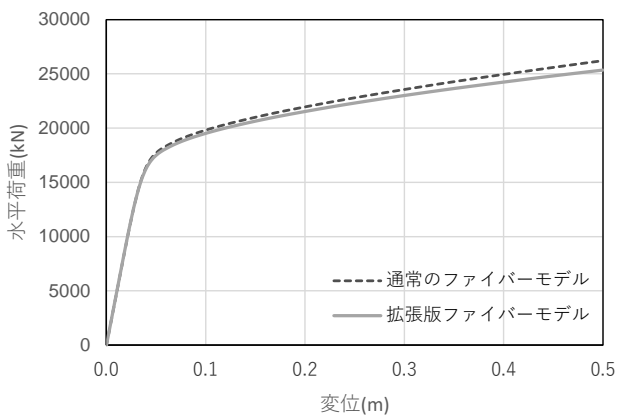
曲げとねじりの弾塑性挙動をする逆L形橋脚の検討の前に、曲げとせん断の弾塑性挙動を示す可能性があるT形橋脚については、死荷重（鉛直荷重）を作用した状態で水平荷重（強制変位）による Pushover解析を実施した。標準的な脚高さのT1の解析結果を図-11(a)に示す。この図から、通常のファイバーモデルと拡張版ファイバーモデルで差が全くなく、曲げとせん断の連成を考慮する必要がないと



(a) 橋脚名 : T1

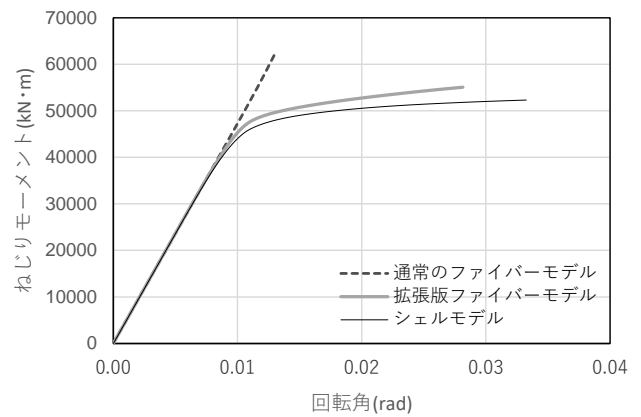


(a) 荷重-変位関係



(b) 橋脚名 : T2

図-11 荷重-変位関係



(b) ねじりモーメントと回転角の関係

図-12 逆L形橋脚 (L1) の解析結果

いえる。次に、柱高を低くしたT2の解析結果を同図(b)に示す。この図からは、変形が進むと両ファイバーモデルに差が表れ、僅かに曲げとせん断の連成の影響が出てくる結果となった。

これらから、標準的なT形橋脚の柱については、曲げとせん断の連成を考慮する必要はなく、これまで通り通常ファイバーモデルで十分であることが確認できた。ただし、曲げせん断の連成の影響が出るのは柱ではなく、ラーメン橋脚の梁部にその連成挙動で評価する必要が出てくる可能性はある。柱間隔が狭いラーメン橋脚の中梁に純せん断状態で塑性化することは、文献8)で示されている。

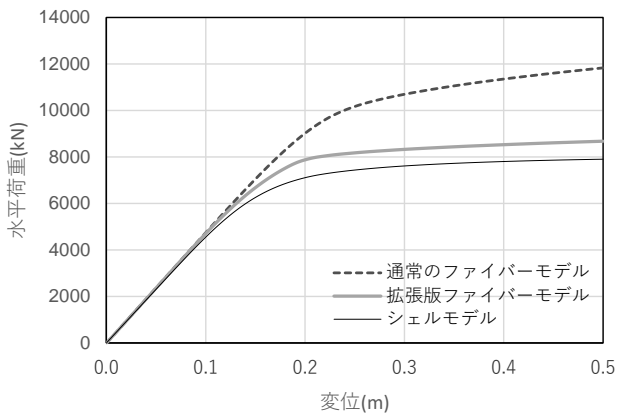
(4) 曲げねじり弾塑性挙動の逆L形橋脚の解析結果

張り出しが少ない逆L形橋脚 L1 の解析結果を図-12 に示す。荷重-変位曲線の同図(a)から、拡張版ファイバーモデルの結果はシェルモデルより多少荷重を高く評価するが、概ねシェルモデルと傾向は似ている。それに対して、通常ファイバーモデルの方は、降伏以降、荷重を高く評価してしまうことがわかる。

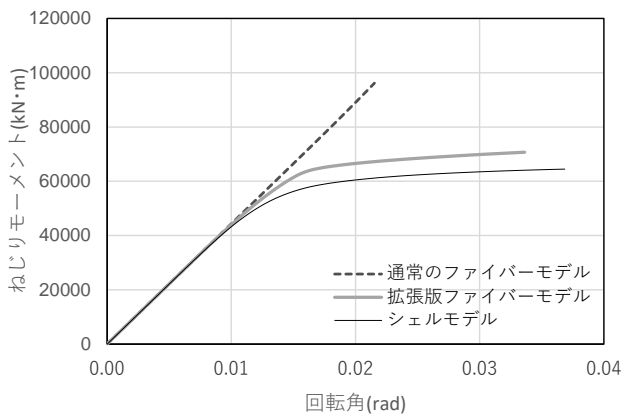
また、同図(b)のねじりモーメントと回転角の解析結果から、各モデルを比較すると、通常ファイバーモデルが線形挙動(ねじり剛性が一定)を示すのに対して、拡張版ファイバーとシェルモデルは、降伏後に、ねじり剛性が低下しているのがわかる。ただ、拡張版ファイバーモデルは、シェルモデルより多少ねじり剛性が高くなっている。

これらから、拡張版ファイバーモデルは、シェルモデルに比べれば、多少荷重を高く評価してしまうが、概ね曲げねじり弾塑性挙動が表現できているといえる。これに対して、通常ファイバーモデルでは荷重を高く評価してしまうため、最大耐荷力の評価(限界値の算定)においては、注意が必要である。

次に、張り出しの大きい逆L形橋脚 L2 の解析結果を図-13 に示す。この結果から、荷重-変位曲線およびねじりモーメントと回転角の関係において、前述した L1 の解析結果と同様な傾向を示すが、各モデルの差が拡大しているのがわかる。拡張版ファイバーモデルとシェルモデルを比較すると傾向は似ているが、前述した L1 の結果より差が拡大した。



(a) 荷重-変位関係



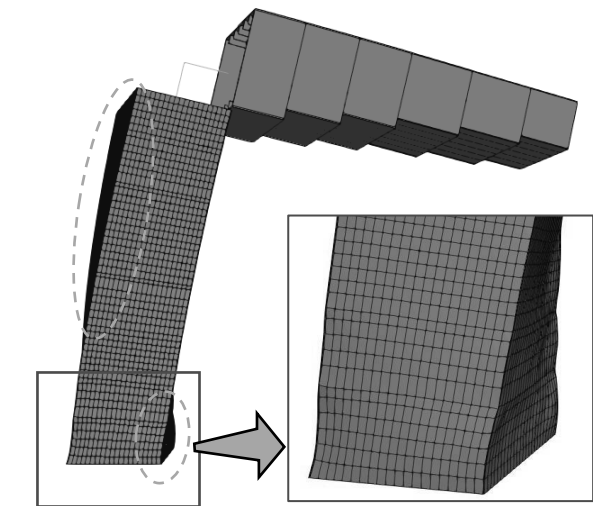
(b) ねじりモーメントと回転角の関係

図-13 逆L形橋脚 (L2) の解析結果

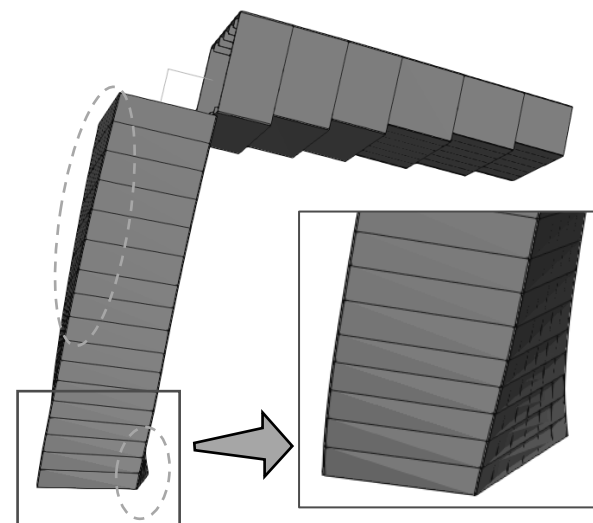
特に、拡張版ファイバーモデルの塑性挙動開始点（折れ曲がる点）が異なっている。このことから、張り出しが大きい逆L形橋脚においては、拡張版ファイバーモデルは、曲げねじり弾塑性挙動が十分な精度で評価できないことがわかった。しかし、通常ファイバーモデルよりは、かなり改善はしている。

(5) 拡張版ファイバーモデルの適用限界

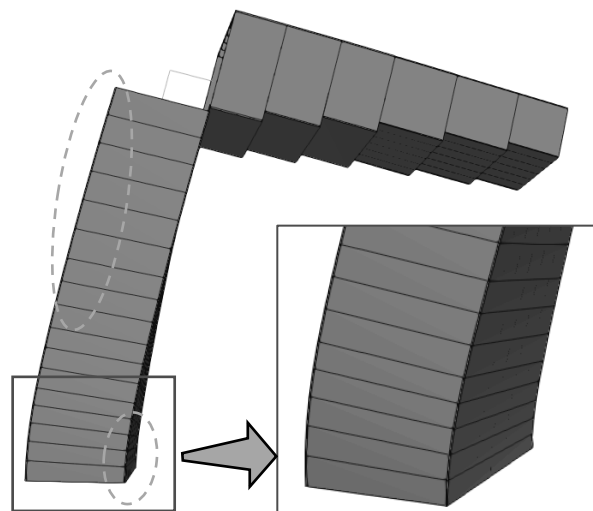
ここで、前述した張り出しが大きい逆L形橋脚 L2 において、拡張版ファイバーモデルとシェルモデルで解析結果の差が出た原因を考察する。载荷変位 0.5m のときの各モデルの変形状態を図-14 に示す。ファイバー要素でモデル化した張り出し部の梁については、同図のようにファイバー要素の断面情報をもとに外形を表示させた。なお、変形状態がわかるように、変形表示倍率を各モデルとも 10 倍している。まず、各モデルの橋脚全体の変形状態を比較すると、シェルモデルの同図 (a) と拡張版ファイバーモデルの同図 (b) は、同様に曲げねじり変形しているのがわかる。特に、図内の点線部分の変形状態が



(a) シェルモデル



(b) 拡張版ファイバーモデル



(c) 通常ファイバーモデル

図-14 各モデルの変形図 (変形表示倍率: 10 倍)

よく一致している。これに対して、通常のファイバーモデルの同図(c)は、他のモデルと異なり、図内の点線部分内の変形状態が異なり、橋脚全体が主にねじりより曲げで変形している。これからも、通常のファイバーモデルでは曲げねじり変形による弾塑性挙動が表現できていないことがわかる。

次に、柱基部を拡大した変形状態に着目すると、同図(a)のシェルモデルの柱基部付近においてダイヤフラム間で局部座屈が発生しているのがわかる。一方、拡張版ファイバーモデルおよび通常のファイバーモデルは梁要素(断面不変、断面保持の仮定)であり局部座屈が表現できないため、当然ながら局部座屈は発生していない。なお、ここでは省略したが、張り出しが短い逆L形橋脚L1においては、0.5m変形させた状態で、局部座屈はL2に比べて小さかった。

以上から、拡張版ファイバーモデルは、柱全体の变形挙動はシェルモデルと同様に表現できるが、柱基部に発生する局所的な変形(局部座屈)に対して、梁要素であるため表現できず、その差が前述した荷重-変位曲線(図-13)における荷重の多少の差として表れたと考えられる。また、前述した柱(図-1,2)は、実は逆L形橋脚L2と柱外形寸法、柱高さおよび張り出し長さが同じで柱の板厚が異なるだけであり、局部座屈が発生しない柱になっていた。前述した図-5,6で拡張版ファイバーモデルとシェルモデルがよい精度で一致していたことから、局部座屈が発生しなければ、拡張版ファイバーモデルは、シェルモデルと同じ解析結果となり、曲げねじりによる弾塑性挙動が正確に表現できるといえる。

5. まとめ

本研究では、逆L形橋脚に対して曲げねじり弾塑性挙動が表現できる拡張版ファイバーモデル、通常のファイバーモデルおよびシェルモデルによるPushover解析を実施することにより、逆L形橋脚への適用について検討した。本研究で得られた主な結論は以下のとおりである。

(1) 梁を前提として、曲げねじり弾塑性挙動が表現できる拡張版ファイバーモデルの理論(直応力とせん断応力の連成挙動)を提示した。

(2) 厚肉の比較的単純な逆L形柱について、拡張版ファイバーモデルは、シェルモデルとよい精度で一致して、曲げねじり弾塑性挙動が正確に評価できることを確認した。

(3) 橋脚の梁の張り出しが小さい逆L形橋脚については、多少荷重は高めに評価するが、概ねシェルモデルのPushover解析結果と傾向が一致する。しかし、梁の張り出しが大きい逆L形橋脚になると、局所的な変形(局部座屈)が進展してシェルモデルとの差が拡大した。

(4) 拡張版ファイバーモデルを用いれば、逆L形橋脚の曲げねじり弾塑性挙動が、概ね評価できることがわかった。本来は、シェルモデルで評価すべき曲げねじり弾塑性挙動に対しても、荷重を多少高めに評価する傾向を理解した上で拡張版ファイバーモデルの使用は、実務の耐震設計において有効であると思われる。

参考文献

- 1) 土木学会：鋼橋の耐震設計指針案と耐震設計のための新技術、鋼構造委員会・鋼構造新技術小委員会・耐震設計WG, 1996.
- 2) 土木学会：2008年制定 鋼・合成構造標準示方書〔耐震設計編〕, 丸善, 2008.
- 3) 土木学会：2018年制定 鋼・合成構造標準示方書〔耐震設計編〕, 丸善, 2018.
- 4) 株式会社地震工学研究開発センター：SeanFEM ver.1.22 理論マニュアルと検証, 2007.
- 5) M.A.Crisfield：Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Wiley & Sons Ltd, England, pp.152-200, 2003.
- 6) 久田俊明, 野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- 7) 奥村徹, 後藤芳顕：曲げとせん断の連成が弾塑性はり要素による耐震解析に与える影響, 土木学会第73回年次学術講演会講演概要集, I-390, 2018.
- 8) 森下宣明, 前野裕文, 岡本隆, 中村信秀, 青木徹彦, 宇佐美勉：鋼製箱型断面はりのせん断耐荷力実験, 第4回鋼構造物の非線形数値解析と耐震設計への応用に関する論文集, pp.171-176, 2002.