

地盤インピーダンスの周波数依存性が構造物の応答特性に 与える影響に関する検討

月岡 桂吾¹・室野 剛隆²

¹正会員 鉄道総合技術研究所 鉄道地震工学研究センター 地震応答制御研究室
(〒185-8540 東京都国分寺市光町2-8-38)

²正会員 博士（工学） 鉄道総合技術研究所 鉄道地震工学研究センター
(〒185-8540 東京都国分寺市光町2-8-38)

1. はじめに

地盤－構造物系の動的相互作用問題において、地盤のインピーダンスが周波数依存性を有することは周知の事実である。一方で、強震動下において、構造物が塑性化して非線形性を有する問題も存在する。したがって、地盤－構造物系の動的相互作用問題において、現象を精緻に評価するためには周波数依存性および非線形性の双方の現象を適切に考慮することが肝要となる。

これらの現象を解析的に取り扱うにあたり、有限要素法や境界要素法などの離散化解析手法では、地盤と構造物の挙動について同時に数値解析を行うので、自動的に考慮することができる。しかし、これらの方法は膨大な計算時間およびメモリ容量を必要とするだけでなく、結果の物理的な解釈が難しい場合がある。

一方、地盤－構造物系の動特性の基本的性質の把握という目的においては、地盤と基礎の動的相互作用をばねで置換したSRモデルなどが用いられることが多い。SRモデルを用いて地盤－構造物系の動的解析を行う場合、インピーダンスの周波数依存性を直接的に地盤ばねに与えることで、動的相互作用を周波数領域において適切に考慮することができるが、そのままでは時刻歴非線形解析を実施できない。したがって、SRモデルにおいて、インピーダンスの周波数依存性および構造物の非線形性を考慮するためには、周波数依存性を有するインピーダンスを時間領域に変換し、それを用いて時刻歴非線形解析を実施する必要がある。

周波数依存性を有するインピーダンスの時間領域への変換法に関して、近年では様々な事例が報告されている。例えば、中村の研究¹⁾では、インピーダンスをインパルス応答の同時成分と時間遅れ成分によって表現する方法を提案している。また、佐藤の研究²⁾では、インピーダンスを周波数に依存しない成分（以下、特異成分と呼ぶ）および周波数に依存する成分（以下、正則成分と呼ぶ）とに分離し、正則成分の実部と虚部が因果律を満たすヒルベルト変換対となる性質を利用することで、時間領域の運動方程式においてインピーダンスを畳み込み積分の形で表現している。

本研究では、式の取り扱いが容易である佐藤の方法を用い、下記2点を対象としてその適用性を拡張した。

まず、1点目は、時間刻みの影響である。佐藤の方法では、時間の離散化が計算精度に影響を及ぼすので、その対策としてインピーダンスの特異成分の取り方に工夫を要する事例が報告されている³⁾。そこで、本研究では、手法の定式化の際に現れる畳み込み積分を離散化することで、これを改善した。2点目は低振動数域における適用性である。佐藤の方法では、インピーダンス虚部が低振動数域において一定値をとるような場合はこれを適切に再現することが難しい。そこで、本研究では、低振動数域で一定値をとるようなインピーダンス虚部の表現方法を提案する。

最後に、インピーダンスの周波数依存性および構造物の非線形性を考慮した時刻歴非線形解析をSRモデルにおいて実施し、インピーダンスを定数とみな

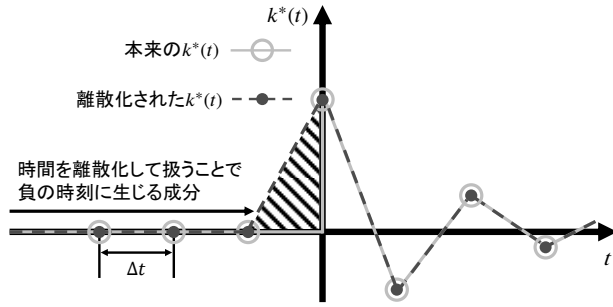


図 1 時間の離散化が与える影響

し、構造物の非線形性のみを考慮した場合（定数系）との解析結果と比較し、インピーダンスの周波数依存性を考慮することによる構造物の非線形応答特性の変化に関して検討を行う。

2. インピーダンスの周波数依存性を考慮した時刻歴非線形解析手法

本章では、始めに、1質点系の運動方程式を例として、佐藤の方法の概要および数値解析に展開する上での留意事項について説明する。その上で、本論文で提案する同手法のSRモデルでの表現を示す。

(1) 佐藤の方法²⁾によるインピーダンスの周波数依存性の時間領域表現

地盤－構造物系のインピーダンスは以下のように表せる。

$$K(\omega) = k(\omega) + i\omega c(\omega) \quad (1)$$

ここで、実部および虚部はそれぞれ、周波数依存性を有する。そこで、これらを式(2)のように周波数に依存しない特異成分 k^s および c^s と周波数に依存する正則成分 $k_\omega(\omega)$ および $c_\omega(\omega)$ とに分離する。

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k^s + k_\omega(\omega) \\ i\omega c(\omega) &= i\omega c^s + i\omega c_\omega(\omega) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、

$$k^s = k(\omega = 0) \quad (3)$$

となる。故に、

$$\begin{aligned} k_\omega(\omega) &= k(\omega) - k(\omega = 0) \\ i\omega c_\omega(\omega) &= H[k_\omega(\omega)] \end{aligned} \quad (4)$$

となる。式(4)において $H[\]$ はヒルベルト変換を表す。また、 $\omega c(\omega)$ から、式(4)より求まる $\omega c_\omega(\omega)$ を引いたものを、 ω の比例関数 ωc^s でフィッティングさせることで、 c^s を決定する。

以上で算出された k^s 、 c^s 、 $k_\omega(\omega)$ および $c_\omega(\omega)$ を用いると、インピーダンスの周波数依存性を考慮した時刻 t における1自由度系の運動方程式は式(5)のようになる。

$$m\ddot{x} + c^s\dot{x} + k^s x = -m\ddot{z} - \int_{-\infty}^{\infty} k^*(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (5)$$

ここで、 $k^*(t)$ は $k_\omega(\omega) + i\omega c_\omega(\omega)$ のフーリエ逆変換である。式(5)の右辺の畳み込み積分区間には、現時刻 t より未来の情報 $(t, \infty]$ に関する積分が含まれているため、そのまま積分することはできない。

しかし、積分区間 $(t, \infty]$ を考えた場合、 $x(\tau)$ は時刻 t より未来の状態に関する情報であり、 $k^*(t-\tau)$ は時刻0より過去の情報となる。今、 $k^*(t)$ は波動伝播に起因する関数と考えられるので、因果関数であると仮定する。すると、 $k^*(t)$ が $t < 0$ において恒等的にゼロとなるので、区間 $(t, \infty]$ においては、 $k^*(t-\tau)x(\tau) = 0$ となる。また、 $x(t)$ は区間 $(-\infty, 0]$ において恒等的にゼロとなる。したがって、式(5)の積分区間は $[0, t]$ となり、運動方程式は式(6)のようになる。

$$m\ddot{x} + c^s\dot{x} + k^s x = -m\ddot{z} - \int_0^t k^*(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (6)$$

(2) 時間刻みの影響

式(6)の運動方程式を数値計算によって解くためには、各時間刻み Δt に離散化して解くことになる。 $k^*(t)$ は因果関数であるから、図1の実線のように時刻 $t = 0$ において不連続性を有している。しかしながら、数値計算上では、図1のように離散化されるため、 $-\Delta t \leq t \leq 0$ において非ゼロな値が生じる（図1のハッチング部分）。したがって、同手法を数値解析に展開する際には、このハッチング部分への工夫が必要となる。

本研究では、式(6)の畳み込み積分を式(7)のような離散畳み込みに変換し、 $k^*(t = 0)$ に付随する成分を左辺へ移項する。これによって、 $k^*(t = 0)$ に付随する成分を畳み込みの項から取り除くことが可能となる。

$$\begin{aligned} m_0\ddot{x}_m + c^s\dot{x}_m + (k^s + k_0^*\Delta t)x_m &= -m_0\ddot{z}_m - \sum_{l=0}^{m-1} k_{m-l}^* x_l \Delta t \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、下付き添え字 $m(m = 0, \dots, N-1)$ はタイムステップを表し、 N は継続時間の分割数を表す。

(3) インピーダンスにおける非因果的成分のモデル化

2.(1)で説明したインピーダンスの表現方法では、インピーダンス虚部が低振動数域において一定の値（以下、非因果的成分と呼ぶ）をとる場合、これを適切に表現することができない。そこで、本研究で

表 1 地盤および杭の物性

地盤	せん断波速度(m/s)	150
	層厚(m)	20
	ポアソン比	0.3
	内部減衰	0.01
杭	杭径(m)	1.0
	杭間隔(m)	3.0
	杭長(m)	20.0
	内部減衰	0.00

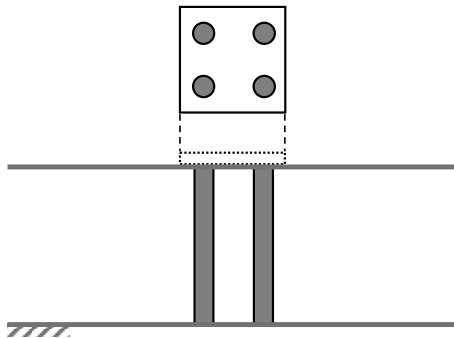


図 4 杭基礎の概要

デルを対象としてインピーダンスの周波数依存性と構造物の非線形性を考慮した時刻歴非線形解析を実施する。そして、構造物の非線形性のみを考慮した場合と解析結果の比較を行うことで、インピーダンスの周波数依存性を考慮することによる構造物の非線形応答特性の変化に関して検討する。

(1) 解析概要

a) 地盤に関する条件およびその特徴

図 4 のような、せん断波速度 $V_s = 150\text{m/s}$ 、層厚 20m の地盤中に構築された 2×2 の 4 本群杭を対象に、薄層要素法⁵⁾を用いてインピーダンスを算出した。解析に用いた地盤および杭の物性値表 1 に示す。ここで、杭は先端支持杭を想定し、杭頭はフーチングに剛結されている。

薄層要素法、提案手法および定数系のそれぞれで求めたインピーダンスを図 5 に示す。黒色の実線および点線は半解析解である薄層要素法によって算出されたインピーダンスを表す。インピーダンスの水平成分については、地盤の 1 次円固有振動数 ω_g ($\omega_g \approx 11.8$) の前後で特徴的な挙動を示している。まず、実部（剛性）は角振動数 $\omega = 0$ から単調に減少するが、 $\omega = \omega_g$ に達したところで増加に転じる傾向が見られる。また、虚部（減衰）は $0 \leq \omega \leq \omega_g$ においては小さな一定値を示すが、 $\omega = \omega_g$ に達したところで急激に増加する傾向が見られる。これは $0 \leq \omega \leq \omega_g$ においては内部減衰しか発揮されないが、 $\omega \geq \omega_g$ においては逸散減衰も発揮されるためである。

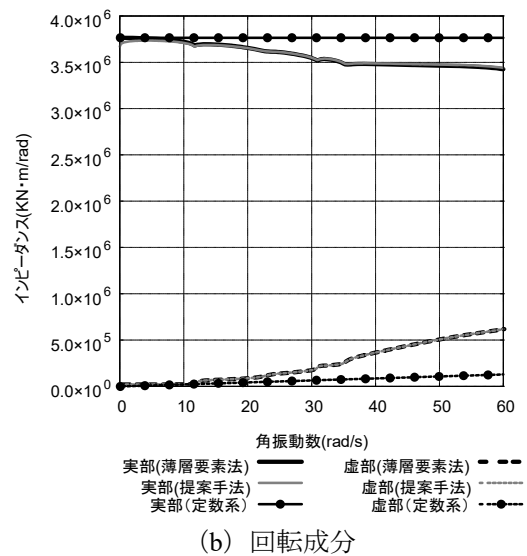
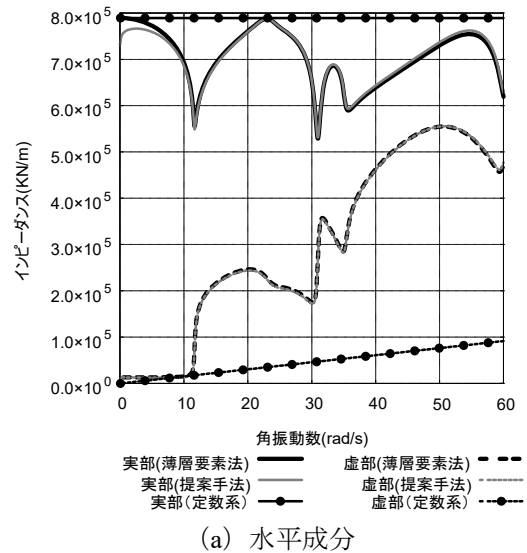


図 5 インピーダンス

また、インピーダンスの回転成分に関しても、程度は小さいが同様の傾向が見られる。

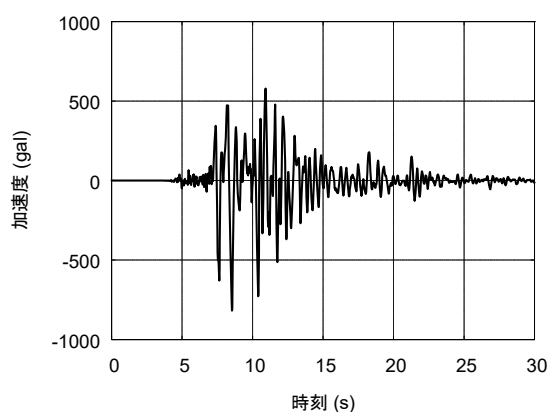
また、図 5 の灰色の実線および点線は前節で述べた方法によって表現されたインピーダンスを表すが、薄層要素法と比べて差異は極めて小さいと言える。さらに、点付きの黒色の実線および点線は定数系におけるインピーダンスを表す。本検討では、定数系におけるインピーダンスの与え方として、実部には $\omega = 0$ における値を、虚部にはある振動数内（本研究では 0rad/s から 60rad/s とする）の最小値を用いる方法を採用する⁶⁾。

b) 対象とする構造物

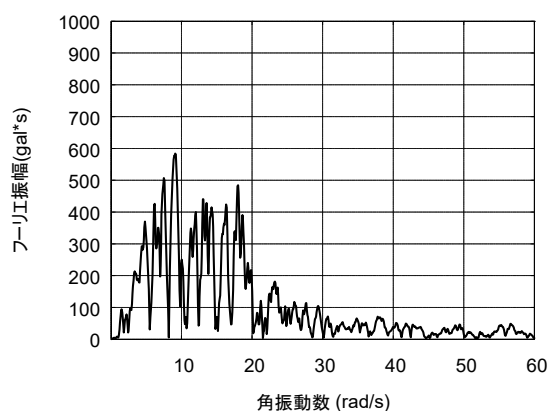
表 2 に示すような RC 単柱橋脚を対象とする。ここで、構造物の物性値を鉄道構造物等設計標準⁷⁾を参考に与えている (Case0)。このとき、構造物の非線形特性は Clough モデル⁸⁾とした。さらに、構造物の減衰係数は、基礎固定とした場合に初期剛性から算出される減衰比が 5% となるように算出した。

表 2 構造物の物性値

初期剛性(KN/m)	2.71×10^5
降伏変位(m)	1.73×10^{-2}
降伏後の剛性低下率 α	0.03
降伏後の剛性低下率 β	0.00
上部構造の質量(ton)	6.73×10^2 (case0) 3.50×10^2 (case1) 2.00×10^2 (case2)
フーチングの質量(ton)	3.67×10^2
フーチングの慣性モーメント(ton・m ²)	2.04×10^3
高さ(m)	8.5



(a) 時刻歴波形



(b) フーリエ振幅スペクトル

図 6 兵庫県南部地震 (KOB 波)

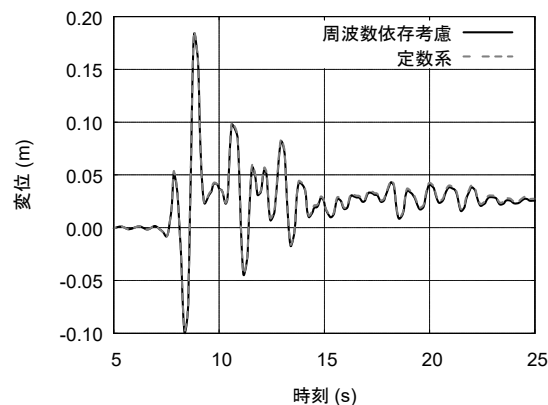
また、本研究では、様々な固有振動数の構造物を対象とした網羅的な検討を行うため、Case0に加えて上部構造の質量のみを変化させたCase1およびCase2の2通りの解析を実施する。

c) 入力地震動および時刻歴解析に関する条件

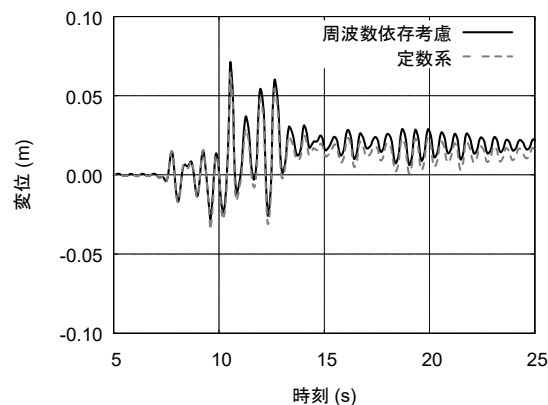
入力地震動として兵庫県南部地震の神戸海洋気象台で観測された記録 (JMA-KOBE波) を用いる。JMA-KOBE波の時刻歴波形およびフーリエ振幅スペクトルを図 6に示す。図 5に示すインピーダンスは、水平成分および回転成分ともに、地盤の1次円固有

表 3 各ケースにおける 1 次円固有振動数

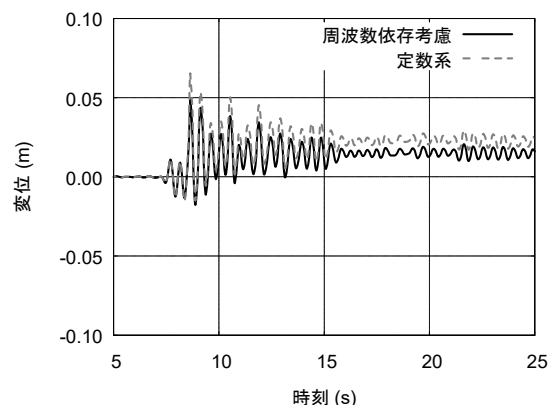
	1 次円固有振動数 ω_s (rad/s)
Case0	7.7
Case1	10.6
Case2	13.8



(a) Case0



(b) Case1



(c) Case2

図 7 上部工の相対水平変位

振動数 ω_g ($\omega_g \approx 11.8$) の前後で特徴的な挙動を示しているが、図 6からKOB波はこの前後の成分が卓越していることが分かる。また、時間刻みの大きさ Δt は $\Delta t = 0.02$ とし、時間方向の積分はニューマークの β 法 ($\beta = 1/4$) に基づいて行う。

(2) 解析結果

上部構造のフーチングに対する相対水平変位の並進成分を図 7 に示す。また、定数系の 1 次円固有振動数 ω_s の値をケースごとに表 3 に示す。以下では、各ケースを対象として、インピーダンスの周波数依存性を考慮した場合の最大変位 u_{mx}^ω と定数系での最大変位 u_{mx}^0 を比較する。

まず、Case0 の場合について考える。図 7(a) より、 $u_{mx}^\omega \simeq u_{mx}^0$ となることが確認できる。これは、Case0 において構造物の応答が卓越する周波数帯では、逸散減衰の発現前で減衰の大きさが同程度であり、周波数依存性による剛性低下の程度も比較的小さいためである。

次に、Case1 の場合について考える。図 7(b) より、 $u_{mx}^\omega \geq u_{mx}^0$ となることが確認できる。これは、Case1 において構造物の応答が卓越する周波数帯では、逸散減衰の発現前で減衰の大きさが同程度であるが、周波数依存性による剛性低下の程度が大きくなるためであると思われる。

最後に、Case2 の場合について考える。図 7(c) より、 $u_{mx}^\omega \leq u_{mx}^0$ となることが確認できる。これは、周波数依存性を考慮した場合の方が定数系に比べて、半解析解の薄層要素法に近いインピーダンスを解析モデルに対して与えているので、構造物の応答が卓越する周波数帯において発現している逸散減衰を、適切に反映できるためである。

4. おわりに

本稿では、SR モデルを対象として、インピーダンスの周波数依存性および構造物の非線形性を考慮した時刻歴非線形解析を提案した。本研究の要点を以下に示す。

- ① 既往の方法において、時間の離散化が計算精度に影響を及ぼす要因について言及したうえで、これを除去する方法を提案した。
- ② インピーダンス虚部が低振動数域において一定値をとるような問題に対して、非因果的成分を考慮することで適用性を担保するような方法を提案した。

- ③ 最後に、インピーダンス虚部が低振動数域において一定値をとるような問題を対象として、時刻歴非線形解析を実施し、定数系における解析結果と比較した。その結果、得られた知見を以下に示す。

- ・地盤－構造物系の 1 次固有振動数が地盤の 1 次固有振動数よりも小さい場合、インピーダンスの周波数依存性を考慮することで、加振周波数の増加に伴う剛性低下が大きくなり、定数系の場合と比較して構造物の最大変位が増加する。
- ・地盤－構造物系の 1 次固有振動数が地盤の 1 次固有振動数よりも大きい場合、インピーダンスの周波数依存性を考慮することで、逸散減衰の効果を適切に考慮でき、定数系の場合と比較して構造物の最大変位が小さく評価される。

今後の課題として、構造物の非線形性に加えて、地盤の非線形性も考慮した解析手法を確立することが挙げられる。

参考文献

- 1) 中村尚弘：振動数依存性を有する関数の時間領域変換法の適用性検討，竹中技術研究報告，No66，2010
- 2) 佐藤忠信：地盤と構造物の動的相互作用の解析法，土と基礎，40 巻，8 号，1992
- 3) 月岡桂吾，室野剛隆，佐藤忠信：インピーダンスが周波数依存性を有する系の運動方程式の解法に関する一検討，第 73 回土木学会年次学術講演会，2018（投稿中）。
- 4) Makris.N：Causal Hysteretic Element，J.ENG.Mech.，Vol.123，No11，ASCE，1997
- 5) H.Tajimi：A Contribution to Theoretical Prediction of Dynamic Stiffness Surface Foundation，Proc.of 7th WCEE，Vol.5，1980
- 6) 日本建築学会：入門・建物と地盤との動的相互作用，丸善出版，1996
- 7) 鉄道総合技術研究所：鉄道構造物等設計標準・同解説設計計算例 RC 橋脚（直接基礎）
- 8) Clough,R.W.，S.B.Johnston：Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements，Proc.of Japan Earthquake Engineering Symposium，1966