

材料劣化を考慮した繰り返し載荷下のゴム支承挙動の解析

小畑 誠¹・小岩 千紗²・後藤 芳顯³

¹フェロー会員 Ph.D. 名古屋工業大学教授 社会工学専攻（〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町）

²正会員 工修 長大 技術開発部（〒169-8555 東京都新宿区大久保3-4-1）

³フェロー会員 工博 名古屋工業大学プロジェクト教授 名古屋工業大学次世代耐震工学研究所

1. はじめに

橋梁の耐震設計においてゴム支承は重要な役割を果たしており，その変形特性および破壊特性を的確に評価することの必要性は大きい．通常のゴム支承は破壊にいたるまでに数 100%という巨大なせん断変形をすることが期待されること，および超弾性や粘性といったいくつかのゴム材料特有の材料特性を持つことから，その挙動の解析には必然的に大変形問題および複雑な応力ひずみ関係を考慮しなければならない．このためゴム支承の挙動の精度良い数値解析を目指す研究が多くなされてきている¹⁻³⁾．本研究ではこの中でも Mullins 効果⁴⁾に注目する．これは繰り返し載荷下において図 1 に示すように載荷時に比べて除荷時に応力が低下する現象であり，カーボン充填ゴム等においてはごく普通に観測されるものである．このため，超弾性挙動をするとされているゴム材料においても繰返し載荷下では無視できないエネルギーの散逸が生じることになる．Mullins 効果についてこれまでに導入されている定式化，例えば Ogden-Roxburgh⁴⁾などの方法では必ずしも実際の挙動をうまく再現できない場合がある．Nasdale⁵⁾らはこの点について別の状態変数を導入することによる解決案を提案しているが，本研究では変形にもとづくアプローチを試みる．

2. ゴム材料の応力ひずみ関係のモデル化

カーボン充填ゴム材料の応力ひずみ関係の特徴としてほぼ非圧縮性を示す超弾性，粘性および塑性などがあげられる．ここでは，まず粘性を含まない超

弾性および塑性モデルを構築する．図 2 に本論文で用いた基本的な構成モデルを示す．ブロック 1 およびブロック 2 のバネは超弾性を表し，ブロック 2 のスライダ部分は流れ理論にもとづく塑性挙動に対応する．さらにブロック 1 のバネは Mullins 効果を含むものとする．

ブロック 1 および 2 のバネの超弾性部分には次式のように一般化された Mooney-Rivlin 型のエネルギー密度関数を用いた．以下ではテンソルはデカルト座標系での成分で表示し，とくにことわりのない限り総和規約を用いる．

$$W = E_{iso} + U_{vol} \quad (1)$$

$$E_{iso} = \sum_{m+n=1}^3 A_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^m (\bar{I}_2 - 3)^n \quad (2)$$

$$U_{vol} = \sum_{m=1}^3 \frac{(J-1)^{2m}}{D_m} \quad (3)$$

ここに A_{ij} はテンソルではなく材料定数であり， J は変形勾配テンソル F_{ij} の第 3 不変量である．また

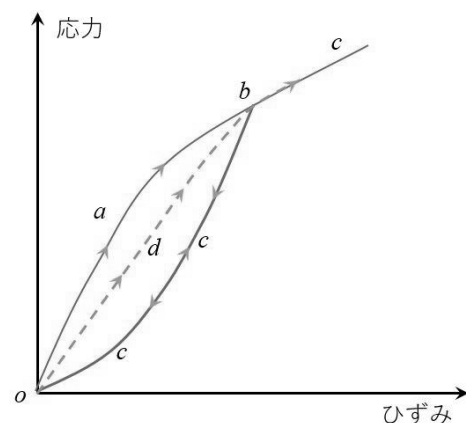


図 1 Mullins 効果

$\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ は変形勾配テンソルの非圧縮部分を用いて定義された Cauchy-Green テンソル $\bar{C}_{ij}$ の第1および第2不変量である．以上は次の式のようにまとめることができる．

$$J = \det F_{ij}, \quad \bar{F}_{ij} = J^{-(1/3)} F_{ij}, \quad \bar{C}_{ij} = \bar{F}_{ki} \bar{F}_{kj} \quad (2a-c)$$

次にブロック2の流れ塑性を表すスライダはミゼスの降伏条件で降伏し単純な等方および移動硬化特性を持つ．ブロック2全体の増分型応力ひずみ関係は弾塑性変形時には次のように表すことができる．

$$\nabla \sigma_{ij} = \mathcal{L}_{ijkl} D_{kl} \quad (3a)$$

$$\mathcal{L}_{ijkl} = L_{ijkl} - \left(L_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} L_{pqkl} \right) \quad (3b)$$

$$\left(h(\bar{\varepsilon}^p) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} L_{mnkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)$$

$$\mathcal{L}_{ijkl} = L_{ijkl} = F_{im} F_{jn} F_{kp} F_{ls} \frac{4\partial^2 W}{\partial C_{mn} \partial C_{ps}} \quad (3c)$$

ここに降伏関数 f は

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} (\dot{\sigma}_{ij} - \alpha_{ij}) (\dot{\sigma}_{ij} - \alpha_{ij})} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) \quad (4)$$

である．後背応力 α_{ij} の発展則には Ziegler のルールを用いる．加工硬化を表す $h(\bar{\varepsilon}^p)$ はスライダ部分の相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ の関数である．また式(3a)の左辺であるが，有限変形弾塑性解析では多くの場合 Jaumann 変化率が用いられている．しかし100%を超えるような純せん断変形をうける場合に不相当な挙動をすることが知られており，本研究で対象とする変形では問題となりうるのを避けるためは次式で定義される Kirchhoff 応力の Green-Naghdi 変化率を用いた．

$$\nabla \sigma_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \Omega_{kj} \quad (5)$$

$$\Omega_{ij} = W_{ij} - \frac{1}{2} R_{ik} (\dot{U}_{km} U_{mn}^{-1} - U_{km}^{-1} \dot{U}_{mn}) R_{jn} \quad (6)$$

W_{ij} はスピンテンソル， R_{ij} および U_{ij} はそれぞれ変形勾配テンソル F_{ij} を極分解したときの回転テンソルと右ストレッチテンソルである．

次にブロック1の超弾性バネに付随する特性として内部損傷による軟化の性質を考慮する．Mullins 効果と呼ばれるものはその代表であるが，図1にあ

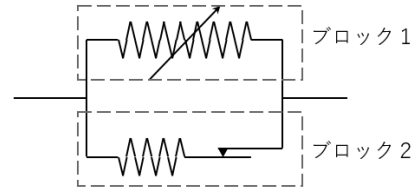


図2 ゴム材料の構成モデル

るように载荷時(oab)と除荷時(bco)で応力の経路が異なることに対応している．一軸载荷では再载荷時には除荷時とほぼ同じ経路(ocb)をとるとされており Ogden らもその結果に沿った定式化をしている．しかしながら，ひずみのやや小さい範囲では再载荷時の経路が odb になるような実験結果も報告されており⁶⁾，このような挙動に対する定式化も試みられている^{5,7)}．もっともこのような挙動自体は材料の粘性でも説明できなくはないが，比較的ひずみの小さい領域のみに見られることを考えると材料の損傷と考えることが合理的に思える．そこで本研究では後者のアプローチを採用する．なお，ポテンシャル関数にもとづくゴム材料の応力ひずみ関係には本来厳密な熱力学的な考察が必要であるが，以下の議論ではまずは現実的な応力ひずみ関係を再現するという目的のためいったん留保して議論を進める．

変形による材料の損傷を考慮した Mullins 効果を表すために Ogden の考え方を参考に S_{ij} を第二種の Piola-Kirchhoff 応力として，以下のような表現を用いた．

$$S_{ij} = 2\eta \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (7a)$$

$$\eta = \begin{cases} 1 - D_f \tanh(D_s (W_{\max} - W)) & W > W_{\max} \\ 1 & W \leq W_{\max} \end{cases} \quad (7b)$$

ここに D_f と D_s は材料劣化を表すパラメータであり， $W_{\max}$ は材料がそれまで経験した最大の内部エネルギーである．内部エネルギー W は式(1)にあるように変形の不変量のみ関数としていることから式(7)で表される Mullins 効果もまた等方的である．さらに η は内部エネルギーがそれまでの最大値を超えない限り減少しないことも考慮すると，再载荷時には ocb の経路をたどることになる．Mullins 効果の微視的な因果関係はまだ完全には理解されているわけではないが，変形による材料の微視的な内部損傷にあることにはほぼ異論がない．そうするとその効果が上記のように等方的であり異方性を持たないという

のは想定しがたい．そこで本研究では一般の流れ塑性理論における降伏曲面に類似する損傷曲面という概念を Cauchy-Green のテンソルを用いて以下のように導入する．

$$g(\bar{C}_{ij}, \beta_{ij}, R_{\max}) = \sqrt{(\bar{C}_{ij} - \beta_{ij})(\bar{C}_{ij} - \beta_{ij})} - R_{\max} = 0 \quad (8)$$

$R_{\max}$ は図 3(a)にあるように変形履歴における損傷曲面の半径の最大値である．いわゆる降伏曲面と異なり損傷曲面は初期状態では存在せず，変形とともに成長し移動することを想定し以下のように考える．

$$R_{\text{new}} = (1 - \alpha)R_{\text{cur}} + \alpha R_{\max} \quad (9a)$$

$$d\beta_{ij} = \alpha \frac{R_{\text{cur}} - R_{\max}}{R_{\text{cur}}} (\bar{C}_{ij} - \beta_{ij}) \quad (9b)$$

ここでは α は定数としている．一方向の変形では， $\alpha = 0$ で損傷曲面は原点に中心を保ったまま拡大し， $\alpha = 0.5$ で移動しつつ拡大する（図 3(b)）．式 (9a)では半径の縮小は考えない．以上のように 損傷曲面を定義したうえで式(7)を次のように修正する．

$$\eta = \begin{cases} 1 - f_c D_f \tanh(f_d D_s (E_{\max} - E)) & W < W_{\max} \\ 1 & W = W_{\max} \end{cases} \quad (10)$$

$$f_d = (1 + \cos 2\theta)/2, \quad f_c = 1 - (R_{\text{cur}}/R_{\max})^n \quad (11)$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{(\bar{C}_{ij} - \bar{C}_{ij}^{\text{mem}})(\bar{C}_{ij} - \beta_{ij})}{\|\bar{C}_{ij} - \bar{C}_{ij}^{\text{mem}}\| \|\bar{C}_{ij} - \beta_{ij}\|} \quad (12)$$

$\bar{C}_{ij}^{\text{mem}}$ の定義については図 3(a)に示す．この定式化からわかるように片方向の比例変形であればには通常の Mullins 効果と同じ挙動をすることになる．

3. 数値計算例

実際のゴム支承に対する適用例を示す．対象とする支承の諸元は図 4 に示す．ゴム材料は G10 相当であり，1 次および 2 次形状係数はそれぞれ 5.0, 6.5 である．2MPa の圧縮応力下で準静的に漸増変位繰返破断実験を行った結果を比較検討の対象とする．

有限要素法による数値計算は ABAQUS[®]に上記の応力ひずみ関係をユーザーサブルーチンの機能を用いて実装した．要素分割は図 5 に示すように支承と载荷の対称性を用いて半分のみとした．要素分割には鋼材に対しては 3 次元の連続体要素である C3D8 で，ほぼ非圧縮性を示すゴム材料に対しては連続体のハイブリッド要素である C3D8H を用いている．

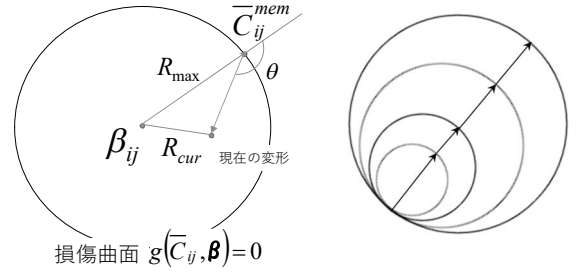


図 3 損傷曲面の性質

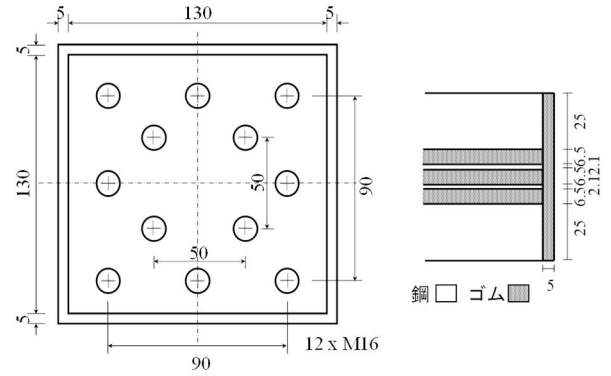


図 4 ゴム支承供試体

本研究で示した応力ひずみ関係ではブロック 1, 2 のゴム材料について 28 個，ブロック 1 の損傷について 3 個，およびブロック 2 のスライダの塑性を表す等方硬化および移動硬化の係数および加工硬化曲線を区分線形的に表すパラメータが必要である．また鋼材については弾性係数，降伏応力，加工硬化として等方硬化を想定して加工硬化を区分線形的に表すパラメータが必要となる．このように非常に多くの材料パラメータを設定しなければならないが，次の手順で試行錯誤により材料定数を決定した．まず損傷曲面の影響のない状態で，実験結果をよく再現するように試行錯誤により損傷以外のパラメータを決定した．このとき簡単化のためにブロック 1 および 2 のゴム材料のパラメータを同じものとして設定し，ブロック 2 のスライダ部分は加工硬化のない完全弾塑性とした．その結果を図 6 に示す．これはゴム部分の平均せん断応力と平均せん断ひずみを表したものであるが，決定すべきパラメータが非常に多いためひとつパターンの実験結果に限れば解析結果をそれに合わせることは可能である．実験に現れているひずみや荷重パターンの範囲内では適当と思われる材料パラメータは一組ではなかった．

図 6 に示すように解析結果の包絡線は実験値とよ

く一致しているが、Mullins 効果の再載荷経路の特性により各サイクルの荷重変位曲線の詳細の対応は必ずしも良くない。そこで図 6 に示した材料に対し損傷曲面を導入した結果を図 7 に示す。損傷曲面に関するパラメータは $\alpha = 0.2$, $n = 4$ であるがこれもまた試行錯誤的に決定したものである。損傷曲面の性質から包絡線にはほぼ影響がないまま各サイクル毎の荷重変位曲線の挙動は実験結果により近いものが得られている。計算の収束性については損傷曲面を含む計算がやや悪かった。このような荷重変位曲線の相違は 1 サイクル毎のエネルギーの散逸の見積りに影響するので耐震性能を考慮するには注意しなければならない。なお、すでに述べたようにこのような挙動は材料のひずみ速度依存性によっても再現できることが知られているが、対象とする実験は準静的な載荷実験であることから当てはまらないものとする。

4. おわりに

本研究ではゴム材料の繰返し載荷時に特徴的な Mullins 効果について、実験結果の観察から妥当と思われる修正について考察した。Mullins 効果が内部損傷という不可逆過程を含むものであればやはり巨視的にはなんらかの異方性を持たせるのが妥当と思われる。本論文の計算例でもその有効性を一部を示すことができた。ただ、応力ひずみ関係の熱力学的な整合性については今後の課題としたい。

参考文献

- 1) 松田泰治, 大塚久哲, 中島崇之, FEMを用いた積層ゴム支承の局部せん断ひずみ評価に関する研究, 構造工学論文集, 48A, pp.833-842, 2002.
- 2) 五十嵐晃, 党紀, 村越雄太, 伊東俊彦, 免振ゴム支承の水平2方向復元力特性に関する載荷実験および復元力モデルの比較検討, 土木学会論文集A1, pp.311-325, 2013
- 3) 吉田純司, 杉山俊幸, エネルギー吸収性能のひずみ依存性を考慮したゴムの超弾性-粘弾塑性ダメージモデル, 土木学会論文集A2, Vol.71, pp.14-33, 2015
- 4) Ogden, R. W., Roxburgh, D. G., 1999. A pseudoelastic model for the mullins effect in filled rubber. Proceedings of the Royal Society of London., A455, 2861 – 2877, (1988).
- 5) Nasdala, L., Kaliske, M., Rothert, H., Becker, A. A realistic elastic damage model for rubber, Constitutive models for rubber, pp. 151-158
- 6) Diani, J., Fayolle, B., Gilormini, P., A review on the Mullins

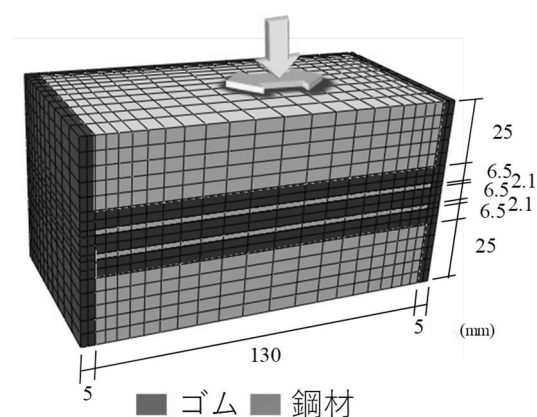


図 5 解析対象と要素分割

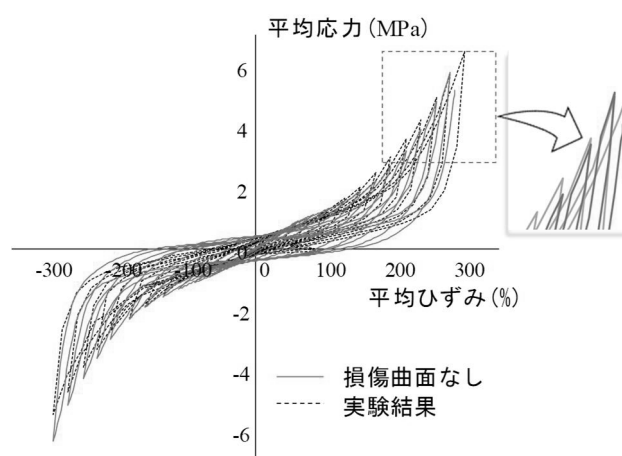


図 6 解析結果 (損傷曲面なし)

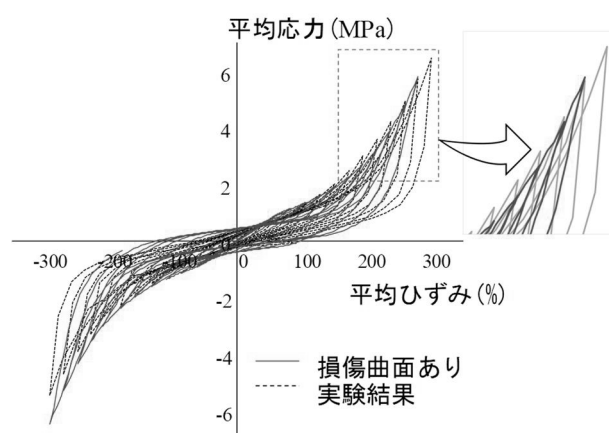


図 7 解析結果 (損傷曲面あり)

- effect, European Polymer Journal, pp.601-612 (2009).
- 7) Miehe C., Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials. Eur J. Mech A/Solids, 14:697-720, (1995).
 - 8) Dassault Systems, ABAQUS Ver. 6.14-6, (2016).

謝辞：本研究の一部は基盤研究(A)16H02359 の援助を受けました。