

振動特性の異なる構造を連結させることによる 応答改善効果の不規則振動論的評価

日高 拳¹・高橋良和²・澤田純男³

¹学生会員 京都大学大学院工学研究科（〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄）

²正会員 博(工) 京都大学准教授 防災研究所（〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄）

³正会員 博(工) 京都大学教授 防災研究所（〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄）

1. はじめに

土木構造物の設計において考慮すべき荷重は、死荷重や活荷重に加えて、風荷重や地震荷重をも含むため、極めて不確実性が高い。今後さらに地震動の理解度が深まるにつれて、構造物に作用する地震動の予測精度は現状よりもよくなる可能性はあるとしても、構造物の挙動に比べ大きな不確実性を持っていると考えざるを得ない。これらを踏まえ、地震作用の不確実性を認識した上で、その特性が想定と異なったとしても構造が大きく機能を失うことに至らない構造を目指す、「鈍構造」の考え方が高橋¹⁾により提案されている。

構造設計では、設計地震動の特性を踏まえて構造物の特性が設定され安全性が照査される。しかし、実際に構造物に作用する地震動は、設計地震動とは異なるものとなることは自明である。高橋ら²⁾は、設計指標として構造物応答の変動係数を選択することで、構造設計による鈍構造実現の可能性について検討した。4つの桁を支える支承構造特性を様々に変化させ、3つの入力地震動による動的解析を行うケーススタディにおいて、橋脚せん断力の変動係数を算出すると、桁固有周期を全て同じとするよりも、異なる固有周期を有する桁を組み合わせた構造システムが、最も変動係数が小さくなることを報告した。しかしながら、得られた結果は入力地震動の特性に

大きく依存するため、結果の一般性を議論することはできず、あくまで一例を示しているにすぎない。

構造物の応答を定量的に評価する手法の一つとして、不規則振動論が用いられる。不規則振動論を用いた多自由度系構造物の応答評価として、Jennings and Newmark³⁾やHudson⁴⁾らが提唱している固有モードのRoot mean square response (RMS応答値)が広く用いられるが、モード間の位相差を考慮しておらず、真の応答とは一致しない。山田、竹宮^{5,6)}はモード間の位相差を考慮した厳密解を導出し、系の固有振動数が十分離れている場合には、モード間の相互効果は非常に小さくなり、真値とRMS値がほぼ一致するものの、モードが近接する場合には、高次にわたる固有モードを考慮する必要があるとともに、それらのもつ相互作用が重要となることを示した。

本研究の目的は、構造特性をあえて不均質にすることにより、その応答の変動を小さくできるか、不規則振動論に基づき定量的に評価することである。

2. 応答改善効果

一般に地震工学において、応答改善効果は、「系全体の応答レベルが低下する」ことを指す。本研究では、入力の不確実性を踏まえ、「入力地震動の卓越振動数が変化しても、応答の特性の変動が小さいこと」も、応答改善効果の一つとして考える。

3. 振動特性の異なる構造の連結システム

先に示した応答改善効果は、減衰を大きくすることで当然実現できるものではある。しかし、ここでは減衰特性としては小さな値を用いながら、質量（あるいは剛性）を変化させた、異なる振動特性を有する構造を連結させることで、応答改善効果を発揮できるか検討する。

本研究では橋梁を想定した図-1 のような n 自由度モデルを用いる。地盤条件が均質で、交差条件に特に制約がない場合、通常の設計では、等スパンの桁を同じ橋脚で支持させることが多い。このような橋梁をモデル化し、桁は一樣な分布質量を有する剛梁とし、本来連続した桁橋の一部を取り出した影響を考慮するために、端部には集中質量を設定している。ここで、自由度によらず、桁と端部の集中質量を合わせた系全体の質量は $M=3m$ としている。 $\rho(x)=m/l$ とし、 $m=1$ とした。また、橋脚の剛性は全て k である。このとき、本構造モデル(n 自由度)における質量行列 $[M](n \times n)$ と剛性行列 $[K](n \times n)$ は、以下のように表せる。

$$[M] = \frac{m}{2n} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k \end{bmatrix} \quad (2)$$

また減衰型には、レイリー減衰を使用し、一次及び二次の減衰定数(h_1, h_2)を 0.01 とした。

本研究では、桁をつなぐヒンジ部に様々な集中質量を与えることにより、振動特性を変化させる。

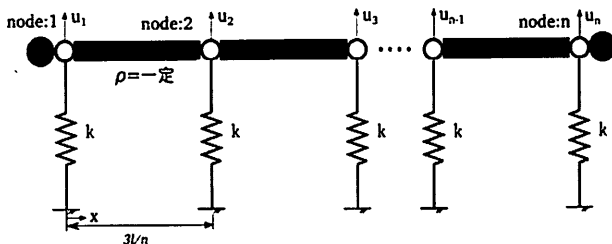


図-1 構造モデル(n 自由度)

4. 不規則振動論による応答解析と 応答改善効果の指標

本研究では入力および応答に、より一般性をもたせるために不規則振動論による検討を行う。 n 自由度系の運動方程式は、質量行列 $[M]$ 、剛性行列 $[K]$ 、粘性行列 $[C]$ 、変位ベクトル $\{u(t)\}$ 、単位ベクトル $\{I\}$ 、水平加速度 $\ddot{z}(t)$ を用いて、次式で表現される。

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = -[M]\{I\}\ddot{z}(t) \quad (3)$$

また、固有値解析により、 i 次の固有円振動数 ω_i および固有ベクトル ϕ_{ij} を求めることで、式(3)は以下のように n 個の独立な線形微分方程式に分解できる。

$$\ddot{x}_i(t) + 2h_i\omega_i\dot{x}_i(t) + \omega_i^2x_i(t) = -\gamma_i\ddot{z}(t) \quad (4)$$

ここで、 $x_i(t)$ はモード座標である。また、 γ_i は刺激係数であり次式で表わされる。

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}[M]\{I\} \quad (5)$$

そして不規則振動論により、定常確率過程における変位応答の自乗平均平方根(RMS応答値)は、以下のよう求められる⁹⁾。

$$u(t)_{RMS} = \sqrt{E[u_k^2(t)]} = \sqrt{\sum_j \sum_i \phi_{ij} \phi_{ji} \gamma_j \gamma_i \int_{-\infty}^{\infty} H_j(\omega) H_i^*(\omega) S_f(\omega) d\omega} \quad (6)$$

ここで、 $S_f(\omega)$ は入力のスペクトル密度関数である。また、 $H_j(\omega)$ はモード座標における周波数応答関数であり、以下で表される。

$$H_j(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 + i2h_j\omega\omega_j} \quad (7)$$

一般に、固有モードの十分な分散や、減衰が小さい場合などでは式(6)の $j=i$ の項(対角項)のみの計算で近似することができる⁵⁾⁶⁾。しかし、本研究ではあえて構造物の特性を不均質にすることにより、複数のモードが励起する。モデルによっては固有モードが近接する場合もあるため、モード間の連成の考慮が必要である。従って $j \neq i$ の項(非対角項)を含め、厳密解を用いて検討する。ここで、式(4)の積分は、留数定理を用いて展開した¹⁰⁾。

入力の特クトル密度関数として、入力特性(ω_f)の変化に対する応答の変動を検討するため、入力には以下で表現される、狭帯域入力特性をもつ金井・田治見スペクトルを用いる¹¹⁾。

$$S_f(\omega) = S_0 \frac{\omega_f^4 + 4h_f^2 \omega_f^2 \omega^2}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4h_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \quad (8)$$

この金井・田治見スペクトルは、地震に対して地盤が1自由度系のように振動すると想定したものである。つまり1自由度系に強度 S_0 のホワイトノイズを入力したときの加速度応答スペクトルを、入力の加速度スペクトルに置き換えている。このとき、 ω_f は狭帯域円振動数成分のピーク振動数、 h_f は狭帯域成分の幅を規定するパラメータであり、本研究では、 h_f は0.2とした。また図-1のように、入力の卓越振動数 ω_f を変化させた場合の各 ω_f における変位応答を求める。式(6)から明らかなように、変位応答は、 $H(\omega)$ と $S_f(\omega)$ の積分により求められるため、入力の大きさを等しくするよう、 ω_f によらず $S_f(\omega)$ の面積は一定としている。

対象とする本構造モデルは多質点であるため、系全体の応答を評価するため、以下に定義する各質点の応答の平均値を用いる。

$$u_{ave} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[u_k^2]} \quad (9)$$

設計では最大応答値を使用するため、以下、 ω_f を正規分布に従う確率変数とみなし、 $u_{ave}(\omega_f)$ が最大となる $\omega_f = \omega_{fmax}$ において、以下式(10)から式(12)で定義される最大変位応答の平均、分散、および変動係数を求める。ここで、 $f(\omega_f)$ は確率密度関数を表す。正規分布は均質モデルにおいて最大応答をとる ω_f に最も重みづけをし、その周辺でばらつくことを表現している。以上より、入力の不確定性を考慮した場合の最大応答の平均、分散、変動係数は式(10)~(12)で表され、これらを応答改善効果の指標とする。ここで正規分布の入力の標準偏差 σ_f は1.0とした。

$$\mu_{u_{max}} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{ave}(\omega_f) f(\omega_f) d\omega_f \quad (10)$$

$$\sigma_{u_{max}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{u_{ave}(\omega_f) - \mu_{u_{max}}\}^2 f(\omega_f) d\omega_f \quad (11)$$

$$\delta_{u_{max}} = \sigma_{u_{max}} / \mu_{u_{max}} \quad (12)$$

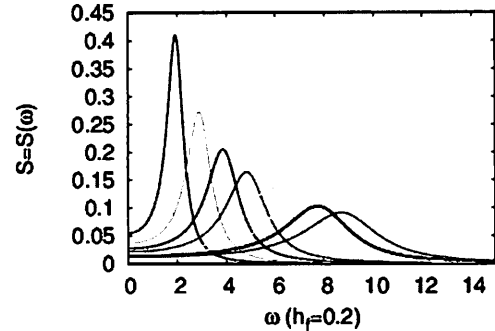


図-2 入力の特クトル密度関数

5. 3自由度モデル

(1) システムの特性の比較

振動特性が均質なモデルと不均質なモデルを比較する。例えば3自由度の場合、各質点に質量(m_1, m_2, m_3)を付加することで振動特性を変化させる。このとき、「付加質量の和が一定(等価1自由度系が等しい)」(3Bモデル)を振動特性の異なる構造を比較する際の制約条件とし、 $m_1=m_2=m_3$ とした均質モデル(3B-U)と、各質点の付加質量が異なる不均質モデル(3B-1, 3B-2, 3B-3)とを比較する。ここでは、自由度によらず、均質モデルの応答を等しくするために、剛性の合計は300で一定とし、3自由度では $k=100$ 、6章で述べる5自由度では、 $k=60$ とした。

表-1に選択した構造モデルのパラメータを示す。刺激係数に注目すると、均質モデル3B-Uは一次モードのみの励起であるが、不均質モデルは二次および三次モードの励起がみられる。また図-3には、以下で定義する各質点の周波数応答関数を平均した平均周波数応答関数を示す。

$$|H_{ave}(\omega)| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |H_{u_i}(\omega)| \quad (13)$$

ここで $H_{u_i}(\omega)$ は i 点における質点座標における周波数応答関数であり、以下で定義される。

$$H_{u_i} = \sum_j \phi_{ij} \gamma_{xj} H_j(\omega) \tag{14}$$

平均周波数応答関数 $|H_{ave}(\omega)|$ は、応答計算に使用するパラメータではないが、各質点の応答の平均値を表す概念図として使用する。図-3をみると、刺激係数に関して均質モデルは一次モードのみの励起しかみられない。しかし、不均質モデルは二次あるいは三次モードが励起することにより、それらのピークが生じているが、その分一次モードの寄与が小さくなり、そのピークが小さくなっていることがわかる。

（２） 応答の特性の比較

図-4 に平均応答値を、図-5 には ω_f が正規分布に従う確率変数とみなした場合の平均応答値の平均、標準偏差を、そして図-6 には平均応答値の変動係数を示す。

正規分布の場合では、モデル 3B-1 や 3B-2 のように均質モデルと比べ応答の平均レベルが低下している場合もあれば、モデル 3B-3 のように平均値が大きくなる場合もあることがわかる。また変動係数では、モデル 3B-1, 3B-2 は均質モデルより小さい。その理由は、高次モードの励起により、一次モードの寄与が低下し、さらに寄与の大きなモード同士が分散し、最大応答付近の幅が広がるためである。また、正規分布は狭い帯域での変動を比較しているためであり、結果として最大応答付近の変動係数が小さくなると考えられる。しかし、モデル 3B-3 のように、高次モードが離れすぎたためにその効果が

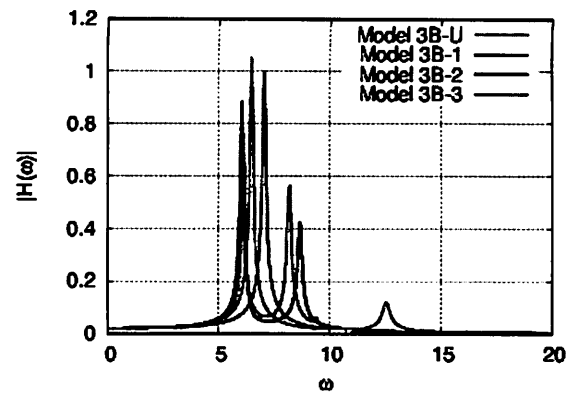


図-3 平均周波数応答関数（3自由度）

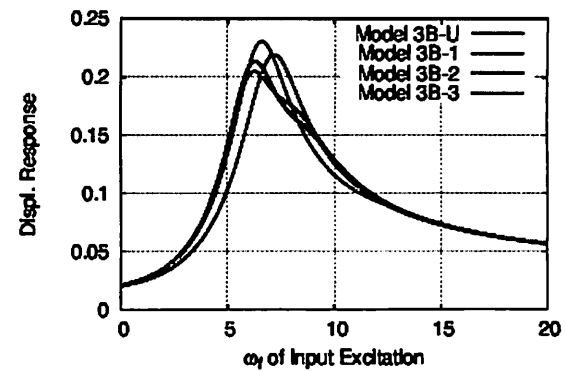


図-4 平均応答値（3自由度）

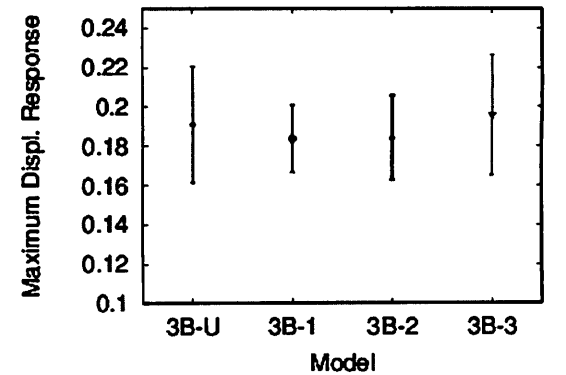


図-5 応答値の平均、標準偏差（3自由度）

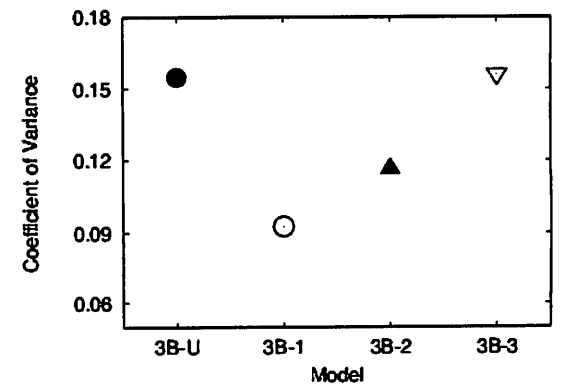


図-6 応答値の変動係数（3自由度）

表-1 3自由度構造モデルのパラメータ

Model		均質	不均質			
		3B-U	3B-1	3B-2	3B-3	
付加質量	m_1	6.00	3.2	3.2	9.0	
	m_2	6.00	3.6	11.6	0.0	
	m_3	6.00	11.2	3.2	9.0	
固有円振動数	ω_1	7.07	6.06	6.15	6.50	
	ω_2	7.39	8.21	8.55	6.54	
	ω_3	8.16	9.04	8.69	12.56	
刺激係数	γ_1	2.45	1.85	2.02	2.36	
	γ_2	0.00	1.60	0.00	0.00	
	γ_3	0.00	0.16	1.39	0.63	

ないことや、一次モードの寄与が十分低下していないために均質モデル同様、単一のピークとなるために、変動係数が小さくならないモデルもある。このように構造モデルを不均質にすることが、応答改善効果に必ずしもつながらないことがわかる。

今回は、均質モデル 3A-U が最大となる点を正規分布の平均 μ_{max} としたが、注目する ω_f によって当然結果は異なる。この部分については慎重な議論が必要であり、目的に応じて適切に選択することが必要であるといえる。

6. 5自由度モデル

(1) システムの特性の比較

3自由度の場合と同様、 $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5$ とした均質モデル(5B-U)と、各質点の付加質量が異なる不均質モデル(5B-1, 5B-2, 5B-3)を比較する。先に述べたように、各剛性 k は60としている。

表-2 に選択した構造モデルのパラメータを示す。5B-1, 5B-2 モデルは一次より二次モードが励起しやすい。このように、3自由度よりも、二次および三次モードといった高次モードが励起しやすくなることがわかる。また、図-7 には平均周波数応答関数を示す。3自由度と同様に、不均質にすることにより、高次モードを励起させ、一次モードの励起を下げるができることがわかる。刺激係数に関して、モデル 5B-1 や 5B-2 は、二次モードの方が励起しやすくなっていることがわかる

表-2 5自由度構造モデルのパラメータ					
Model		均質	不均質		
		5B-U	5B-1	5B-2	5B-3
付加質量	m_1	6.0	5.0	2.0	3.0
	m_2	6.0	4.0	4.0	7.0
	m_3	6.0	3.0	4.0	12.0
	m_4	6.0	5.0	4.0	4.0
	m_5	6.0	13.0	16.0	4.0
固有円振動数	ω_1	7.07	5.76	5.34	6.06
	ω_2	7.18	7.57	7.94	7.34
	ω_3	7.52	8.00	8.50	7.91
	ω_4	7.99	8.67	9.28	8.83
	ω_5	8.46	9.95	9.90	9.07
刺激係数	γ_1	2.45	1.50	1.56	1.68
	γ_2	0.00	1.57	1.80	1.01
	γ_3	0.00	1.06	0.13	1.31
	γ_4	0.00	0.34	0.04	0.61
	γ_5	0.00	0.15	0.22	0.20

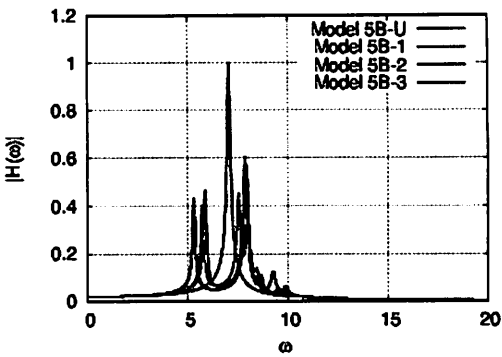


図-7 平均周波数応答関数（5自由度）

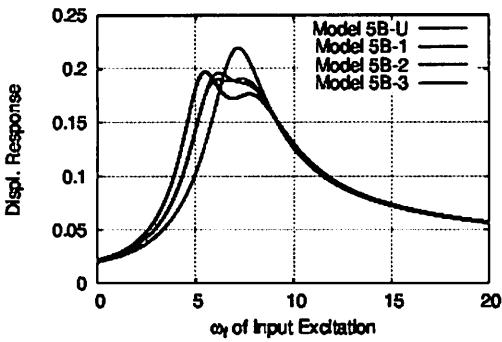


図-8 平均応答値（5自由度）

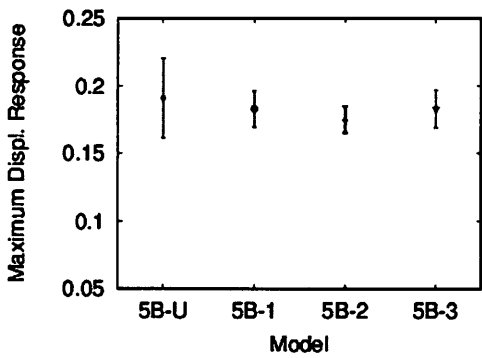


図-9 応答値の平均，標準偏差（5自由度）

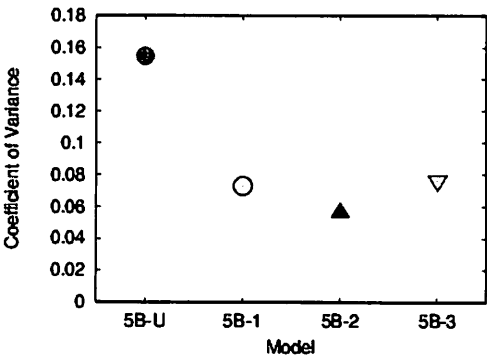


図-10 応答値の変動係数（5自由度）

(2) 応答の特性の比較

図-8 に各質点の RMS 応答の平均値を、図-9 には ω_f を正規分布とみなした場合の平均応答値の平均、標準偏差、そして図-10 には変動係数を示す。

図-10 の正規分布の場合の変動係数をみると、自由度を上げることで、高次モードがより励起しやすくなり、図-8 の不均質モデルのように、最大応答付近の幅が広がることで、3 自由度の場合よりも大きな応答改善効果が確認できる。

7. まとめ

本研究では、鈍構造を実現するためのひとつの方法と期待されている、振動特性を不均質にすることによる応答改善効果を理論的に検討するため、振動特性が異なる構造を連結させることによる応答改善効果について、不規則振動論に基づき解析的に評価した。以下に、本研究で得られた結果を要約する。

- 1) 応答改善効果として、「入力 of 卓越振動数が変動しても応答変動が小さくなること」を新たに提案した。
- 2) 比較する構造システムを選定する条件として、等価一自由度系が等しい構造システムを設定し、振動特性が均質なモデルおよび不均質なモデルを選定した。そして、狭帯域入力 of 卓越振動数成分を変化させることにより、振動特性の異なる構造が連結する多自由度系の応答改善効果を評価した。
- 3) 振動特性を不均質にすると、その系の全体の応答は小さくなる場合がある。
- 4) 振動特性を不均質にすることにより、本研究で新たに提案した、入力 of 特性の変化に対し、応答の特性の変化が小さくなる可能性を示した。
- 5) 自由度を上げることで高次モードが励起しやすくなり、より応答改善効果がみられる。

参考文献

- 1) 高橋良和:パラダイムシフトとしての鈍構造の提案と橋梁構造システムへの応用, 第14 回性能に基づく橋梁等の耐震設計に関するシンポジウム講演論文集, pp1-4, 2011.
- 2) 高橋良和, 山崎伸介:支承部特性を変化させることによる鈍構造実現に向けた基礎的検討, 第15 回性能に基づく橋梁等の耐震設計に関するシンポジウム講演論文集, pp283-286, 2012.
- 3) Jennings. R. L, Newark. N. M: Elastic Response of Multistorey Shear Beam Type Structures Subjected to Strong Ground Motion, Proc.of 2 WCEE Vol.2, pp.863-878, 1960.
- 4) Merchant.H.C, Hudson.D.E: Mode Superposition in Multi-degrees of Freedom Systems Using Earthquake Response Spectrum Data, Bulletin of the Seismological Society of America, vol.52 No.2, pp405-416, 1962.
- 5) Yoshikazu Yamada, Hirokazu Takemiya: Studies on the Responses of Multi-degrees of Freedom Systems Subjected to Random Excitation with Application to the Tower and Pier Systems of Long Span Suspension Bridges, Memoirs of Faculty of Eng., Kyoto Univ, pp371-396, 1968.
- 6) 山田善一, 竹宮宏和:不規則外力による多自由度系の応答解析とその長大つり橋タワー・ピア系の耐震解析への応用, 土木学会論文報告集, 第163号, pp17-27, 1969.
- 7) 小西一郎, 高岡宣善:構造動力学, 1973.
- 8) 星谷勝:確率論手法による構造解析, 鹿島出版会, 1974.
- 9) 星谷勝:確率論手法による振動解析, 鹿島出版会, 1974.
- 10) J.D.Robson: The Random Vibration Response of a System Having Many Degrees of Freedom, The Aeronautical Quarterly, pp21-30, 1966.
- 11) Kiyoshi Kanai: An Empirical Formula for the Spectrum of Strong Earthquake Motions, Earthquake Research Institute, Vol.39, pp85-95, 1961.