

修正 Menegotto-Pinto モデルの提案とその適用

堀淳一¹・川島一彦²

¹正会員 博(工) 日本学術振興会特別研究員, Postdoctoral Researcher

Pacific Earthquake Engineering Research Center, UC Berkeley (1301 South 46th St., Richmond, CA, 94804, USA)

²フェロー会員 工博 東京工業大学大学院教授 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

1. はじめに

RC 橋脚の地震応答を精度よく求めるためには、軸方向鉄筋の構成則を適切にモデル化することが重要である。1970 年代に Pinto を中心とする研究グループによって開発されたモデル¹⁾ (以下、MP モデルと呼ぶ) は、応力がひずみの関数として陽に与えられること、ひずみが反転した点から次に反転する点までをひとつの式で与えることができることから実用性に優れ、近年においても RC 構造物の地震応答解析によく用いられている。

一方で、部分的な除荷・再載荷を受けると、その直後に剛性が急に大きくなり、応力を過大評価する場合があることが指摘されている。そこで、本論文では、MP モデルにおいて部分除荷・再載荷を受けた後に剛性が急に大きくなり、応力が過大評価されるという問題点に着目し、この原因を明らかにするとともにこれを修正したモデルを開発したので、この結果を以下に示す。

2. MP モデルとその特性

図-1 に示すように、MP モデルは次式によって与えられる。

$$\tilde{\sigma} = R_s \tilde{\varepsilon} + \frac{(1-R_s)\tilde{\varepsilon}}{(1+\tilde{\varepsilon}^{R_b})^{1/R_b}} \quad (1)$$

ここで、

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \quad (2)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_s - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r} \quad (3)$$

$$R_s = \frac{E_{s2}}{E_s} \quad (4)$$

ここで、 R_s はひずみ硬化係数、 E_s は鉄筋の初期弾性係数、 E_{s2} は降伏後の弾性係数、 ε_r 、 σ_r はそれぞれ載荷

反転点のひずみと応力度である。 ε_0 、 σ_0 は、漸近線の交点であり、次式から求められる。

$$\sigma_0 = E_s(\varepsilon_0 - \varepsilon_r) + \sigma_r \quad (5)$$

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} \frac{\sigma_{sy} - \sigma_r + E_s(\varepsilon_r - R_b \varepsilon_{sy})}{E_s(1-R_b)} & \dot{\varepsilon}_s \geq 0 \\ \frac{-\sigma_{sy} - \sigma_r + E_s(\varepsilon_r + R_b \varepsilon_{sy})}{E_s(1-R_b)} & \dot{\varepsilon}_s < 0 \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\dot{\varepsilon}_s$ はひずみ増分、 ε_{sy} 、 σ_{sy} は、それぞれ鉄筋の降伏ひずみ、降伏強度である。 R_b は Bauschinger 効果を表すパラメータであり、次式で与えられる。

$$R_b = R_{b0} - \frac{a_1 \xi}{a_2 + \xi} \quad (7)$$

R_{b0} 、 a_1 、 a_2 は材料定数であり、 $R_{b0}=20$ 、 $a_1=18.5$ 、 $a_2=0.15$ とされる場合が多い。 ξ は 1 回前の載荷反転点 (ε'_r 、 σ'_r) から現在の載荷反転点 (ε_r 、 σ_r) までに生じた塑性ひずみ量を表す指標で、次式で与えられる。

$$\xi = \frac{|\varepsilon_0 - \varepsilon'_r|}{\varepsilon_{sy}} \quad (8)$$

上式において、弾性域から載荷して降伏した後に除荷する際には、 ε'_r を次式により与える。

$$\varepsilon'_r = \begin{cases} \varepsilon_{sy} & \dot{\varepsilon}_s \geq 0 \\ -\varepsilon_{sy} & \dot{\varepsilon}_s < 0 \end{cases} \quad (9)$$

式(7)において、 R_b は鉄筋の軟化の程度を表すパラメータであり、図-2 に示すように R_b を大きくするとシャープに 1 次剛性から 2 次剛性に移行し、バイリニア型に近い履歴となり、 R_b を小さくするとはっきりした剛性変化点を持たずにゆっくりと 1 次剛性から 2 次剛性に移行するようになる。また、式(2)の分母 $\varepsilon_0 - \varepsilon_r$ も R_b を変化したことと同様の効果を持ち、 $\varepsilon_0 - \varepsilon_r$ を小さくするとシャープに 1 次剛性から 2 次剛性に移行し、これを大きくすると 1 次剛性から 2 次剛性にゆっくり移行する。

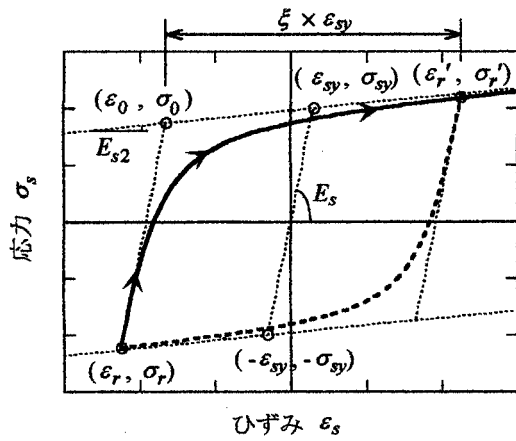


図-1 MPモデル

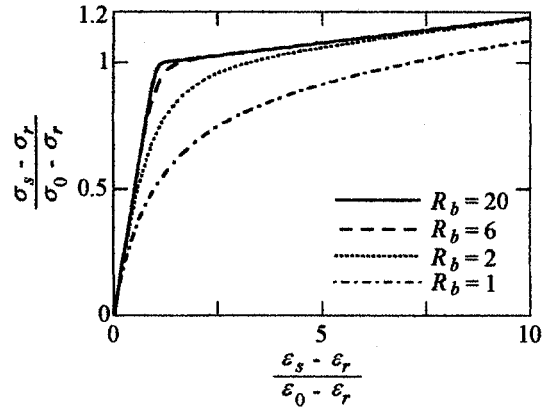


図-2 Bauschinger 効果を表すパラメータ R_b の影響

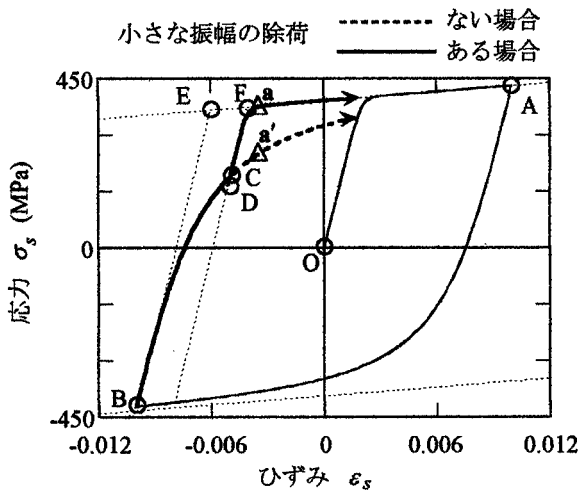


図-3 小さな振幅の除荷を受けた後の MP モデルの履歴特性

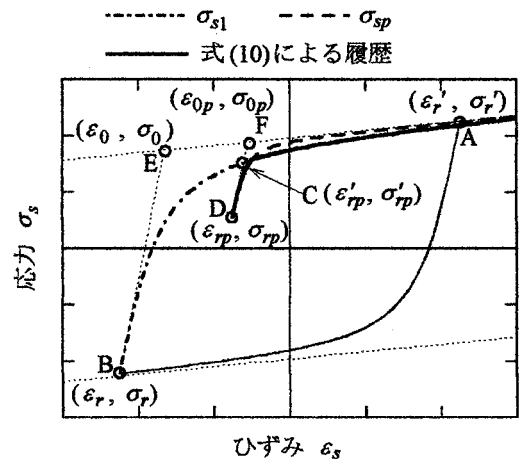


図-4 本修正モデルの履歴特性 ($\dot{\varepsilon}_s \geq 0$ の場合)

図-3 は、部分除荷した後に再載荷する履歴が MP モデルではどのように表されるかを示した結果である。ここでは、 E_s , σ_{sy} , ε_{sy} , R_s , R_{b0} , a_1 , a_2 をそれぞれ 200 GPa, 400 MPa, 0.002, 2%, 20, 18.5, 0.15 とした例を示している。図-3 では、点 O (0,0) から単調に引張ひずみを 0.01 (点 A) まで与えた後に、圧縮ひずみが -0.01 に達する段階 (点 B) まで除荷し、この後、さらに再除荷して、点 B からの載荷過程においてひずみが -0.005 に達した段階 (点 C) で降伏ひずみ (0.002) の 5% に相当する 0.0001 だけひずみが減少するように再び除荷し、点 D に至った段階で再載荷した場合の履歴を示している。また、比較のために、こうした部分除荷しない場合の履歴も図中に破線で示している。

鉄筋の力学的特性から考えると、点 B からの載荷過程において、上述した微小振幅による部分除荷や再載荷が履歴形状に大きな影響を及ぼすとは考えにくい。したがって、部分除荷・再載荷を受けても部分除荷しない場合とほとんど同じ履歴になるべきと考えられる。しかし、実際に MP モデルに基づいて履歴曲線を求めると、図-3 中の実線で示すように点 D から再載荷したあと、部分除

荷しない場合に比べて応力が不自然に大きくなり、シャープに 1 次剛性から 2 次剛性に移行する。例えば、部分除荷・再載荷後、ひずみが -0.0035 に達した段階では、部分除荷しない場合には応力が 249 MPa (図-3 中の点 a') であるのに対し、部分除荷した場合には 376 MPa (図中の点 a) と 51% も大きい

3. 修正 MP モデルの提案

こうした MP モデルの問題点を改良するために、本研究では、部分除荷の定義を明確に与えた上で、図-4 のように部分除荷・再載荷を受けた後も、部分除荷・再載荷を受けない場合と同じ履歴に従うというルールを加えることを提案する。すなわち、部分除荷後の応力 σ_s は、次式から求める。

・ $\dot{\varepsilon}_s \geq 0$ (引張載荷) の場合

$$\sigma_s = \begin{cases} \sigma_{s1} & \sigma_{s1} \leq \sigma_{sp} \\ \sigma_{sp} & \sigma_{s1} > \sigma_{sp} \end{cases} \quad (10)$$

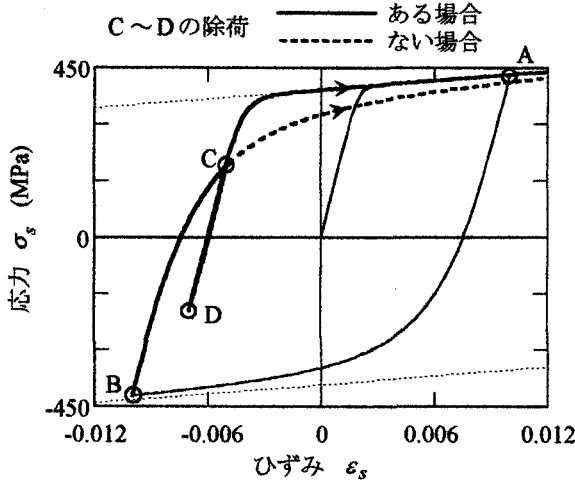


図-5 $\sigma_r < 0$ から引張りひずみを受ける場合の履歴

・ $\dot{\epsilon}_s < 0$ (圧縮荷重) の場合

$$\sigma_s = \begin{cases} \sigma_{s1} & \sigma_{s1} \geq \sigma_{sp} \\ \sigma_{sp} & \sigma_{s1} < \sigma_{sp} \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 σ_{s1} は、図-4 中の点 B からの荷重履歴上の応力であり、1 回前の荷重反転点 (ϵ'_r , σ'_r)、荷重反転点 (ϵ_r , σ_r)、漸近線の交点 (ϵ_0 , σ_0) としてそれぞれ点 A, B, E を与え、式(1)より求められる $\tilde{\sigma}$ を用いて、次式より σ_{s1} を求める。

$$\sigma_{s1} = \tilde{\sigma}(\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r \quad (12)$$

一方、 σ_{sp} は、次式から求める。

$$\sigma_{sp} = \tilde{\sigma}_p(\sigma_{0p} - \sigma_{rp}) + \sigma_{rp} \quad (13)$$

ここで、

$$\tilde{\sigma}_p = R_s \tilde{\epsilon}_p + \frac{(1 - R_s) \tilde{\epsilon}_p}{(1 + \tilde{\epsilon}_p R_{bp})^{1/R_{bp}}} \quad (14)$$

$$\tilde{\epsilon}_p = \frac{\epsilon_s - \epsilon_{rp}}{\epsilon_{0p} - \epsilon_{rp}} \quad (15)$$

ここで、(ϵ'_{rp} , σ'_{rp})、(ϵ_{rp} , σ_{rp})、(ϵ_{0p} , σ_{0p}) は、それぞれ部分除荷後の荷重履歴における 1 回前の荷重反転点 (図-4 中の点 C)、荷重反転点 (点 D)、漸近線の交点 (点 F) である。

ここで、部分除荷をどのように定義するかが重要である。これには、いろいろな条件を与えることが可能であるが、MP モデルがそのモデル化の容易さから幅広く使われていることから、モデルを複雑にすることは避けることを原則に、以下の条件を満たす場合を部分除荷と定義する。

$$\begin{cases} \sigma_r \geq 0 & \dot{\epsilon}_s \geq 0 \\ \sigma_r \leq 0 & \dot{\epsilon}_s < 0 \end{cases} \quad (16)$$

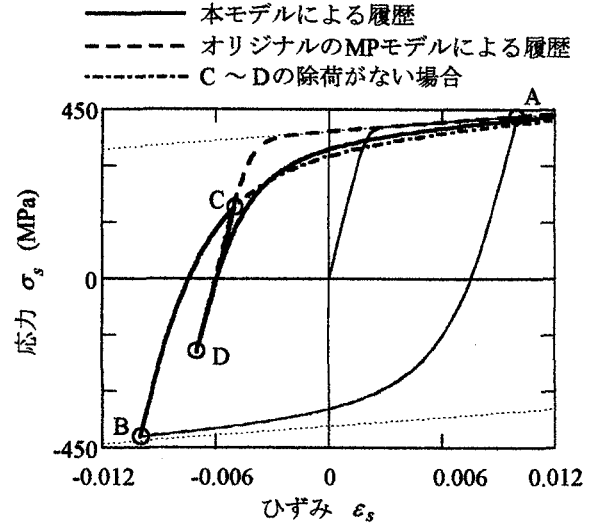


図-6 式(17)による ξ を用いて R_b を求めた場合の履歴

しかし、たとえ上述の修正を用いても、式(16)の条件を満たさない場合には、図-5 に示すようにオリジナルの MP モデルと同じ履歴となり、Bauschinger 効果をうまく表せない。これを修正するために、ここでは、式(2)の分母 $\epsilon_0 - \epsilon_r$ の与え方は変えずに、 R_b を求める際に与える ξ を式(8)のように 1 回前の荷重反転点のひずみ ϵ'_r をもとに求めるのではなく、次式のように経験最大 (最小) ひずみ ϵ_m に基づき与えることを提案する。

$$\xi = \frac{|\epsilon_0 - \epsilon_m|}{\epsilon_{sy}} \quad (17)$$

ここで、

$$\epsilon_m = \begin{cases} \epsilon_{max} & \dot{\epsilon}_s \geq 0 \\ \epsilon_{min} & \dot{\epsilon}_s < 0 \end{cases} \quad (18)$$

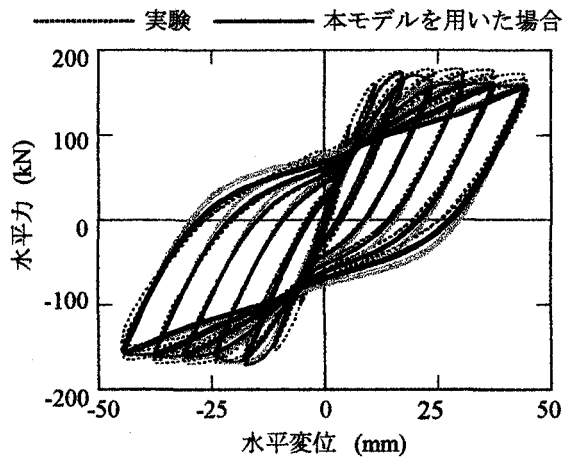
ここで、弾性域から荷重する場合には、 ϵ_m を以下のように与える。

$$\epsilon_m = \begin{cases} \epsilon_{sy} & \dot{\epsilon}_s \geq 0 \\ -\epsilon_{sy} & \dot{\epsilon}_s < 0 \end{cases} \quad (19)$$

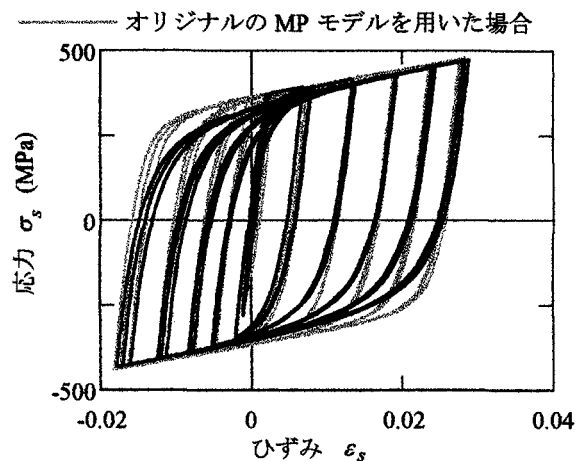
図-6 は、式(17)による ξ を用いて R_b を求めた場合に、図-5 に示した履歴がどのようなになるかを示した結果である。ここには比較のために、オリジナルの MP モデルによる履歴もあわせて示している。これによれば、 ξ を式(17)のように与えれば、除荷・再荷重後に点 B からの履歴曲線に戻らない場合にも、応力や剛性が急に大きくなることはなく、除荷・再荷重しない場合の履歴とほぼ同様の履歴を描くことができる。

4. ファイバー解析への適用

本修正モデルの有効性を示すために、断面が 400 mm × 400 mm、せん断支間比 3.75 の矩形 RC 供試体が、圧縮



(a) 水平力～水平変位の履歴



(b) 最外縁に配置した軸方向鉄筋の履歴

図-7 本修正モデルの有効性

軸力 3MPa の一定軸力下で正負くり返し载荷を受けた場合の実験結果²⁾をファイバー解析によりシミュレートすることとする。供試体のコンクリート強度は 22.9 MPa であり、軸方向鉄筋には降伏強度 374 MPa の D13 が用いられている。

この供試体の塑性ヒンジ区間（基部～200 mm）をファイバー要素によってモデル化した。コンクリートの応力～ひずみの履歴には、包絡線に Hoshikuma et al.による提案モデル³⁾、除荷・再载荷履歴に堺らによる提案モデル⁴⁾を用いた。軸方向鉄筋の応力～ひずみ関係には、上述の修正モデルのほか、比較のためにオリジナルの MP モデルも用いた。ひずみ硬化の影響を取り入れるために、鉄筋の降伏後の弾性係数は初期弾性係数の 2%とし、 R_{b0} 、 α_1 、 α_2 には、それぞれ 20、18.5、0.15 を与えた。

塑性ヒンジ区間以外の供試体の曲げ剛性には降伏剛性を用いた。

図-7 は、オリジナルの MP モデルを用いた場合と本修正モデルを用いた場合に、RC 供試体の水平力～水平変位および最外縁に配置した鉄筋の履歴曲線がどのように異なるかを示した結果である。これによれば、水平力～水平変位履歴の包絡線はいずれのモデルを用いた場合にも大差はないが、除荷・再载荷の履歴に着目すると、特に第 2、4 象限に相当する履歴において、本修正モデルを用いる方がオリジナルの MP モデルを用いるよりも、精度よく実験結果を再現できていることが分かる。これは、鉄筋の履歴曲線からも分かるように、オリジナルの MP モデルを用いた場合には、小さな除荷・再载荷によって鉄筋の剛性が急に大きくなって、鉄筋の履歴がバイリニア型に近くなるのに対し、本修正モデルを用いる場合にはそういったことが起きずに、Bauschinger 効果をよく再現できるためである。

5. 結論

- (1) MP モデルによる履歴は、Bauschinger 効果を表すパラメータ R_b を大きくしたり、また、式(2)の分母 $\varepsilon_0 - \varepsilon_r$ を小さくすると、シャープに 1 次剛性から 2 次剛性に移行する。このため、部分的な除荷・再载荷を与えると、 R_b が大きくなり $\varepsilon_0 - \varepsilon_r$ が小さくなるため、バイリニア型の履歴に近い履歴となる。この場合には Bauschinger 効果をうまく再現できない。
- (2) 部分除荷を式(16)のように定義し、この条件を満たす場合には、部分除荷・再载荷後の履歴を式(10)、(11)から求めること、また、 ξ を式(17)のように与えることを提案する。本修正モデルに基づく履歴では、部分的な除荷・再载荷後に応力や剛性が急に大きくなることはなくなり、Bauschinger 効果をよく表すことができる。

謝辞：(株) 長大の矢部正明、高橋雅裕の両氏に貴重なご意見を頂きました。ここに記して厚く御礼申し上げます。

参考文献

- 1) Menegotto, M. and Pinto, P. E.: Method of Analysis for Cyclically Loaded R.C. Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior of Elements under Combined Normal Force and Bending, *Proc. of IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads*, pp15-22, 1973.
- 2) 堺淳一、川島一彦：引張力を含む変動軸力が RC 橋脚の変形性能に及ぼす影響、構造工学論文集 Vol.48A, pp.735-746, 2002.
- 3) Hoshikuma, J., Kawashima, K., Nagaya, K. and Taylor, A. W.: Stress-Strain Model for Confined Reinforced Concrete in Bridge Piers, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 123, No. 5, pp. 624-633, 1997.
- 4) 堺淳一、川島一彦、庄司学：横拘束されたコンクリートの除荷および再载荷過程における応力度～ひずみ関係の定式化、土木学会論文集, No.654/I-52, pp. 297-316, 2000.
- 5) http://peer.berkeley.edu/~sakai/re_tit.html