

不規則振動論を用いた橋梁の応答予測法

横川 英彰¹・阿部 雅人²・吉田 純司³

¹ 正会員 工修 オイレス工業株式会社 免制震カンパニー 支承設計部 (〒105-8584 東京都港区芝大門 1-3-2)

² 正会員 Ph.D. 東京大学助教授 大学院工学系研究科 社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

³ 正会員 工博 日本学術振興会特別研究員 東京大学 大学院工学系研究科 社会基盤工学専攻 (同上)

1. はじめに

時刻歴応答解析の適用は、特に耐震設計の初期段階において、時間、コスト共に大きくなり不経済である。特に、概略設計中の部材のあたり計算など、軽微な設計を行うだけでも、時刻歴応答解析は相当な時間を要することがある。それらの問題から、各種の簡易解析手法が提案されてきた。過去の研究によると、宇佐美ら¹⁾や川島ら²⁾の研究では、プッシュオーバー解析の結果から等価一自由度系(ESDOF)を算出し、その結果に基づく時刻歴応答解析から、2自由度系の応答を求めている。また、旧建設省土木研究所の方法³⁾では、単橋脚の2自由度モデルについてモード解析を行い、モードベクトルに基づき応答を求めている。矢部ら⁴⁾の方法は等価線形化されたモデルを用いて、時刻歴応答解析を行い非線形系の応答を予測している。いずれの方法も2自由度系以上での拡張が困難であり、適用される橋梁が限られることが知られている。

一方、風外力などの応答予測^{6) 7)}や制震装置の最適化⁸⁾などで使われている不規則振動論⁹⁾では、多自由度系の応答を代数方程式の形で求めることができるので、多径間橋梁での適用が可能であると考えられる。また、部材の等価線形化をおこなえば、部材の減衰による低減を適切に評価することができるだけでなく、アクティブ、パッシブ制震構造等の設計や解析等にも適用可能となる。

本研究では、既往の不規則振動論を利用した研究を参考に、等価線形化された運動方程式に基づく不規則振動論を用い、減衰による振幅の低減を適切に評価可能である手法を構築する。

最初に不規則振動論を用いた応答の予測方法について説明する。次にバイリニアモデルと、最大点指向型バイリニアモデルの等価線形化手法を説明し、その手法の精度について検討する。最後に不規則振動論と非線形時刻歴応答解析を用いて、下部構造が塑性化する場合と、塑性化しない場合の応答解析を行い、前者と後者を比較し、予測精度について検討を行う。

2. 応答予測方法

不規則振動理論は、周波数分布が一様である白色雑音を入力と仮定し、応答を予測する理論である。地震などの予想が難しい外力による応答などを予測するには有効な方法であると考えられる。ここでは、応答を予測するまでの計算過程を示す。

式(1)に示す線形多自由度系の運動方程式を考える。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = [M]\{-1\}\ddot{a} \quad (1)$$

ここで、 $[M]$ は質量行列、 $[C]$ は減衰行列、 $[K]$ は剛性行列で、 $\{\ddot{x}\}$ は加速度ベクトル、 $\{\dot{x}\}$ は速度ベクトル、 $\{x\}$ は変位ベクトルである。式(1)の右辺にある $\{-1\}$ は-1を要素に持つベクトル、 $\ddot{a}$ は入力加速度である。また、速度ベクトル $\{\dot{x}\}$ 、変位ベクトル $\{x\}$ を以下のようにまとめたものを状態変数とする。

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式(1)を状態形式に書き換えると、式(3)のよう示される。

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + [B]\ddot{a} \quad (3)$$

ここに、行列 $[A]$ 、 $[B]$ を式(4a)、式(4b)に示す。

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (4a)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \{-1\} \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4b)$$

また、 $\{0\}$ は0を要素に持つベクトルである。

不規則振動論では、式(3)の入力に白色雑音を入力したと仮定し、そのときの応答を共分散行列 $[P]$ とする。共分散行列 $[P]$ は式(5)に示すように、式(2)を2乗した形の行列として示される。

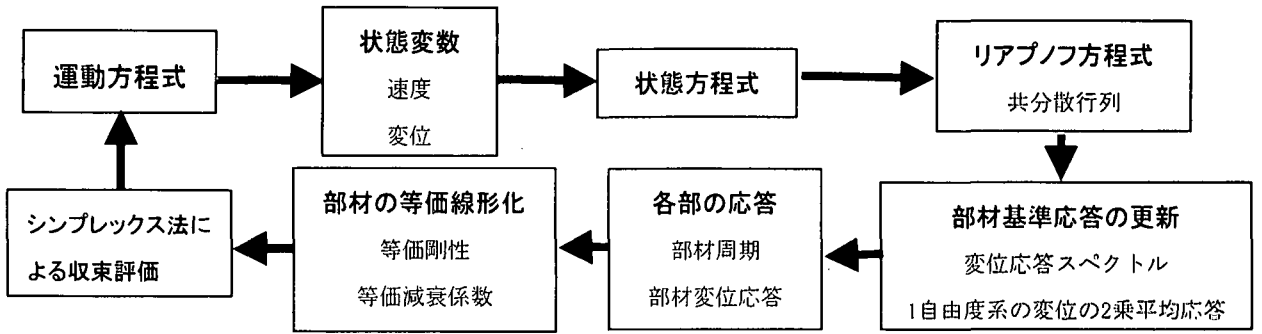


図-1 応答計算の手順

$$[P] = \{X\}^T \cdot \{X\} \quad (5)$$

共分散行列 $[P]$ の解は白色雑音密度 $[Q]$ を与えることにより、式(6)に示すリアプノフ方程式で求められる。

$$[P][A]^T + [A][P] = \{B\}^T [Q] \{B\} \quad (6)$$

式(6)は解析ツールを用いることにより簡単に解くことができる。式(6)から得られた、行列 $[P]$ は変位の2乗平均応答であり、振幅比の意味しか持たないので地震応答の評価を行うため、絶対的な応答値を得る必要がある。そこで、部材ごとの変位応答を求めるために道路橋示方書¹⁰⁾に基づく加速度応答スペクトルと、以下に示す1自由度系の変位の2乗平均応答 $R_{D\zeta_{SNOP}^i}$ を用いる。

$$R_{D\zeta_{SNOP}^i} = \frac{Q}{4\pi h \left(\frac{2\pi}{T_i} \right)^3} \quad (7)$$

ここで、 Q は入力白色雑音密度、 h は減衰定数で加速度応答スペクトルの減衰定数に基づき0.05とした。 T_i は部材 i の周期で、調和応答を仮定すると式(8)により求められる。

$$T_i = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{R_{A\zeta_i}}{R_{D\zeta_i}}}} \quad (8)$$

ここで、 $R_{A\zeta_i}$ はリアプノフ方程式によって求められた部材 i の速度の2乗平均応答、 $R_{D\zeta_i}$ は部材 i の変位の2乗平均応答である。調和応答を仮定した場合、式(9)によって部材 i の加速度応答スペクトル $R_{A\zeta_i}(T_i)$ から部材 i の変位応答スペクトル $R_{D\zeta_i}(T_i)$ に変換される。

$$R_{D\zeta_i}(T_i) = \frac{R_{A\zeta_i}(T_i)}{\left(\frac{2\pi}{T_i} \right)^2} \quad (9)$$

また、式(10)より変位の2乗平均応答 $R_{D\zeta_i}$ から部

材 i の応答 γ_i を求めている。

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{R_{D\zeta_i}}{R_{D\zeta_{SNOP}^i}}} \cdot R_{D\zeta_i}(T_i) \quad (10)$$

シンプレックス法を用いて、図-1に示すような手順で応答計算を行った。収束評価は各部材の等価剛性、等価減衰係数で行った。

3. 部材の等価線形化

時刻歴応答解析では履歴規則に応じて応答を求めるが、不規則振動論は線形理論であるので、履歴規則の等価線形化を行わなくてはならない。ここでは、はじめにバイリニア特性の等価線形化手法¹¹⁾について説明し、つぎに、最大点指向型バイリニア特性の等価線形化手法¹²⁾について説明する。

(1) バイリニア特性の等価線形化

はじめに、バイリニアモデルの履歴特性から等価減衰係数 C_{be} 、等価剛性 K_{be} を求める。図-2にバイリニア履歴特性の一例を示す。等価剛性 K_{be} は変位応答 U_B と原点を結ぶ線の傾きとした。等価減衰定数 h_{be} は、エネルギー損失の関係から式(11)で示される。

$$h_{be} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (11)$$

h_{be} は減衰定数、 ΔW は1サイクルに消費する履歴エネルギー、 W は ΔW に対応する弾性エネルギーで以下のように示される。

$$W = \frac{1}{2} K_{be} U_B^2 \quad (12)$$

ここで、 K_{be} は変位 U_B における等価剛性である。これらの関係から変位 U_B におけるバイリニア特性の等価減衰定数 h_{be} ¹¹⁾は式(13)のように示される。

$$h_{be} = \frac{2 \cdot Q_d \{U_B + Q_d / (K_{b2} - K_{b1})\}}{\pi \cdot U_B \cdot (Q_d + U_B \cdot K_{b2})} \quad (13)$$

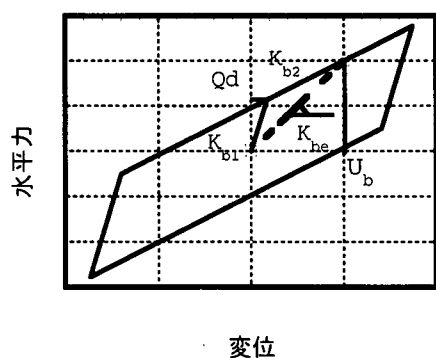


図-2 バイリニア特性と等価剛性

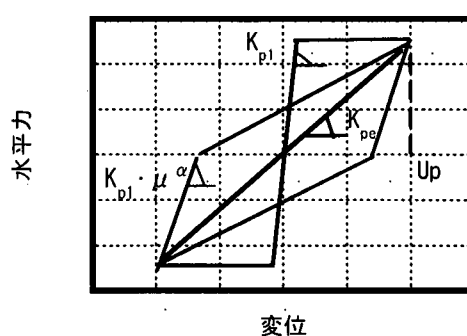


図-4 最大点指向型バイリニア特性と等価剛性

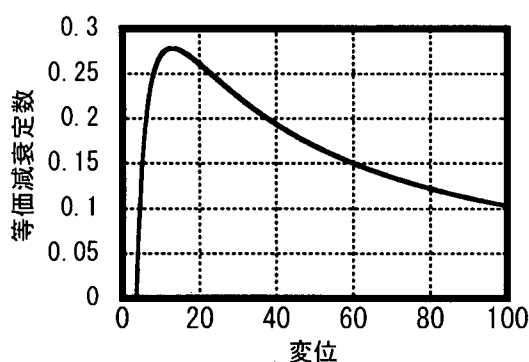


図-3 バイリニア等価減衰定数

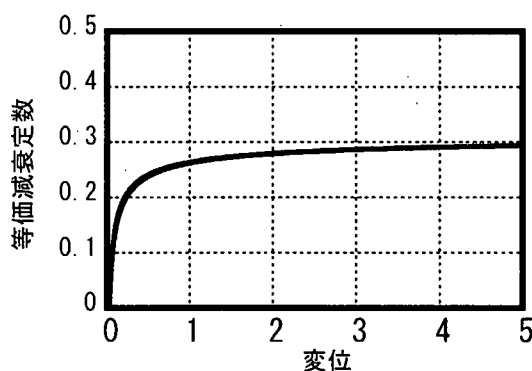


図-5 最大点指向型バイリニア等価減衰定数

ここで、 Q_d は降伏荷重、 K_{b1} は一次剛性、 K_{b2} は二次剛性である。図-3 に変位 U_B と減衰定数 h_{be} との関係の一例を示す。一方、等価減衰係数は式(14)のようになる。

$$C_{be} = \frac{\Delta W}{\pi \cdot \omega \cdot U_B^2} \quad (14)$$

調和応答を仮定すると、角振動数 ω は以下のようになる。

$$\omega = \sqrt{\frac{R_{VB\xi}}{R_{DB\xi}}} \quad (15)$$

ここで、 $R_{VB\xi}$ は当該部材の速度の 2 乗平均応答、 $R_{DB\xi}$ は、当該部材の変位の 2 乗平均応答である。式(12)、式(13)および式(14)の関係から等価減衰係数は式(16)のように示すことができる。

$$C_{be} = \frac{2 \cdot h_{be} \cdot K_{be}}{\omega} \quad (16)$$

(2) 最大点指向型バイリニア特性の等価線形化

最大点指向型バイリニアモデルの履歴特性から、等価減衰係数 C_{pe} 、等価剛性 K_{pe} を求める。図-4 に最大点指向型バイリニア型モデルの履歴特性の一例を示す。1 サイクルに消費する履歴エネルギー ΔW を式(17)に示す。

$$\Delta W = 2 \cdot F \cdot \left(\mu \cdot \delta_y - \frac{F}{K_{p1} \cdot \mu^\alpha} \right) \quad (17)$$

ここで、 F は降伏荷重、 δ_y 降伏変位、 K_{p1} は弾性剛性、 α は剛性低減率である。 μ は塑性率で式(18)に示す。

$$\mu = \left| \frac{U_p}{\delta_y} \right| \quad (18)$$

ここで、 U_p は変位応答である。塑性率 μ を用いると等価剛性 K_{pe} は式(19)のようになる。

$$K_{pe} = \frac{K_{p1}}{\mu} \quad (19)$$

また、式(12)と同様に弾性エネルギー W を式(11)に示す。

$$W = \frac{1}{2} K_{pe} (\mu \cdot \delta_y)^2 \quad (20)$$

式(17)および式(20)を式(11)に適用すると、等価減衰定数 $h_{pe}^{(2)}$ は式(21)のように示される。

$$h_{pe} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\mu^\alpha} \right) \quad (21)$$

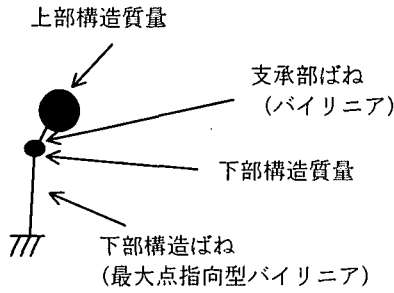


図-6 解析モデル

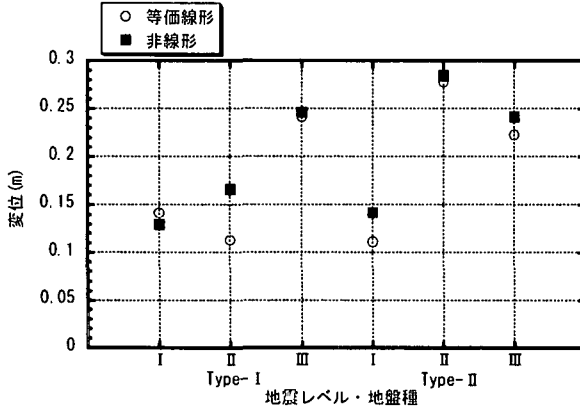


図-7 支承部応答

図-5 に変位と等価減衰定数の関係の一例を示す。また、等価減衰係数 C_{pe} は、式(14)に基づき、以下のよう示す。

$$C_{pe} = \frac{2 \cdot F \left(\mu \cdot \delta_y - \frac{F}{K_{pl} \cdot \mu^\alpha} \right)}{\pi \cdot (\mu \cdot \delta_y)^2 \cdot \omega} \quad (22)$$

式(22)において、角振動数 ω は式(16)によって求めることができる。

また、今回の計算では α を-0.5 とした。

(3) 等価線形化の精度

等価線形化手法を示したが、その精度を確認するために、ここでは、非線形時刻歴応答解析と、その結果から等価線形化した剛性、減衰を用いた線形時刻歴応答解析との応答比較を行った。

a) 解析モデル

解析モデルは、図-6 に示すような 2 自由度系のモデルで行った。構造パラメータは表-1 の Case2 で示した値とした。また、対象とした地震波は Type-I, Type-II の各地盤種の標準地震波で、応答評価は各地盤の地震波の 3 波平均とした。

b) 部材毎の角振動数

式(14)、式(22)から減衰係数を求める際に角振動数がひとつのパラメータとなる。提案した方法では、式(15)に示すように部材毎の角振動数を求めているが、非線形時刻歴応答解析結果から等価線形化を行う場合、式(23)に示すように最大速度応答 V_{max} を

表-1 解析モデル諸元

	単位	Case 1	Case 2
上部構造質量	kN	5952.6	5952.6
下部構造質量	kN	3334.3	3334.3
支承部一次剛性	kN/m	55848.9	55848.9
支承部二次剛性	kN/m	8600.7	8600.7
支承部降伏変位	m	0.0245	0.0245
下部構造一次剛性	kN/m	1128240.8	112824.1
下部構造二次剛性	kN/m	限りなく0に近い値	限りなく0に近い値
下部構造降伏変位	m	0.0309	0.0309

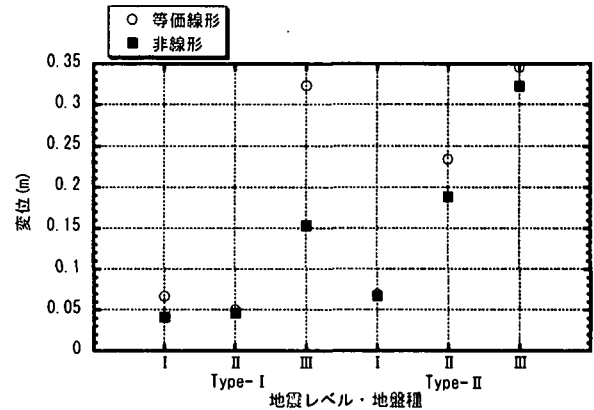


図-8 下部構造応答

最大変位応答 D_{max} で除すことにより、部材毎の角振動数を求めた。

$$\omega = \left| \frac{V_{max}}{D_{max}} \right| \quad (23)$$

c) 解析結果と考察

解析結果を図-7 に支承部応答の比較を、図-8 下部構造応答の比較を示す。これらより非線形解析と、等価線形化解析の応答を比較すると、おおむね傾向が一致していることがわかる。支承部に着目すると最大で誤差が 5cm 程度であることがわかる。この誤差は部材毎の各振動数を求める際に用いる最大変位と最大速度が原因であると考えられる。しかし、誤差が数 cm 程度であるため、等価線形化手法を用いるとバイリニア型モデルを高い精度で予測することが可能である。

つぎに下部構造に着目すると Type-I, III 種地盤では誤差が 15cm 程度となっている。最大点指向型バイリニアモデルで等価線形化手法を適用する場合には長周期地震では減衰の評価が適切に行なわれていないことが考えられる。長周期地震における履歴ループを検討して長周期地震にも適用できる等価線形化手法を考える必要がある。一方、短周期が卓越する地震では誤差が数 cm 程度であるため、本手法で高い精度で等価線形化が可能であると考えられる。

4. 提案方法と非線形時刻歴応答解析の比較

ここでは、本文 2 節で提案した方法を 2 自由度系

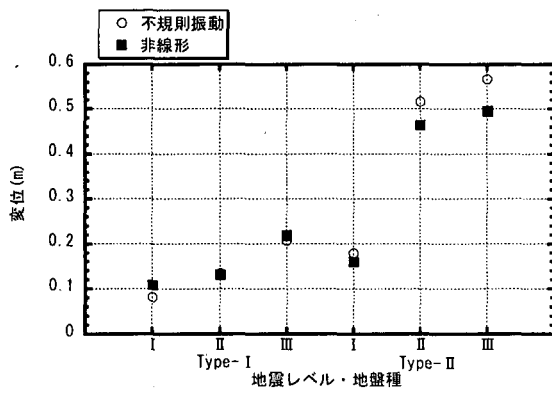


図-9 下部構造塑性化無し 上部構造変位

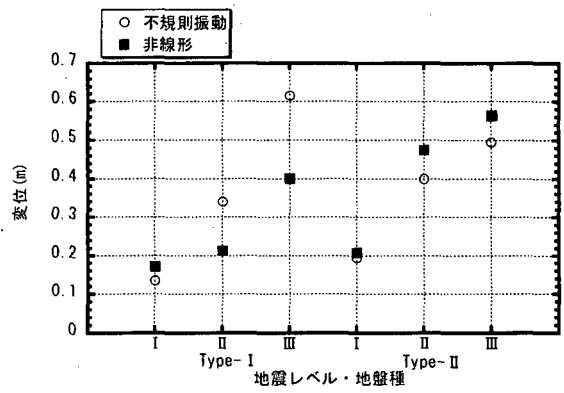


図-12 下部構造塑性化有り 上部構造変位

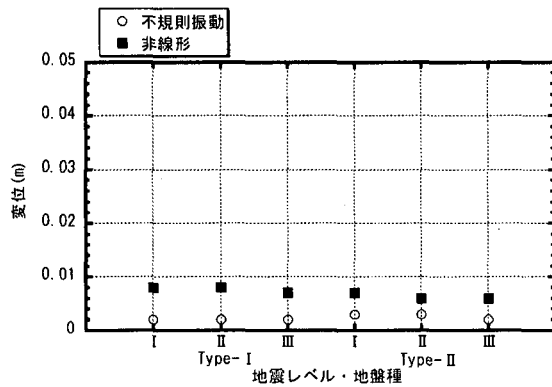


図-10 下部構造塑性化無し 下部構造変位

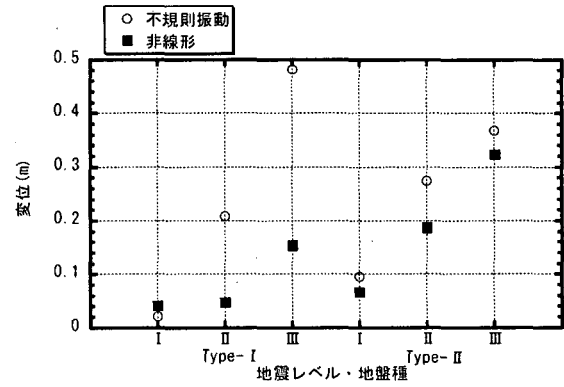


図-13 下部構造塑性化有り 下部構造変位

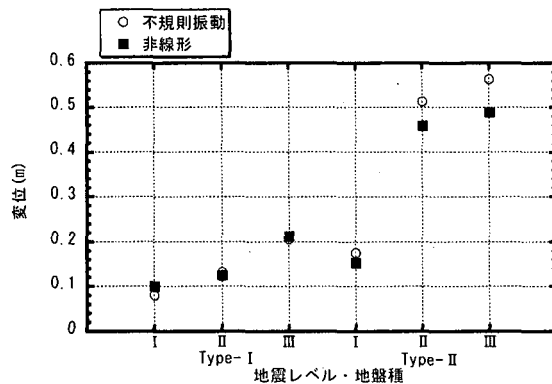


図-11 下部構造塑性化無し 支承変位

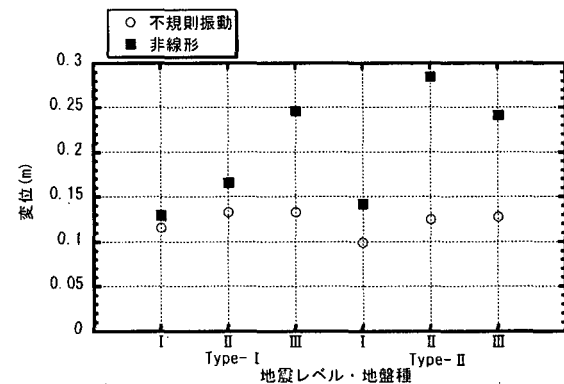


図-14 下部構造塑性化有り 支承変位

モデルに適用し、その妥当性を検討する。

(1) 解析モデル

解析モデルは前項で示したモデルと同じものを用いる。構造パラメータを表-1に示す。Case1は下部構造が塑性化しにくくしたモデル。Case2はCase1の下部構造剛性を低下させて塑性化をしやすくしたモデルである。地震波はType-I, Type-IIの各地盤種の標準地震波で、応答評価は各地盤の地震波の3波平均とした。

(2) 解析結果と考察

Case1のパラメータで解析を行った結果を図-9, 図-10, 図-11に、Case2のパラメータで解析を行った結果を図-12, 図-13, 図-14に示す。

Case1に着目すると上部構造変位, 支承変位ともに両者を比較して最大でも5cm程度の差となっており誤差が極めて少ないことがわかる。また, 下部構造変位に着目しても, 誤差はいずれの地震波においても数mmとなっており, 提案した方法は有効であると考えられる。誤差が少ない理由として下部構造

が塑性化しておらず、下部構造の特性がほぼ一定であるため下部構造変位、部材毎の角振動数もほぼ一定の値で算出される。それに応じて支承部の等価剛性、等価減衰係数も精度良く算出されているためであると考えられる。

Case2 に着目すると、Type-I、Type-IIともにI種地盤では誤差が少ない結果となったが、比較的長周期成分が卓越するII種、III種地盤では地震では誤差が大きくなっている。長周期が卓越する地震において下部構造が塑性化する場合では、下部構造の等価線形化が適切に行なわれていないことが考えられる。これは、図-8で示した傾向と一致することからも考えられる。その理由として長周期地震動において、最大変位の履歴が全体の応答に対して支配的である。そのため、くり返し履歴を想定した式(21)、式(22)で算出された減衰は、実際の最大変位時の非線型挙動とは一致しないと考えられる。また、支承部に着目すると下部構造の変位誤差が大きい場合、支承部の変位誤差も大きく、比較的予測精度が良い下部構造が塑性化しない場合の結果と比較してもわかるように、提案した方法では下部構造の等価線形化が全体の応答に対する影響が大きいことが考えられる。

5. まとめ

本研究では、非線型部材を等価線形化した運動方程式に基づく不規則振動論による応答予測手法を構築した。ここで得られた知見は以下になる。

- (1) バイリニア、最大点指向型バイリニアの等価線形化手法を示し、多自由度系の地震応答を予測する手法を提案した。
- (2) 非線形時刻歴応答解析の結果を用いた等価線形化モデルを作成し、等価線形化の精度の確認を行った。その結果、Type-I、Type-IIの地震ともにI種地盤では比較的誤差が少ないが、比較的長周期な地震では誤差が比較的大きいことが分かった。
- (3) 提案した方法と非線形時刻歴応答解析の比較を行った。その結果、下部構造の塑性化しない場合、Type-I、Type-II両地震のどの地盤種においても非線形時刻歴応答解析と比較して支承の変位誤差が数 cm 程度であり、下部構造の応答の誤差も少ないことが分かった。一方、下部構造の塑性化が起こる場合、Type-I、Type-II両地震のI種地盤では比較的精度良く応答が予測できているが、比較的長周期地震では誤差が大きくなっている。とくに下部構造の応答予測において誤差が大きく、下部構造の等価線形化に何らかの改良が必要であると考えられる。

今後、より精緻に等価線形化手法の検討を行い、長周期卓越型の地震に対しても、提案した方法の予測精度をさらに高くする必要があると考えている。

また、maxwell モデルで残留変位を予測する手法を構築するなど、より精緻な応答解析が行えるように進めて行く予定である。

参考文献

- 1) 宇佐美 勉、鄭 沂、葛 漢彬: Pushover 解析と等価 1 自由度モデルによる鋼製ラーメン橋脚の耐震照査法、土木学会論文集 No. 626/I-48, pp. 231-240, 1999. 7.
- 2) 川島一彦、庄司 学、斎藤 淳: ハイブリッド実験による免震橋の非線形地震応答特性に関する検討、土木学会論文集 No. 689/I-57, pp. 65-84, 2001. 10.
- 3) 建設省土木研究所: ゴム支承を用いた地震時水平力分散構造を有する道路橋の非線形地震応答の簡易予測法、1999. 3.
- 4) 熊木幸、矢部正明: 1 自由度系の非線形応答と等価線形化法の問題点、第 3 回地震時保有水平耐力法に基づく橋梁の耐震設計に関するシンポジウム講演論文集, pp. 87-94. 1999. 12.
- 5) 足立幸郎、運上茂樹: 等価線形化法による多自由度系の地震応答予測精度、第 3 回地震時保有水平耐力法に基づく橋梁の耐震設計に関するシンポジウム講演論文集, pp. 81-86, 1999. 12.
- 6) E. Gosmann, H. Waller: Analysis of multi-correlated wind excited vibrations of structures using the covariance method. *Eng. Struct.* Butterworth Ltd. pp. 264-272, 1982.
- 7) 松本泰尚、藤野陽三、木村吉郎: 状態方程式表示を用いたガスト応答解析の定式化の試み、土木学会論文集 No. 543/I-36, pp. 175-186, 1996. 7.
- 8) 阿部雅人、藤野陽三: 高架橋構造全体系の耐震性能の向上を考えたパッシブ制震装置の最適化、土木学会論文集 No. 605/I-45, pp. 241-252, 1998. 10.
- 9) たとえば 榎木義一、添田 喬、中溝高好: 確率システム制御の基礎、日新出版, pp. 33-56, 1975.
- 10) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, V 耐震設計編 1996. 12.
- 11) (財)土木技術研究センター: 道路橋の免震設計法マニュアル (案), 1992. 12.
- 12) 柴田明徳: 最新耐震構造解析, 森北出版 1981.