

動的複合非線形解析による 長大アーチ橋の座屈照査方法に関する考察

為廣 尚起¹・大塚 久哲²

¹正会員 株式会社構造計画研究所 解析技術本部(〒164-0011 東京都中野区中央 4-5-3)

²正会員 工博 九州大学大学院教授 工学研究院建設デザイン部門(〒812-8581福岡市東区箱崎6-10-1)

1. はじめに

コンクリート製・鋼製に関わらず、長大アーチ橋はしばしば座屈の可能性が懸念される。しかし最近実施された国内のコンクリート長大アーチ橋の設計・施工方法に関する実態調査¹⁾等からは、実橋設計時の座屈照査について概ね次のような現状が認識される。

- ① 橋梁全体系を対象とした、常時・地震時の座屈に関する明確な検討が実施された事例²⁾は少ない。
- ② 座屈の検討がなされているケースを見渡しても手法が統一されてない。
- ③ 既設構造物の座屈に対する性能に関して定量情報の蓄積がないため、懸念自体が曖昧である。

筆者らは一般的に広く認知され実施されている座屈解析手法がないとの前提に立ち、既往手法の調査・整理から必要に応じて新手法を開発することまでを視野に入れて検討を開始し、初段階の成果を前報³⁾に報告した。

本報では、さらに検討を進めた結果、前報で懸案としていた地震応答解析中に座屈点探索を行うプログラムを開発するに至ったので、これを用いた動的な座屈照査手法を提案し、長大アーチ橋への適用を通じてその有効性に関する考察を述べていく。

2. 座屈照査手法の問題点

座屈照査は固有値解析またはプッシュオーバー解析による場合が多い。いずれも基本的には接線剛性マトリックス（材料剛性マトリックス K + 幾何剛性マトリックス K_g ）の行列式の値が0、すなわち特異となる荷重状態を探索することを目的としている。

線形座屈固有値解析による照査は主に常時荷重作用状態に式(1)の固有方程式を適用するものである。

$$([K] + \lambda_d [K_g]) \{u\} = \{0\} \quad (1)$$

$[K]$: 材料剛性マトリックス(初期断面)

$[K_g]$: 現応力状態で評価される幾何剛性マトリックス

$\{u\}$: 固有モードベクトル

固有値 λ_d は、想定荷重による各部材の応力（または断面力）状態がプロポーション不変のまま一律に線形に増加すると仮定した場合の、座屈（特異）点までの倍率を示す。常時荷重が想定されている場合は、実際の常時状態を示す 1.0 より大きい1次（最小）固有値 λ_d を得ることで余裕が確認される。手軽な手法であるが、解は基準の状態（ $\lambda_d = 0.0$ ）から線形に推移する範囲でしか信憑性を持たないため適用範囲は狭い。常時荷重等による座屈について余裕を確認するには有効であるが、非線形領域に及ぶ荷重設定には適用できない。

前報で支間長 600 m という超長大コンクリートアーチ橋の地震時座屈に着目した際は、複合非線形（弾塑性と幾何学的非線形を同時に考慮した）プッシュオーバー解析による特異点探索を試みた。特異点はさらに極大点または分岐点に分類される（図-1）が、いずれもそれ以上の耐荷力は期待できない状態であり、かつ座屈後挙動の追跡を目的としていなかったため特異判定を以って座屈とみなした。

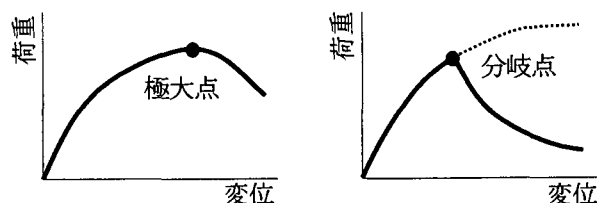


図-1 特異点（座屈点）の分類⁴⁾

しかしながら、この静的手法を一様震度の水平荷重分布で支間長 600 m のコンクリートアーチ橋モデルに適用したところ、極端に小さい震度 (0.114G) での座屈判定が現れるなど疑問が残る結果となった。このことから、静的な地震時座屈解析の荷重設定について通常の耐震解析時と異なる観点での検討が必要と考えられたが、この検討の為に、あるいは地震時の座屈解析手法のオプションとしても、動的な複合非線形解析中に座屈判定を行う手法の必要性が浮上した。

長大アーチ橋の耐震設計に動的複合非線形解析による照査が必要であるとの認識は広く持たれている。よく参照されている設計計算例⁵⁾では常時の幾何剛性のみを考慮する簡易手法(線形化有限変位理論⁶⁾)が採用されているし、より厳密に時々刻々と部材座標系と幾何剛性マトリックスを更新していく修正ラグランジェ法⁴⁾を用いた設計事例⁷⁾も近年報告されている。

長大アーチ橋においては架構の応力状態の変化が動的挙動に与える影響が大きいことが知られており⁸⁾、この観点ではこれらの手法は有効である。ただし座屈の可能性に着目している場合は、動的複合非線形解析を実施するのみでは十分とはいえない。理由は以下の通り。

- ① (動的複合非線形解析のみでは) 明確な数値指標で座屈判定ができない。発散や急激な大変形等の現象からの座屈判定には検証作業が必要である。
- ② 連続する解析ステップの中間に存在する特異点を検出できない。特異点を通過しているにも関わらず、計算が安定に進んでしまう可能性がある。
- ③ 動的解析の最後まで座屈しない場合でも、どの程度の余裕を持って座屈しなかったのかを確認すべきであるが、その為の情報が何も得られない。

3. 増分形式の座屈固有値解析

以上の不足を補う手段として、動的複合非線形解析の各増分ステップに、式(1)をより一般化した式(2)の固有値方程式を解く座屈固有値解析⁹⁾を挿入することが考えられる。

$$([K] + \lambda [\Delta Kg]) \{u\} = \{0\}$$
 (2)

[K]: 前ステップの平衡状態における接線剛性マトリックス
[ΔKg]: 現ステップの増分応力(または断面力)による幾何剛性マトリックスの増分係数
{u}: 固有モードベクトル

式(2)は、非線形解析においても単一の増分ステップ区間内はほぼ線形に推移する(とみなせる程度に細かい

時刻刻みが設定されている)という前提で、前ステップの平衡状態を基準にして、現ステップの各部材の増分応力が実際に発生したものの一何倍であれば接線剛性マトリックスが特異となるかを求めるものである。式(2)の固有方程式を解いた結果得られる固有値λがこの倍率を表し、同時に座屈モードを得ることができる。振動固有値と異なり各次のモードに同時性はないので、通常は1次(最小)固有値λ₁がチェックの対象となる。

λ=1.0は現ステップの初期応力状態(図-2のB)を、λ=0.0は前ステップの平衡状態(同A)をそれぞれ指しているから、0.0 ≤ λ₁ ≤ 1.0であれば前・現ステップ間に座屈点が存在することになる。

一方、λ₁ > 1.0は現ステップまで座屈しないことを示し、さらにλ₁の値が1.0から離れているほど座屈点までの余裕が大きいことを示している。動的挙動中のλ₁の最小値は地震時の対座屈性能指標として利用できる。

このほか、λ₁ < 0.0となる場合があるが、これは除荷等で現ステップの応力増分が近傍座屈点から遠ざかる方向であることを示している。

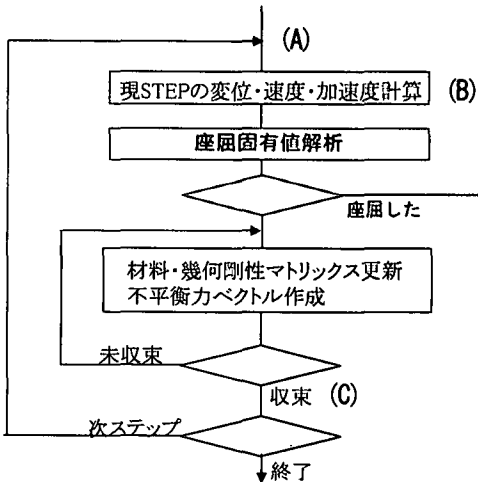
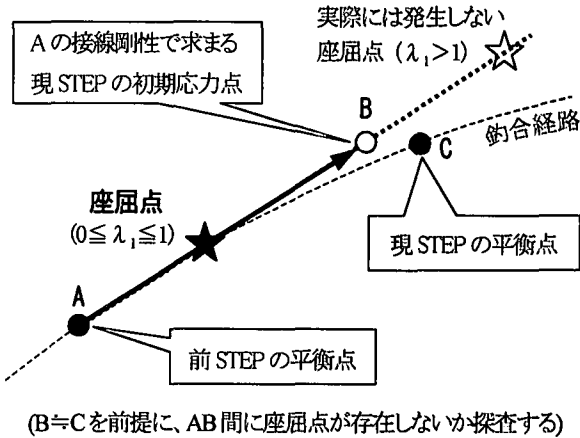


図-2 増分解析中の座屈判定

4. 動的解析への座屈固有値解析挿入

動的解析中に座屈固有値解析を挿入し、座屈する／しないの判定を行った解析事例報告は存在するが¹⁰⁾、判定のみならず座屈点までの余裕の定量評価も視野に入れて前述のような増分形式の座屈固有値解析を挿入した例はない。プログラム開発に当たっては理論・運用の両面でいくつかの検討項目が発生した。以下にそれらの項目と、筆者らが採った対応や運用上の決め事を記しておく。

(1) 座屈固有方程式を適用する剛性マトリックス

動的問題を直接積分法（ここではニューマークβ法）で解く場合、式(3)の運動方程式は式(4)のような連立一次方程式問題に展開される。⁴⁾

$[M]\{\Delta\ddot{y}\} + [C]\{\Delta\dot{y}\} + [K_I]\{\Delta y\} = -[M]\{\Delta\ddot{y}_0\}$ (3)



$[K_e]\{\Delta y\} = \{\Delta P_e\}$ (4)

[M]: 質量マトリックス, [C]: 減衰マトリックス,
[K_I]: 接線剛性マトリックス, [K_e]: 有効接線剛性マトリックス,
 $[K_e] = [K_I] + \frac{1}{2\beta\Delta t}[C] + \frac{1}{\beta\Delta t^2}[M]$
{Δ $\ddot{y}$ }, {Δ $\dot{y}$ }, {Δy}: 加速度、速度、変位ベクトル(増分),
{ΔP_e}: 有効荷重ベクトル(増分)

動的解析中に剛性マトリックスが静的に特異となる点を検出するのであれば、式(2)に用いる接線剛性マトリックスは式(3)内の K_I であるが、動的な解が得られなくなる特異点を探査するのであれば式(4)内の K_e を用いるべきである。動的解析中の座屈判定としていずれを用いるのが適切なかは開発段階では判断しかねた為、両方の設定が可能になるようにし、当面の試行運用の中で状況に応じて使い分けながら判断することとした。

(2) 出力情報

本報で提案する動的な照査手法は座屈判定が出るまで地震動を増幅させるのではなく、想定した地震動入力時の余裕を定量的に把握することに主眼をおく。最後まで座屈判定が出ない場合でも、危険（固有値が最も低下する）時間帯や、その時点の余裕を確認するためにλ₁を時刻歴出力しておく必要がある。しかし動的複合非線形解析の全解析ステップに座屈固有値解析を挿入することは実用性を著しく損なう恐れがあるため、座屈固有値解析の挿入時間帯と間隔を、動的解析の継続時間と積分時間間隔（Δt）とは別に指定できるようにした。一度やや荒い間隔で全時間帯に渡りλ₁を得て危険時間帯を絞

り込み、その付近でλ₁の変動が大きいと判断された場合には、その時間帯のみより細かい間隔でλ₁を得るために再計算するという手順が合理的である（6章で具体的に示す）。座屈モードは最小λ₁発生時または座屈判定が出た時点のもののみを出力することとした。

(3) 結果の評価・比較時の留意点

λ₁は動的解析のステップの増分応力分布に対する倍率であるから、同一の解析モデルと地震動を用いた解析であってもΔtにより同時刻の値が変化する。複数ケース・モデルの解析を行い、各々のλ₁の比較を行う際はΔtを揃えておく必要がある。

尚Δtと座屈固有値解析の挿入時間間隔が異なる場合でも、式(2)が適用されるステップ区間はΔtによって刻まれる区間であるから、座屈固有値解析の挿入時間間隔はλ₁の値に影響しない。固有値解析の挿入自体が動的解に影響することもない。

(4) 座屈判定時の処理

座屈後の架構に靱性ほかの性能を期待することはできないので、座屈後挙動の追跡は設計の観点からは重要ではないと判断した。座屈判定（0 ≤ λ₁ ≤ 1）が出た場合は、その時点で座屈モードを出力し動的解析を中断する。

(5) プラットホーム

今回、以上のような機能を載せるためのプラットフォームとしたのは、表-1のような既に動的複合非線形解析までを可能にしていた骨組み解析プログラムである（各手法の詳細は参考文献4）等に詳しい）。筆者らが作業可能との理由で選択したこのプログラムは、必ずしも標記のテーマに最適な手法を選択し集めたものではないが、一般的に橋梁の耐震性照査に使用されているプログラムであるから、今後様々な形式の橋梁構造の座屈に対する性能を検証していく上で既に数多くのサンプルデータが存在しているという利点がある。

表-1 プラットホームソフトの基本仕様

種 別	3次元汎用骨組解析ソフト	
	弾 性	はり部材のM-φ関係により規定
幾 何 学 的 非 線 形	幾 何 剛 性 マトリックス	はり部材の軸力項のみを考慮して作成
	定 式 化	修正ラグランジェ定式化
動 的 解 析	直接積分法	ニューマークβ法
	収 束 計 算	ニュートン・ラプソン法 残留不平衡力は次ステップへ持ち越し
固 有 値 解 析	振 動	サブスペース法
	座 屈	逆反復法

5. アーチ橋解析モデルと解析条件

以上のような手法を表-2 に示す3つの長大アーチ橋解析モデルに適用し、同一地震波入力時の対座屈性能（座屈までの余裕）の定量化と、これによる性能比較例作成を試みた。これらの解析モデルは過去個別の耐震検討に用いられたものであるが、今回以下のように解析条件を揃えて再計算を実施した。

- ① 座屈固有値解析を含む修正ラグランジュ法による3次元動的複合非線形解析を実施。
- ② 動的解析は直接積分法（ニューマークβ法、 $\beta=1/4$ ）で、積分時間間隔 $\Delta t=0.001$ 秒
- ③ 各部材の減衰定数はコンクリート3%、鋼2%に統一し、各次減衰定数を得てレーリー減衰を設定（有効質量比から採用次数決定）。減衰マトリックスは解析中更新しないものとした。
- ④ 入力地震波はJMA神戸波3方向同時入力（図-3）

表-2 中に記した固有周期は常時の幾何剛性考慮のものである。また常時座屈固有値 λ_{dl} は常時荷重作用状態に線形座屈固有方程式(1)を適用して得たものである。一方、この後に示す動的解析中の座屈固有値 λ_1 は、0.001秒の増分応力に対する倍率である。 λ_{dl} と λ_1 は同一指標の数値が変化したものではなく、常時と地震時で別個に評価されるべきものである点は留意されたい。

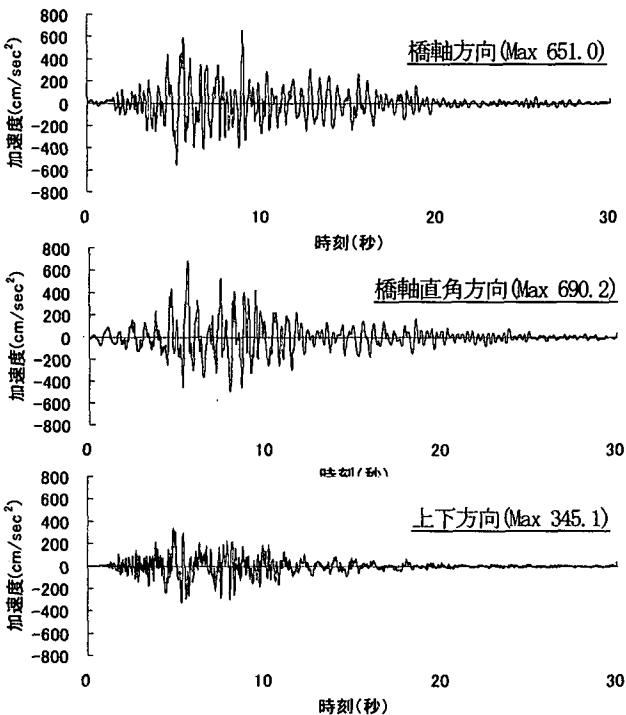


図-3 入力地震動

表-2 アーチ橋解析モデル

モデル名 CU600	形式：コンクリート上路 アーチ支間：600m アーチライズ：100m
	1次固有周期：8.032秒（橋軸直角） 2次固有周期：4.998秒（橋軸） 常時座屈固有値 λ_{dl} ：2.868 参考文献1) 3)
モデル名 CM100	形式：コンクリート中路 アーチ支間：100m アーチライズ：8～10m
	1次固有周期：1.077（橋軸） 2次固有周期：0.733（橋軸直角） 常時座屈固有値 λ_{dl} ：22.440 参考文献11)
モデル名 SM160	形式：鋼中路 アーチ支間：160m アーチライズ：23～37m
	1次固有周期：1.957秒（橋軸） 2次固有周期：1.471秒（橋軸直角） 常時座屈固有値 λ_{dl} ：4.182 参考文献12)

6. 動的解析結果

まずCU600モデルの動的複合非線形解析により得られた座屈固有値 λ_1 の時刻歴を図-4に示す。固有値解析挿入間隔は0.01秒である。式(3)のKtを使用した場合と式(4)のKeを用いた場合の λ_1 は、ほぼ同傾向の遷移で前者の方が2桁ほど小さい数値であったので、ここでは発生までの余裕がより小さい前者を採用し、正の倍率を示すもののみプロットした。図-4より危険時間帯を5.0～6.5秒と判断し、この時間帯のみ動的解析の Δt と同じ0.001秒間隔で得た λ_1 の時刻歴が図-5である。これらより最小座屈固有値 $\lambda_1=311.9$ （5.881秒）を得た。

動的解析時は構造物の応答に伴い座屈点（いつも同じ座屈モードとは限らない）への接近が繰り返されるため、図-5に見られるように λ_1 の時刻歴は複数のV字が並ぶような形状になる。着目しているのは λ_1 の最小値であるから、各V字の最下部を結んだ包絡線（図4内の破線）の方が性状を把握しやすい。3モデルの λ_1 時刻歴包絡線を図-6に、最小 λ_1 比較を表-3に示す。また各モデルの最小 λ_1 発生時の座屈モードを図-7に示す。

CU600の座屈モードは水平力との関連が明瞭なので、クラウン部中央の最小 λ_1 発生時応答加速度（水平2方向合成）に関するデータを表-4に記しておく。

これらより3モデルとも最小 λ_1 が1.0より大きい数値であるので、先の地震動入力時の座屈に関しては余裕を持っていることが示されたが、その一方で、主桁下鉛直部材の局部座屈モードが検出されたSM160、超長大規模のCU600の順で相対的に余裕が小さいことも分かる。

表-3 動的解析時最小座屈固有値

CU600	311.9 (5.88 秒)
CM100	646.7 (8.31 秒)
SM160	122.0 (6.17 秒)

()内は最小値発生時刻

表-4 CU600 クラウン部中央水平加速度 (cm/sec²)

最小 λ_1 発生 1STEP 前*の応答加速度 A_0	440.6
最小 λ_1 発生 STEP の増分応答加速度 ΔA	4.856
最小 λ_1 発生 STEP の応答加速度 $A_0 + \Delta A$	445.5
この位置の応答加速度を基準にした座屈震度 $(A_0 + \Delta A * 311.9) / 980$	1.995

*0.001 秒前

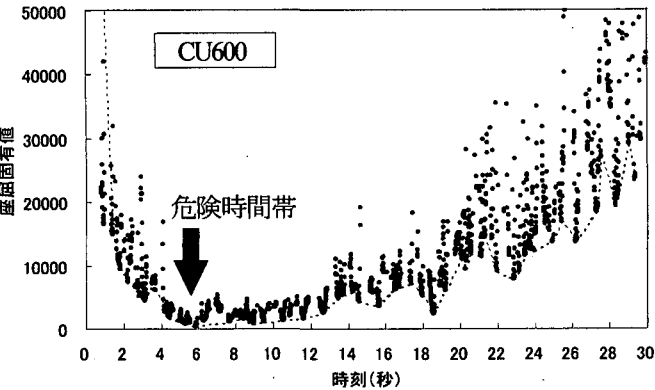


図-4 座屈固有値時刻歴(1/100 秒間隔)

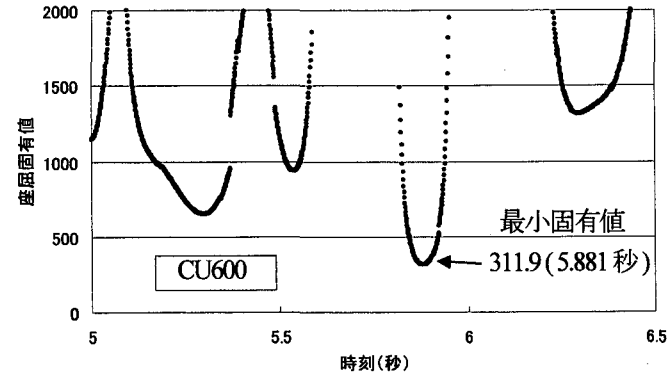


図-5 危険時間帯の座屈固有値時刻(1/1000 秒間隔)

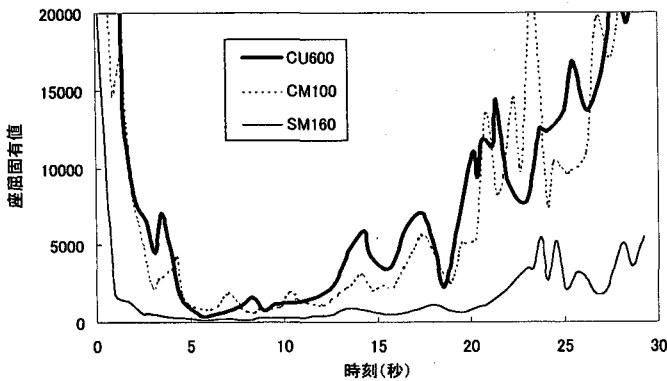


図-6 座屈固有値時刻歴下側包絡線

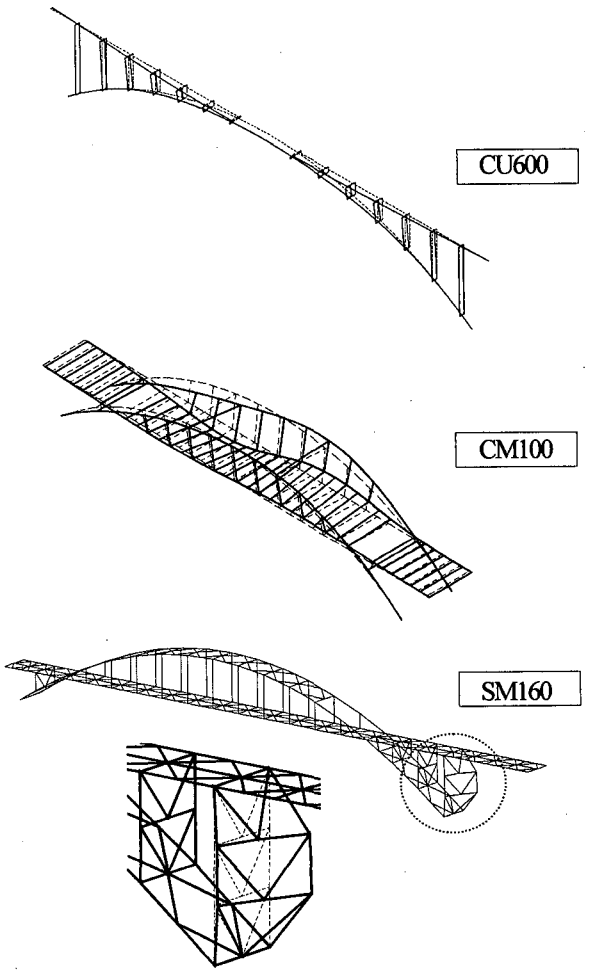


図-7 最小 λ_1 発生時の座屈モード図

(固有値解析により得られたもので、瞬間の変形図ではない)

7. 考 察

(1) アーチ橋の座屈照査方法

以上の動的解析結果から、前報の 600 m コンクリートアーチ橋モデルに対しプッシュオーバー解析で得た座屈震度 0.114 はやはり過小評価である可能性が高くなった。ただし静的な座屈解析が荷重分布の設定により評価が変わると同様に、本報で紹介した動的手法も入力地震動により異なる固有値を示すから、本報の結果のみから結論付けることはできない。静的・動的双方の解析手法を得たので、合理的な座屈照査方法について、両者の外力の設定方法に重点を置き、さらに検討を進める必要がある。

(2) アーチ橋の対座屈性能

本報の例題解析のみでアーチ橋の対座屈性能の傾向について言及することはできないが、地震時座屈固有値は常時の場合以上に様々な因子（構造条件、解析条件、外力条件）が影響し、相対的な優劣であっても単純には予測し難い様子は垣間見られた。今後、鋼・コンクリート製別に傾向を整理し、それぞれ主要な影響因子を割り出して、それらの座屈固有値への感度（各因子の変更によって固有値が変化する際の大きさや方向）に関する知見を蓄積していくことも重要である。これらは構造改善が必要な場合に重要な情報となる。

(3) 対座屈性能指標の必要性

本報で示してきたように、常時および地震時の座屈に対する性能指標（ λ_{cr} , λ_1 ）を設定することにより評価・比較が明瞭に定量化される。座屈が懸念される場合の照査手順が合理化されるばかりでなく、これらの定量情報が蓄積されることにより、冒頭に述べたような座屈に対する曖昧な懸念が解消され、明確なデータに基づいて詳細検討が必要なケースを絞り込むことが可能になる。

ただしそのためにはクライテリアの設定を含む指標の評価方法の確立が不可欠である。現段階では座屈固有値によって示される余裕が十分といえるのかどうかを判断する基準が何もない。また地震波や Δt に依存する λ_1 のままではデータ蓄積の観点で難がある。

(4) 解析結果の正当性

本報内の解析結果には、同材料製の超長大と中規模橋の λ_1 によって示される対座屈性能差や、各モデルの危険時間帯と入力地震動の関係など、いくつかの相対的・定性的合理性は見られる。ただし現段階では比較対象となる実験情報や他プログラムが少ないため、十分な説得力を持っているとはいえない。これらを明確にして行くことも今後の課題である。

8. 終わりに

以上、動的な対座屈性能照査方法を提案し考察を行った。本報では長大アーチ橋を題材としたが、手法の適用範囲はこれに限られるものではない。今後、座屈が懸念される様々な構造物に適用を試みる所存である。

参考文献

- 1) コンクリート製長大アーチ橋の設計方法に関する研究小委員会:コンクリート長大アーチ橋の設計・施工技術の現状と将来展望, (財)土木学会, 2000.8
- 2) 幸左賢二・渡部尚夫・徳山清治:全体系模型による RC アーチ橋耐荷性状確認実験, コンクリート工学年次論文報告集 Vol.17, No.2, pp.423~pp.428, 1995 等
- 3) 大塚久哲・夏 青・矢葺 亘・為廣尚起:長大 RC アーチ橋における複合非線形動的解析と座屈・分岐解析, 構造工学論文集 Vol.47A, pp.873~881, 2001.3
- 4) 鷲津ほか:有限要素法ハンドブックⅡ応用編, 培風館, 1983
- 5) 道路橋の耐震設計に関する資料—PC ラーメン橋・RC アーチ橋・PC 斜張橋・地中連続壁基礎・深礎基礎等の耐震設計計算例—, (社)日本道路協会, 1998
- 6) 尾下里治・大森邦雄:線形化有限変位理論によるアーチ橋の設計法の提案, 土木学会 構造工学論文集 A, Vol.44, No.3, 1998
- 7) 猪熊康夫・台原 直・為廣尚起:鋼・コンクリート複合アーチ橋の耐震設計—富士川橋の場合—, 第1回地震時保有耐力法に基づく橋梁の耐震設計に関するシンポジウム講演論文集, pp.241~244, 1998.1 等
- 8) 平成 9.10 年度耐震設計ソフトウェアに関する研究委員会報告書, (財)土木研究センター, pp.451~458, 1999.4 等
- 9) 日本機械学会編:固体力学におけるコンピュータアナリシス, 第4章, コロナ社, 1986
- 10) 姫野正太郎・谷口勝彦・田辺忠顕:長大スパンRCアーチ橋の非線形挙動に関する解析的研究, プレストレストコンクリート技術協会第10回シンポジウム論文集, (社)プレストレストコンクリート技術協会, pp.651-656, 2000.10
- 11) 大塚久哲・矢葺亘・夏青:中路式RCアーチ橋における2軸曲げ評価と終局限界状態に関する考察研究, 構造工学論文集, Vol.46A, pp.789-796, 2000.3
- 12) 大江豊・大塚久哲・水田洋司・劉貴位・飯星智博:鋼アーチ橋における主部材の断面特性と弾塑性動的解析, 構造工学論文集, Vol.46A, pp.821-830, 2000.3