

1 自由度系の非線形応答と等価線形化法の問題点

熊木幸・矢部正明

正会員 (株)長大 構造事業部 構造防災室 (〒305-0821 茨城県つくば市春日 3-22-6)

1. まえがき

対象とする構造系の地震応答を1自由度系に近似できるような場合、その非線形応答を簡易的な方法によって推定する方法が、多くの耐震設計基準で採用されている。例えば、道路橋示方書V耐震設計編ではエネルギー一定則が、鉄道構造物等設計標準では所要降伏震度スペクトル（非線形応答スペクトル）が採用されている。また、最近米国で研究が進んでいる変位ベース設計法では、等価線形化法によって非線形応答変位が推定されている¹⁾。これらの方法は、何れも、非線形動的解析が大変であるという理由から、非線形動的解析の簡易法として位置付けられてきた。しかし、現在では、構造物を忠実にモデル化することができれば、与えられた地震動に対する非線形応答は数値解析によって容易に算定でき、非線形動的解析も大変な作業ではなくなっている。このような状況下では、上述した簡易法に求められる意義も変化してきている。特に、等価線形化法には、次のような利点があり²⁾、エネルギー一定則や非線形応答スペクトルよりも、その応用性は広いと言える。

i) 等価剛性、等価減衰定数を求めることで、多様な復元力特性を共通の尺度で比較できるので、異なる構造物の耐震性能の比較が容易にできる。

ii) 応答量を数少ないパラメーターと入力地震動の連続関数として表すことができ、構造物の性能の幅が理解し易く、最適設計を施す手助けとなる。

等価線形化法によって非線形最大応答を精度良く予測するためには、剛性低下による見かけの固有周期の変化、履歴減衰による応答低減を等価剛性や等価減衰定数によってどのように評価するかが重要となる。本報告では、1自由度系の非線形応答をどのような等価剛性と等価減衰定数を用いれば最も精度良く推定できるかを解析的に検討した。耐震設計では、対象とする系の降伏耐力と初期固有周期のみが与えられるため、その非線形応答を等価線形化法によって推定するためには、あらかじめ対象とする系に生じる非線形応答を仮定し、その仮定値と等価線形化法によって推定される非線形応答（等価線形解）が実用上等しくなるまで繰り返し計算を行う必要がある。従来は、この繰り返し計算を行う時の解の収束性に関しては何ら議論され

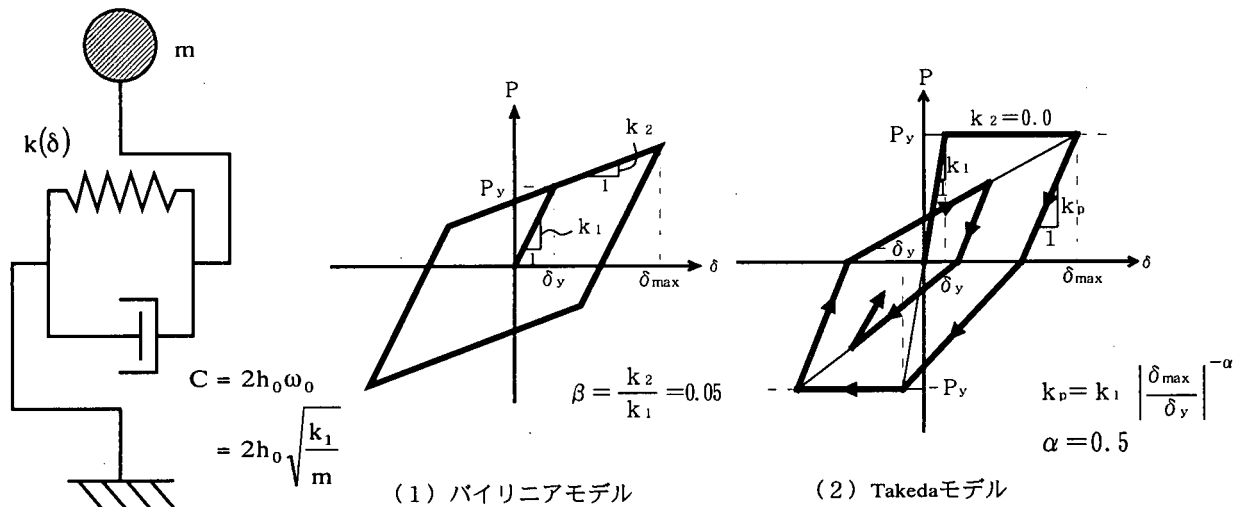


図-1 解析対象とした1自由度系モデル

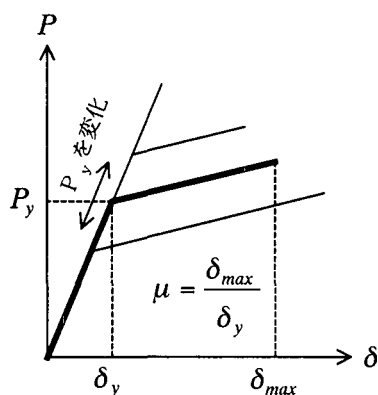
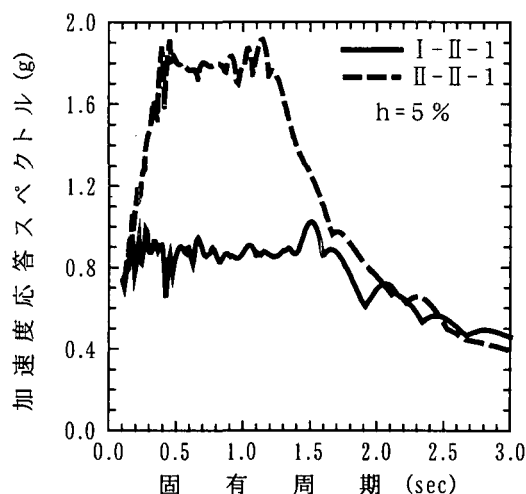
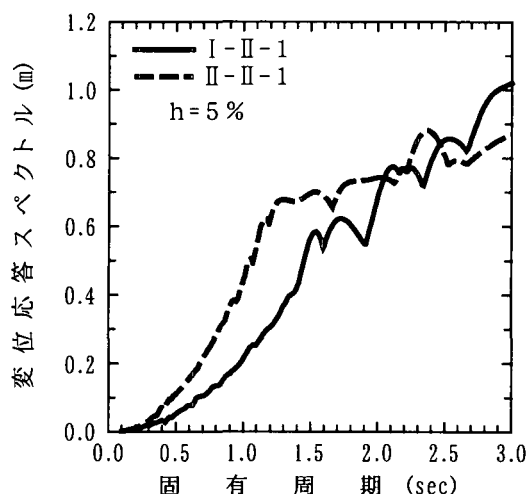


図-2 繰り返し計算による目標応答塑性率



(1) 加速度応答スペクトル



(2) 変位応答スペクトル

図-3 入力地震動

ていない。ここでは、初期値（非線形応答の仮定値）の違いが、繰り返し計算によって得られる等価線形解にどのような影響を与えるかも検討した。

2. 解析対象モデルと入力地震動

解析対象モデルは、図-1 に示すようにその非線形性をバイリニアモデルと Takeda モデルで表した 2 種類

の 1 自由度系モデルである。バイリニアモデルはコンクリート充填された鋼製橋脚、Takeda モデルは RC 橋脚の非線形特性を表すモデルとしてよく用いられている。構造減衰は、バイリニアモデルの場合には 1% と 10%、Takeda モデルの場合には 2% と 10% とする。構造減衰 10% は、基礎-地盤系によってもたらされる減衰効果を想定したものである。降伏剛性から算出した初期固有周期 T_0 は 0.5 秒、1.0 秒、1.5 秒の 3 種類で、各入力地震動に対し応答塑性率が 2, 4, 6, 8 となる系を対象とする。図-2 は、降伏水平耐力を変化させて最大応答塑性率を目標とする値に収束させる方法を概念的に示したものであり、入力地震動ごとに、図-1 に示した 1 自由度系の応答塑性率が目標とする応答塑性率 (2, 4, 6, 8) となるように、対象とする 1 自由度系の降伏水平耐力 P_y を逐次変化させる必要がある。

入力地震動は、道路橋示方書 V 耐震設計編に示される加速度応答スペクトルと同じ応答スペクトル特性を有する標準加速度波形とし、タイプ I 地震動、タイプ II 地震動ともに II 種地盤用の波形を 1 波形ずつ用いる。図-3 は、対象とする入力地震動の加速度応答スペクトルと変位応答スペクトルを示したものである。両応答スペクトルとも、オリジナル波形の加速度応答スペクトルが、道路橋示方書 V 耐震設計編の標準加速度応答スペクトルに適合するように、フーリエ振幅を周波数領域の離散点（指定した振動数）で調整しているため、道路橋示方書 V 耐震設計編に示されるスペクトルのようになめらかな連続関数とはならず、多少の凹凸を有している。等価線形化法では応答変位を推定するために、図-3 に示した変位応答スペクトルの形状もその推定精度に大きな影響を与えることになるが、本報告では、この点については触れないことにする。

3. 1 自由度系の非線形応答特性

非線形応答の特性である、剛性の変化に伴う長周期化と履歴減衰の効果による応答の低減を厳密に評価することは難しいが、ここでは、図-4 に示すような考え方によってその効果を定量的に評価した。初期固有周期 T_0 は降伏剛性から求めたものであり、非線形域に達した後の応答の卓越周期 T_1 は、図-4(1) に示すように、非線形応答変位のフーリエ振幅が最大となる振動数 f_1 から算出する。非線形応答の履歴減衰効果は、等価減衰定数 h_L で表した。等価減衰定数 h_L は、図-4(2) に示すように、卓越周期 T_1 、等価減衰定数 h_L の線形モデルの最大応答変位が、非線形応答の最大変位と等しくなるように求めたものである。

図-5 は、上述のようにして求めた解析対象モデルの

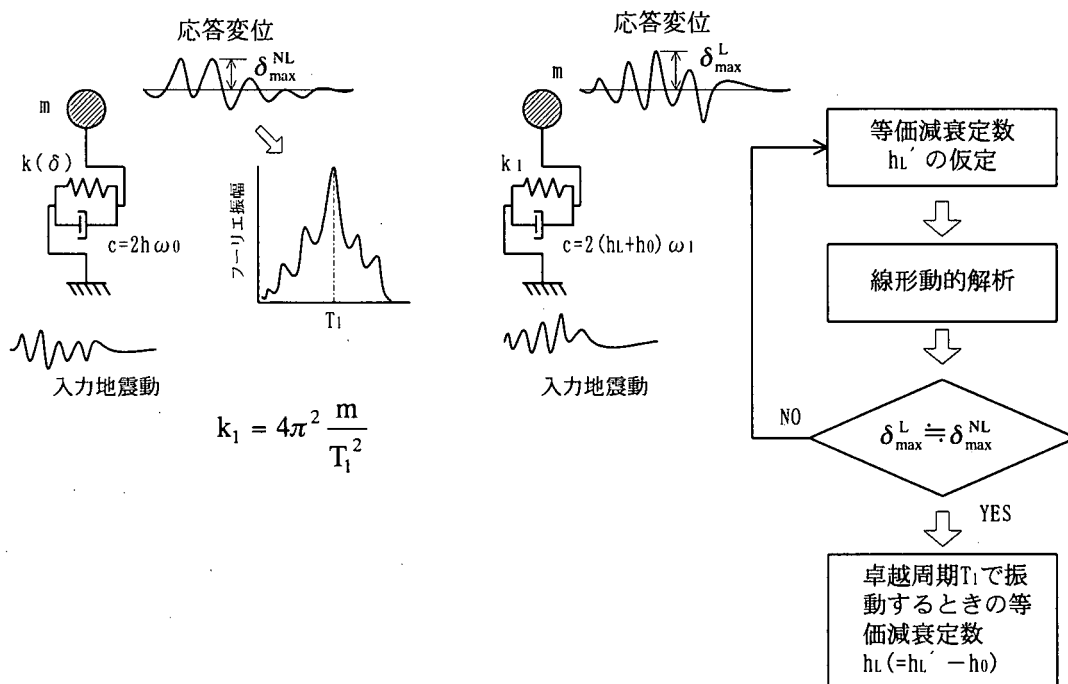
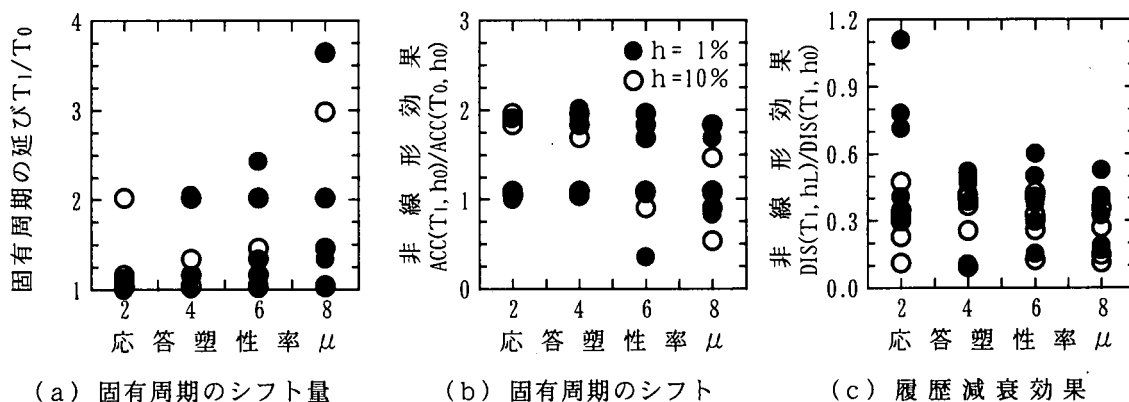
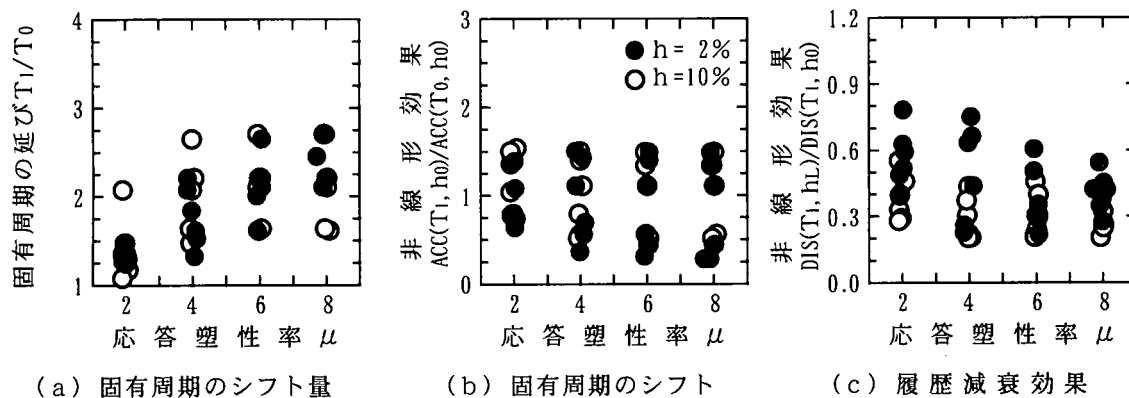


図-4 非線形応答に現れる固有周期のシフトと履歴減衰効果 (等価線形化モデル)



(1) バイリニアモデル ($h=1\%$, $h=10\%$)



(2) Takedaモデル ($h=2\%$, $h=10\%$)

図-5 非線形応答に現れる固有周期のシフトと履歴減衰効果

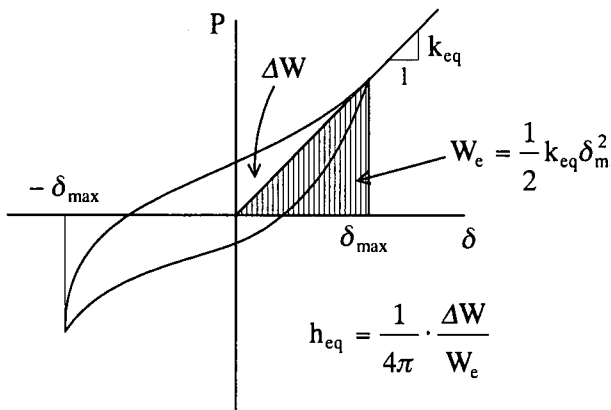
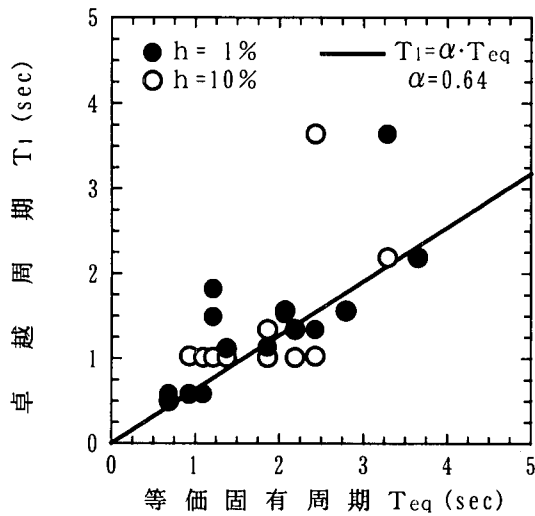
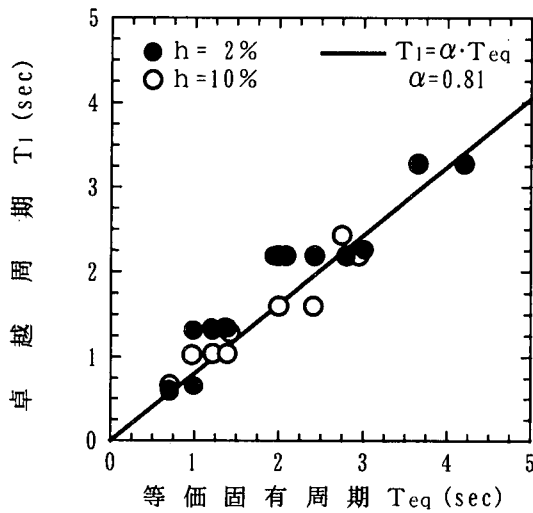


図-6 最大応答変位に基づいた等価剛性 k_{eq} ，
等価減衰定数 h_{eq}



(1) バイリニアモデル



(2) Takedaモデル

図-7 等価剛性 k_{eq} のモデル化

非線形応答に現れる固有周期のシフトと履歴減衰の効果
を応答塑性率に着目して整理したものである。同図
(a)より、バイリニアモデル、Takeda モデルとも、応答

$$-m \cdot \int_0^1 \ddot{z}_0 \cdot \dot{y}_p dt = 2(h_e + h_0) \cdot \omega_{eq} \cdot m \int_0^1 (\dot{y}_e)^2 dt$$

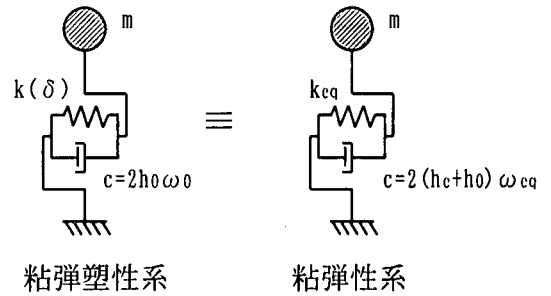
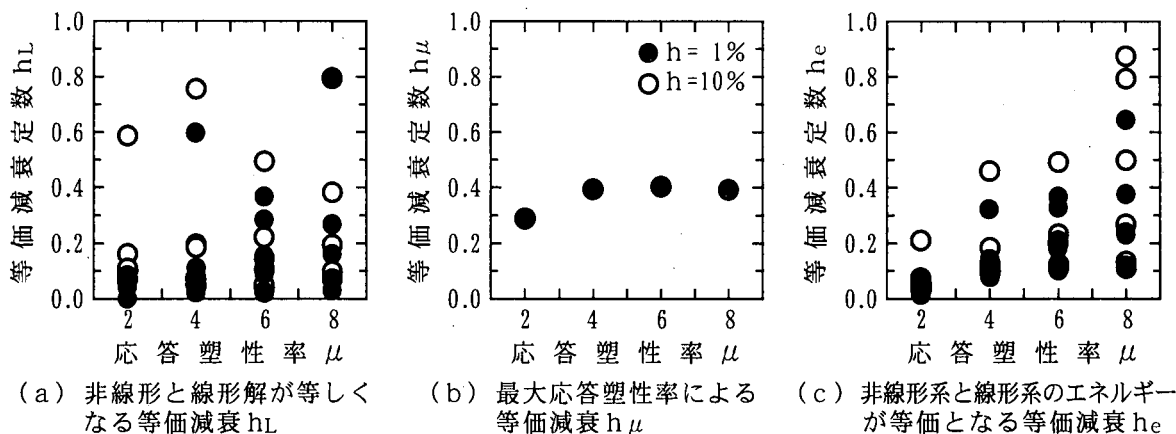


図-8 エネルギーの釣合に基づく等価減衰定数 h_e

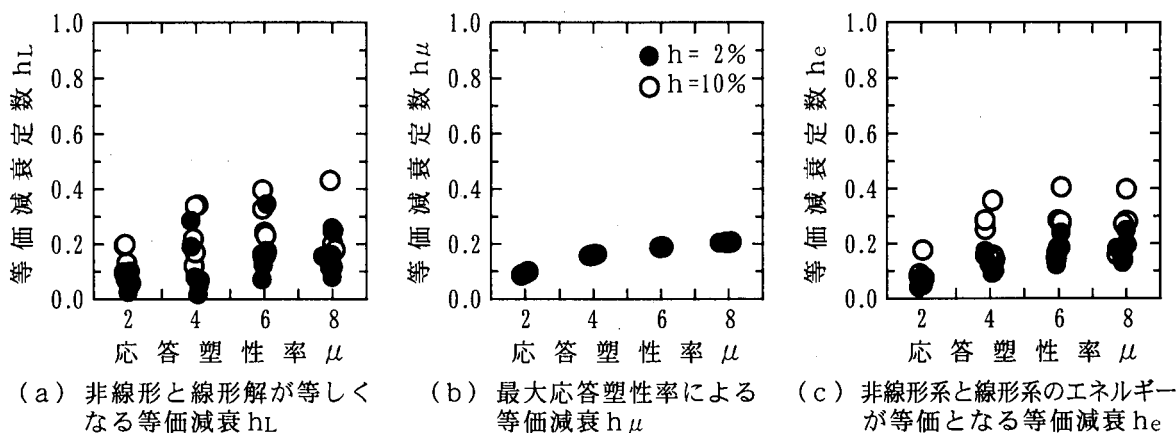
塑性率が大きくなるに伴い、初期固有周期 T_0 に対する卓越周期 T_1 の伸びが増加する傾向にある。同図(b)より、初期固有周期 T_0 、減衰定数 h_0 の1自由度系の最大応答加速度 $ACC(T_0, h_0)$ 、卓越周期 T_1 、減衰定数 h_0 の1自由度系の最大応答加速度 $ACC(T_1, h_0)$ の比は、バイリニアモデル、Takeda モデルとも、1.0より大きくなる場合と小さくなる場合がある。一般には、対象とする系の固有周期が長くなると応答加速度は小さくなるが、ここで対象とした系では必ずしもそうになっていない。これは、図-3に示したように標準加速度波形の加速度応答スペクトルが、長周期領域においても単純な減少関数となっていないからである。図(c)より、卓越周期 T_1 、減衰定数 h_0 の1自由度系の最大応答変位 $DIS(T_1, h_0)$ 、卓越周期 T_1 、減衰定数 h_L の1自由度系の最大応答変位 $DIS(T_1, h_L)$ の比は、バイリニアモデル、Takeda モデルとも1.0より小さくなっている。また、その比率は、応答塑性率が大きくなるとともに小さくなっており、ここで対象とした1自由度系の非線形応答には、履歴減衰による応答の低減効果が重要な役割を果たしていることがわかる。このことは、等価線形化モデルにおいて、等価減衰定数のモデル化が重要であることを示唆している。

4. 等価線形化モデル

図-6は、従来から良く用いられている等価線形化モデルを示したものである。等価剛性 k_{eq} 、等価減衰定数 h_{eq} とも、最大応答変位 δ_{max} に基づいて評価されている。実際には、非線形応答より得られる最大応答変位 δ_{max} より得られる等価剛性 k_{eq} 、等価減衰定数 h_{eq} を用いた等価線形化モデルでは、非線形応答変位を精度良く推定できないため、非線形応答変位の70%に相当する $0.7 \delta_{max}$ より得られる等価剛性 k_{eq} 、等価減衰定数 h_{eq} が用いられることが多い。しかし、ここで対象としたような剛性低下を伴わないバイリニアモデル



(1) パイリニアモデル



(2) Takedaモデル

図-9 応答塑性率と等価減衰定数

と剛性低下を伴う Takeda モデルではその非線形応答特性も異なるため、当然その最大応答を推定するための最適な等価線形化モデルも各履歴モデルによって異なることが予想される。ここでは、非線形応答変位から直接的に等価剛性 k_{eq} 、等価減衰定数 h_{eq} を求め、図-6 に示した最大応答変位に基づいた等価剛性 k_{eq} 、等価減衰定数 h_{eq} とどのような関係にあるかを検討する。

(1) 等価剛性 k_{eq}

図-4(1)に示したように非線形応答変位のフーリエ振幅が最大となる振動数 f_1 に相当する卓越周期 T_1 と、図-6 に示したように最大応答変位と原点を結んだ割線剛性 k_{eq} より得られる等価固有周期 T_{eq} の関係を整理すると図-7 が得られる。図より、等価固有周期 T_{eq} と卓越周期 T_1 の関係は、式(1)に示すような1次式で表すことができる。

$$T_1 = \alpha T_{eq} \quad (1)$$

ここで、 α は比例定数である。比例定数 α は、パイリニアモデルでは 0.64、Takeda モデルでは 0.81 となる。これは、パイリニアモデルでは最大応答変位の約 30～40%に相当する変位、Takeda モデルでは最大応答変位

の約 66%に相当する変位と原点を結んだ割線勾配を等価剛性 k_{eq} としたことに相当する。これより非線形応答変位の卓越周期 T_1 を等価線形化モデルで再現するためには、剛性低下を伴わないパイリニアモデルの方が、剛性低下を伴う Takeda モデルよりも大きな等価剛性が必要となることがわかる。

(2) 等価減衰定数 h_{eq}

等価減衰定数 h_{eq} の評価に関しては、図-6 に示したような定常振動を仮定することは、履歴減衰効果を過大評価することが指摘されている。ここでは、図-4(2)に示したように卓越周期 T_1 を有する 1 自由度系の線形応答変位の最大値が非線形応答変位の最大値に等しくなるようにして求めた等価減衰定数 h_L 、図-6 に示すように最大応答の定常 1 ループ当たりのエネルギー吸収量によって評価した等価減衰定数 $h_\mu = \Delta W / (4\pi \cdot W_e)$ 、図-8 に示すようにエネルギーの釣合に基づいて評価した等価減衰定数 h_e を比較した。図-9 は、上述の 3 種類の等価減衰定数 h_L 、 h_μ 、 h_e を履歴モデルごとに応答塑性率 μ で整理したものである。減衰定数 h_L は、応答塑性率 μ が増加するとともに、増加する傾向にある。また、構

表-1 非線形応答の再現性を検討した等価線形化モデル

	バイリニアモデル	Takedaモデル
等価線形化 モデル1	$T_{eq} = 0.64T(\mu)$ $h_{eq} = 0.52h(\mu)$	$T_{eq} = 0.81T(\mu)$ $h_{eq} = 1.10h(\mu)$
等価線形化 モデル2	$T_{eq} = T(\mu)$ $h_{eq} = 0.81h(\mu)$	$T_{eq} = T(\mu)$ $h_{eq} = 1.39h(\mu)$
等価線形化 モデル3	$T_{eq} = T(0.7\mu)$ $h_{eq} = h(0.7\mu)$	$T_{eq} = T(0.7\mu)$ $h_{eq} = h(0.7\mu)$

造減衰定数 h_0 の大きさの影響を受け、構造減衰定数 h_0 が大きい方が等価減衰定数 h_L も大きくなっている。等価減衰定数 h_μ は、構造減衰定数 h_0 の大小に関わらず、最大応答塑性率 μ によって一意的に決まっている。等価減衰定数 h_e は、構造減衰 h_0 の大きさの影響を受け、応答塑性率 μ が増加するとともに等価減衰定数 h_e も増加する傾向にある。図からわかるように、等価減衰定数 h_L と、等価減衰定数 h_e はほぼ同様な傾向にあるといえる。

5. 等価線形化モデルによる非線形応答の再現性

4. で示したように等価剛性 k_{eq} 、等価減衰定数 h_{eq} の評価方法には、様々な考え方がある。表-1 に示す3種類の等価線形化モデルに対する非線形応答の推定精度を検討する。

等価線形化モデル1は、図-4(1)に示した非線形応答変位の卓越周期 T_1 と、図-4(2)に示したように固有周期 T_1 を有する線形モデルの線形応答変位が非線形応答変位に等しくなるようにして求めた等価減衰定数 h_L および構造減衰定数 h_0 よりなる1自由度系モデルである。

等価線形化モデル2は、非線形応答変位の最大応答変位 $\delta_{\max}$ ($\mu = \delta_{\max}/\delta_y$) より定まる等価固有周期 $T(\mu)$ と、図-4(2)に示したように固有周期 $T(\mu)$ を有する線形モデルの線形応答変位と非線形応答変位が等しくなるように求めた等価減衰定数 h_L および構造減衰定数 h_0 よりなる1自由度系モデルである。

等価線形化モデル3は、非線形応答変位の最大応答変位 $\delta_{\max}$ の70%に相当する変位を有効変位 $0.7 \delta_{\max}$ として求めた等価固有周期 $T(0.7\mu)$ と等価減衰定数 $h(0.7\mu)$ および構造減衰定数 h_0 よりなる1自由度系モデルである。

表-1 に示すように、等価線形化モデル1の等価固有周期 T_1 は図-7 に示した、 $T(\mu) = \alpha T_{eq}$ の1次式によって表している。等価線形化モデル1、2の等価減衰定数 h_L は、ここで対象としたケースに対して h_L と $h(\mu)$ の比 $h_L/h(\mu)$ の平均値を求め、その平均値を比例定数

として、等価減衰定数 h_L を $h(\mu)$ の1次式によって表している。よって、表-1 に示す等価線形化モデル1～3は、最大応答変位 $\delta_{\max}$ より求められる応答塑性率 μ を基本とした式(2)、式(3)によって表わすことができる。

$$k(\mu) = \frac{k_1}{\mu} \{1 + \beta (\mu - 1)\} \quad (2)$$

$$T(\mu) = 2\pi \sqrt{m/(k(\mu) \cdot g)}$$

$$h(\mu) = \begin{cases} \frac{2\{\mu - (1 - \beta + \mu\beta)\}}{\pi\mu(1 - \beta + \mu\beta)} & (\text{バイリニア}) \\ \frac{1}{\pi} (1 - \mu^\alpha \frac{1 - \beta + \beta\mu}{\mu}) & (\text{Takeda}) \end{cases} \quad (3)$$

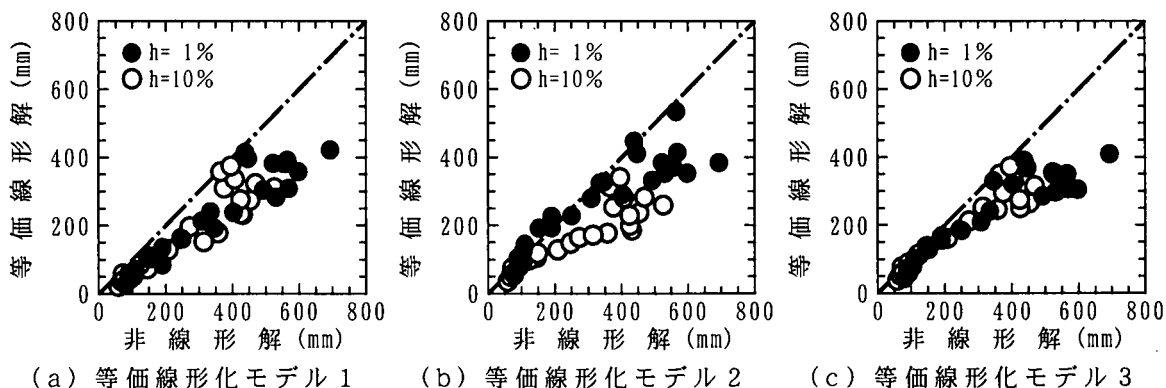
ここで、 k_1 、 β 、 m 、 α は図-1 に示したとおりである。 g は重力加速度である。

図-10 は、非線形動的解析解と等価線形化モデルによる線形解を比較したものである。等価線形化モデル1については、若干応答変位を小さめに、また応答加速度を大きめに推定する傾向がある。等価線形化モデル2、3は、ほぼ同程度の推定精度を有している。剛性低下を伴わないバイリニアモデルよりも、剛性低下を伴う Takeda モデルの方が非線形動的解析解に対する等価線形解の推定精度が良い。

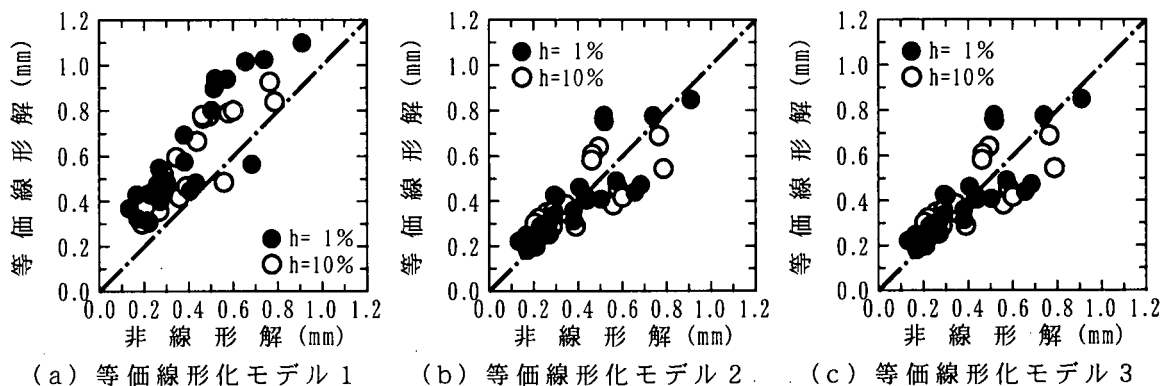
このように等価剛性 k_{eq} 、等価減衰定数 h_{eq} がそれぞれ異なる3種類の等価線形化モデルであっても非線形動的解析に対してほぼ同程度の再現性を有していることがわかる。このことが、最適な等価線形化モデルを選定することを難しくしていると言える。

6. 等価線形化法の収束性

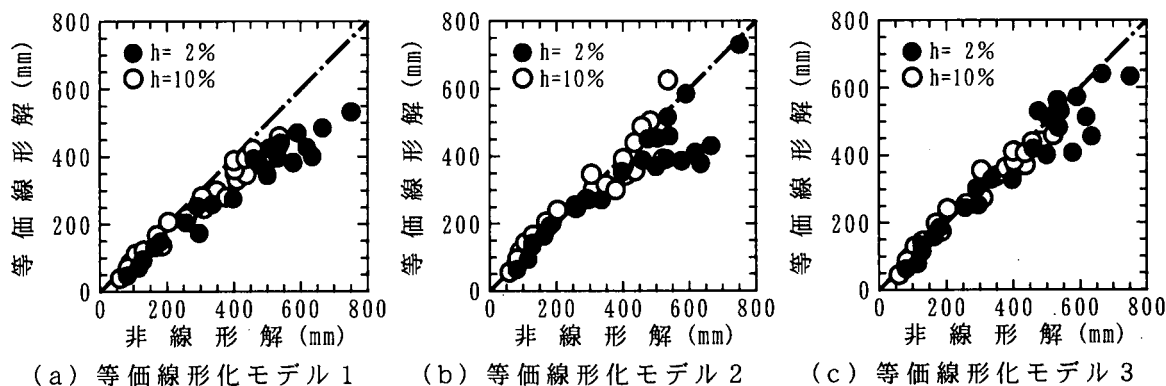
等価線形化モデル2を用いて、等価線形化法の収束性を検討する。等価線形化法は、まず最大応答変位 $\delta_{\max 0}$ (初期値)を仮定し、これに対する等価線形化モデルを作成して線形動的解析を行う。線形動的解析より得られた最大応答変位 $\delta_{\max}$ より、再び等価線形化モデルを設定して線形動的解析を行う。この過程を仮定した変形 $\delta_{\max 0}$ とそれによる等価線形化モデルを用いた線形動的解析より求められる変形 $\delta_{\max}$ が実用上等しいとみなせるまで、繰返し計算を行うのが等価線形化法である。図-11 は、等価線形化モデル2を用いて、上述の等価線形化法を行った場合の推定値の収束状況を示したものである。対象とした系は、バイリニアモデルは初期固有周期 0.5 秒、目標応答塑性率 8 の系、Takeda モデルは初期固有周期 0.5 秒、目標応答塑性率 6 の系である。最大応答変位の初期値 $\delta_{\max 0}$ は δ_y から $10 \delta_y$ の10種類を対象とした。バイリニアモデルでは、非線形応答の応答塑性率 8 に対して等価線



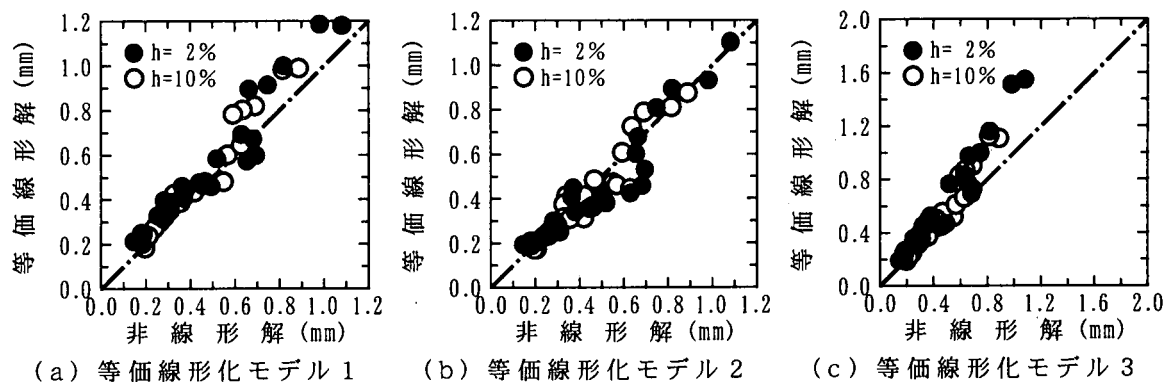
(1) バイリニアモデルにおける応答変位



(2) バイリニアモデルにおける応答加速度

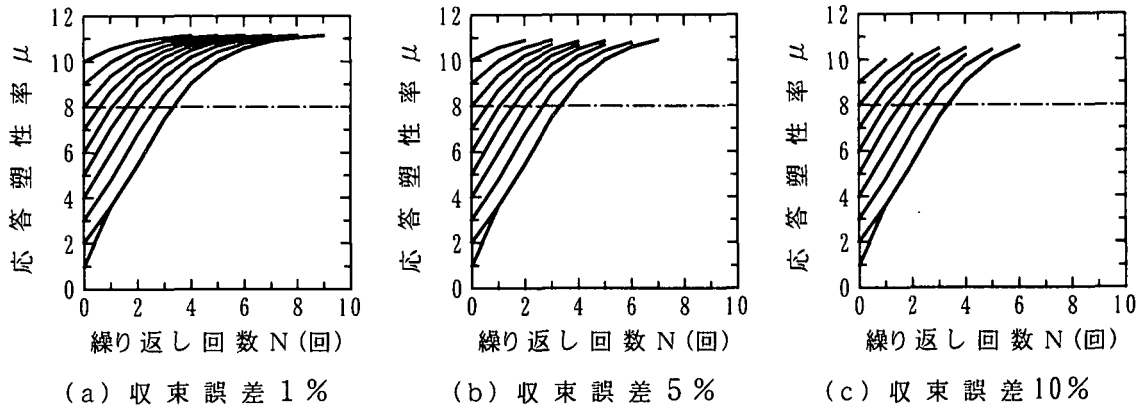


(3) Takeda モデルにおける応答変位

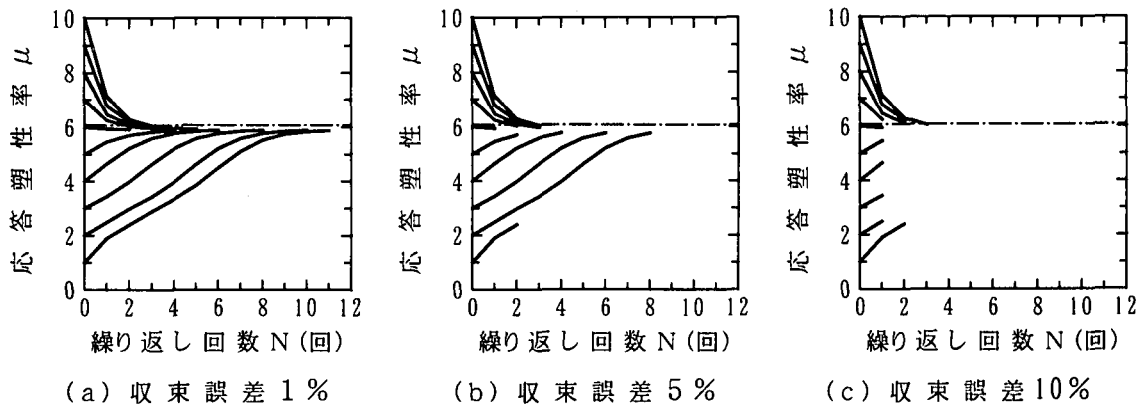


(4) Takeda モデルにおける応答加速度

図-10 等価線形化モデルによる非線形動的解析解の再現性



(1) バイリニアモデル(初期固有周期 0.5sec, $\mu=8$)



(2) Takedaモデル(初期固有周期0.5sec, $\mu=6$)

図-11 等価線形化法による収束状況(等価線形化モデル2)

形解は10付近に収束し2割の誤差が生じているが、初期値の影響は受けず、収束誤差が10%の場合にもほぼ同じ値に収束している。Takedaモデルでは、初期値が真値よりも小さい場合には収束誤差を1%にしないと真値に収束しないが、初期値が真値よりも大きい場合には収束誤差を10%とした場合にも真値に収束している。逆に真値よりも小さい初期値の場合には、真値よりも小さい応答塑性率に収束している。

以上より、等価線形化法を用いた非線形応答の推定精度は、等価線形化モデルだけでなく、初期値の影響、収束誤差の影響を受けることがわかる。

7. あとがき

等価線形化法に一般性を持たせることを目的に、1自由度系を対象に、その非線形応答をどのような等価剛性と等価減衰定数を用いれば精度良く推定できるかを解析的に検討した。以下に得られた結果を示す。

i) 非線形応答変位の卓越周期 T_1 を等価線形化モデルで再現するためには、剛性低下を伴わないバイリニアモデルの方が、剛性低下を伴うTakedaモデルよ

りも大きな等価剛性が必要となる。

ii) 非線形応答から直接的に求めた等価減衰定数 h_L は、構造減衰 h_0 の大きさの影響を受けるとともに、応答塑性率 μ が増加するのに伴い等価減衰定数 h_L も増加する傾向にある。エネルギーの釣合により評価した等価減衰定数 h_e も同様な傾向にある。

iii) 剛性低下を伴わないバイリニアモデルよりも、剛性低下を伴うTakedaモデルの方が、等価線形解の非線形動的解析解に対する推定精度がよい。

iv) 等価線形化法を用いた非線形応答の推定精度は、等価線形化モデルの影響、初期値の影響、収束誤差の影響を受ける。

参考文献

- 1) Priestley, M.J.N, Seible, F. and Calvi, G.M.: Seismic Design and Retrofit of Bridges, John Wiley & Sons, Inc., 1996, 川島一彦監訳: 橋梁の耐震設計と耐震補強, 技報堂, 1998.
- 2) 日本建築学会: 動的外乱に対する設計—現状と展望—, pp. 156-165, 1998.