

衝突ばねを用いた桁間衝突の解析精度

渡邊学歩¹・川島一彦²

¹学生会員 東京工業大学大学院修士課程 理工学研究科土木工学専攻
(〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)

²フェロー 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科 (同上)

1. まえがき

兵庫県南部地震以後、地震時における隣接桁間の衝突を見込んだ橋梁の応答評価に関する研究が多くなっている^{1) 2) 3)}。衝突を含む橋の地震応答を初めて解析的に取り扱ったのはTsengらであり、1971年サンフェルナンド地震で落橋した5/14曲線橋を対象とした解析⁴⁾を行っている。しかし、Tsengらを取り扱ったのは完全塑性衝突であり、これを完全弾性衝突とした解析を行ったのはKawashimaらであり、5/14をモデル化した曲線橋模型の振動台実験の解析を用い、実験結果をうまく解析できることを示した⁵⁾。Kawashimaらが用いたのは、橋桁が衝突した時にのみ剛性を持つ衝突ばねである。

$$k = \begin{cases} k_I & \cdots \Delta u \leq -u_G \\ 0 & \cdots \Delta u \geq -u_G \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 Δu は桁間の相対変位 ($\Delta u = u_2 - u_1$)、 u_G は桁間の遊間、 k_I は衝突ばねの剛性である。従って、衝突ばねによる、衝突力 P_I は次式のように表される。

$$P_I = \begin{cases} k_I \Delta u_I & \cdots \Delta u \leq -u_G \\ 0 & \cdots \Delta u \geq -u_G \end{cases} \quad (2)$$

ここで、

$$\Delta u_I = \Delta u - u_G \quad (3)$$

しかし、式(1)によるモデル化を行った際には衝突ばねの剛性 k_I により衝突現象の再現性が大きく変化するために、衝突ばねの剛性の設定は慎重を期す必要がある。衝突ばねを用いる際の剛性、要素分割、積分時間間隔等の条件については、理論解との比較により川島⁶⁾によって詳細な検討が行われている。ここでは、これをさらに発展させて、衝突ばねによる構造物間の衝突現象の解析精度に関して検討したので、その結果を報告する。

2. 衝突のメカニズム

衝突が起こると、桁間にどのような運動が起こるかを知らるために、桁を単純化して弾性棒の衝突問題を考えてみよう。この場合、棒の接触から離反までの一連の過程は棒内部を伝わる応力波の伝播によって説明される。応力波の伝播は以下の一次元の波動

方程式によって表される。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

ここに、

$$C_0^2 = \frac{\rho}{E} \quad (5)$$

ここで、 C_0 は波動伝播速度であり、 ρ は棒の密度、 E は棒の弾性係数である。

式(4)の解は一般に二つの任意関数 f 、 g の和から成るダランベール解として次式で与えられる、

$$u = F(x + C_0 t) + g(x - C_0 t) \quad (6)$$

この解において、関数 f は棒の正方向に伝わる波を、関数 g は負方向に伝わる波をそれぞれ表している。

いま、図1に示すように、断面 A_1 、弾性係数 E_1 を有する弾性棒Ⅰが軸方向に速度 V_1 で、断面 A_2 、弾性係数 E_2 を有する弾性棒Ⅱが軸方向に速度 V_2 でそれぞれ運動し、 $V_1 > V_2$ であるため衝突する状態を考える。衝突によって、棒Ⅰ、棒Ⅱ内部には衝突面から応力波が伝播していく。応力波は棒Ⅰでは伝播速度 C_1 で負側に、棒Ⅱ中では伝播速度 C_2 で正側に進行するため、棒Ⅰ、棒Ⅱ内の粒子の変位は以下のように与えられる。

$$u_1 = f(x + C_1 t), \quad u_2 = g(x - C_2 t) \quad (7)$$

したがって、棒中の応力は、

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1 \frac{du_1}{dx} = E_1 f'(x + C_1 t) \\ \sigma_2 &= E_2 \frac{du_2}{dx} = E_2 g'(x - C_2 t) \end{aligned} \quad (8)$$

また、棒Ⅰ、棒Ⅱ内部の各点の速度(粒子速度、Particle Velocity)は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} v_1 &= V_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} = V_1 + C_1 f'(x + C_1 t) \\ v_2 &= V_2 + \frac{\partial u_2}{\partial t} = V_2 - C_2 g'(x - C_2 t) \end{aligned} \quad (9)$$

衝突面における作用力および粒子速度の連続条件から、次式が成立する。

$$\begin{aligned} A_1 E_1 f'(C_1 t) &= A_2 E_2 g'(-C_2 t) \\ V_1 + C_1 f'(C_1 t) &= V_2 - C_2 g'(-C_2 t) \end{aligned} \quad (10)$$

したがって、 f' 、 g' を求めると、

$$f' = \frac{-A_2 E_2 (V_1 - V_2)}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2}, \quad g' = \frac{-A_1 E_1 (V_1 - V_2)}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2} \quad (11)$$

したがって、式 (8) より σ_1 、 σ_2 は

$$\sigma_1 = \frac{-A_1 E_1 E_2 (V_1 - V_2)}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2}, \quad \sigma_2 = \frac{-A_1 E_1 E_2 (V_1 - V_2)}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2} \quad (12)$$

また、接触面の粒子速度は次式となる。

$$v_1 = v_2 = \frac{A_1 E_1 C_2 V_1 + A_2 E_2 C_1 V_2}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2} \quad (13)$$

長さが L 、断面積が A 、弾性係数が E と等しい特徴を持つ 2 本の棒が衝突する場合は、 $A_1 = A_2 = A$ 、 $E_1 = E_2 = E$ であるから、 $C_1 = C_2 = C_0$ となり、衝突面での応力 σ および粒子速度 v は以下の通りになる。

$$\sigma = \frac{E(V_1 - V_2)}{2C_0}, \quad v = \frac{V_1 - V_2}{2} \quad (14)$$

この応力波が棒 I、棒 II 内を伝播しそれぞれ反対面に到達すると、棒 I、棒 II は接触したままともに速度が v となる。その後、応力波はそれぞれ全反射して、衝突面へと戻ってくるが、この反射した応力波によって棒 II の粒子速度は v_2 に、また棒 I の粒子速度は v_1 にそれぞれ変化する。応力波が衝突面に到達するとともに接触が終わり、2 つの衝突が終了する。したがって、この場合には、次式で与えられる応力波が棒長の 2 倍の距離を伝播する時間が衝突継続時間 T_f となる。

$$T_f = 2L\sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (15)$$

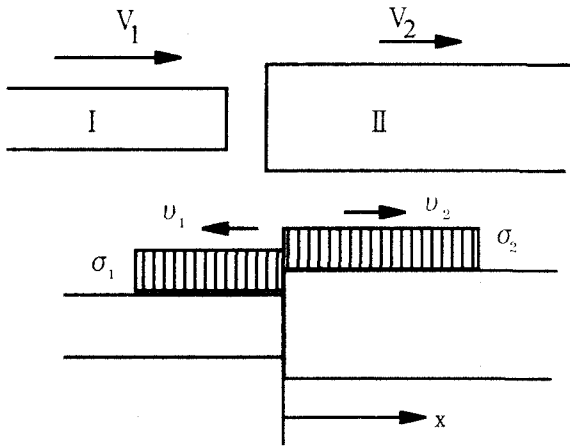


図1 衝突時の応力の伝播

3. 衝突ばねを用いた衝突現象の解析

以上に示した、棒の衝突現象を対象に、式 (1) による衝突ばねを用いた解析がどの程度の精度を有するかを解析する。参考文献⁶⁾との整合性をはかるために、ここでは等長、等断面の2本の棒が近づく方向に同一初速度 V_0 で進行し衝突する場合を解析する

こととする。2つの棒の特性は以下のように与えることとし、単位は任意のディメンジョンを取るものとする。

弾性係数 : $E=100$
断面積 : $A=1$
密度 : $\rho=0.1$
長さ : $L=10$
初速度 : $V_0=0.1$

この場合には、式 (15) による衝突解析時間は $T_f = 2/\sqrt{10}$ となり、応力度 σ は次式のようにになる。

$$\sigma = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad (16)$$

解析では、図2 (b) に示すように、棒を10要素に分割し、接触面に式 (1) による衝突ばねを設けた。積分時間間隔 Δt は0.001秒であり、衝突継続時間 T_f の1/500以下である。減衰定数は0としている。衝突ばねの剛性 k_f が高いため、強い非線形を有する解析となる。このため、運動方程式を満足させるためには、イテレーションを行った。

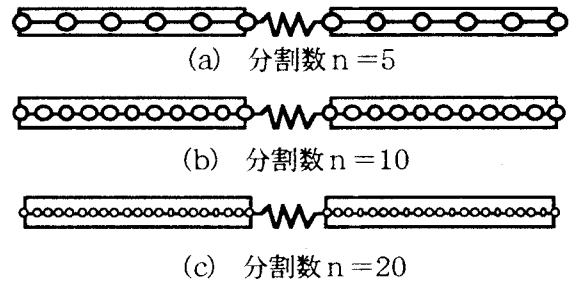


図2 衝突ばねを用いた棒のモデル化

図3には衝突中の各棒内に生じる応力および粒子速度の分布の変化を示す。ここでは時間を無次元化するために、上述した衝突継続時間 T_f を0.2単位時間として、0.05単位時間ごとの応力および粒子速度の値を示した。衝突理論によれば、衝突開始と同時に応力波の伝播により圧縮応力領域が広がり0.1単位時間後には衝突面とは反対側の端部（以後、非衝突面と呼ぶ）に達する。その後、応力波の全反射に伴って非衝突面より圧縮応力が徐々に解放されて行き、すべての領域で応力がゼロになった瞬間に衝突が終了する。衝突ばねを用いて解析した結果も比較のために図3に示している。これによれば、応力フロントにおける応力勾配が小さいが、数値解析結果は全体として厳密解の特徴をよく表している。

応力および粒子速度の時刻歴を棒Iに着目して示すと図4のようになる。衝突面においては、衝突継続時間 T_f (0.2単位時間) だけ式 (16) による値を保つステップ関数として応力度が生じ、非衝突面では応力度はゼロであるはずである。また、棒Iの速度

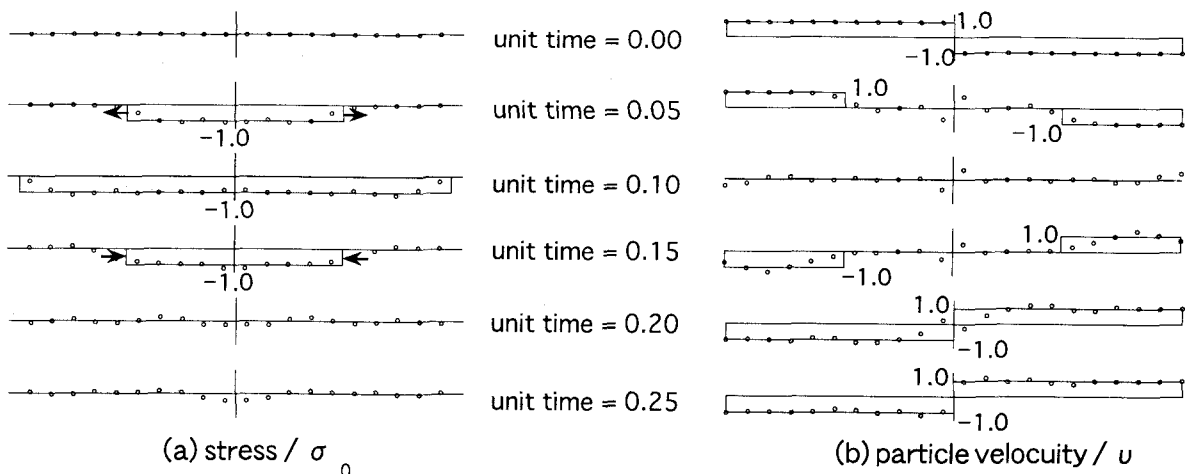


図3 衝突時の応力伝播と粒子速度の変化

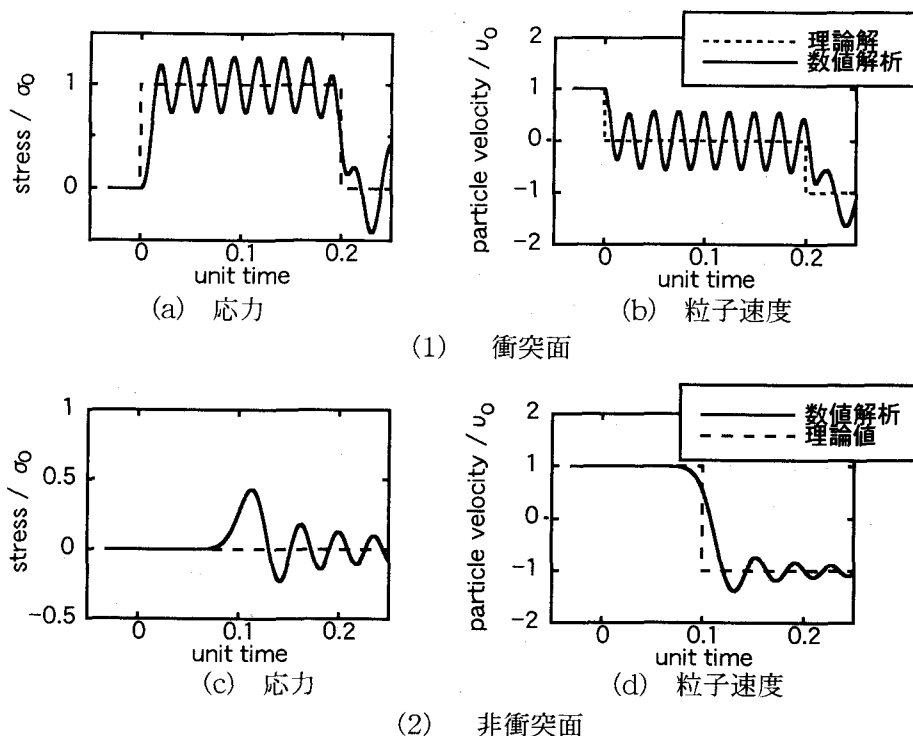


図4 応力および粒子速度 (棒 I)

は、衝突面においては、衝突前には v_0 であるが、衝突開始と同時に0となり、衝突継続時間 T_f の間はこの値を保ち、衝突継続時間 T_f に達した瞬間に $-v_0$ となる。また非衝突面では衝突開始後0.1単位時間たった瞬間に v_0 から $-v_0$ に変化する。これに対して数値解析では、応力度、速度ともに、厳密解のまわりを小刻みに振動するが、全体としてはこれらの特徴をよく再現している。

4. 数値解析精度に及ぼす各種要因の影響

4.1 衝突ばねの剛性

棒要素の軸方向剛性 nEA/L に対する衝突ばねの剛性 k_f の比を γ とし、以下のように定義する。

$$\gamma = k_f \frac{nEA}{L} = \frac{k_f L}{nEA} \quad (17)$$

ここで、 n は棒の要素分割数である。

剛性比 γ を0.1~100まで変化させた場合の棒I~棒II間の相対変位応答を示すと図5のようになる。これによれば、 $\gamma=0.1$ の場合には明らかに相対変位が負となり、2つの棒間に生じるオーバーラップが大きすぎるために衝突現象を表すためには、不適切

である。 γ を0.1から順次大きくしていくと、オーバーラップは小さくなっていくが、 γ が1より大きくなると、2つの棒は衝突継続時間内で小刻みな接触と離反を繰り返すようになる。

表1には式(3)による衝突ばねの変形量の最大値 $\Delta u_{l\max}$ を示す。 γ を0.1から順次大きくして行くと、図6に示すように $\gamma=1$ までは衝突ばねの変形量 $\Delta u_{l\max}$ は γ に反比例して減少するが $\gamma>1$ となると、 $\Delta u_{l\max}$ は概ね $1/\sqrt{\gamma}$ に比例する。

表1 剛性比 γ と $\Delta u_{l\max}$ 、 P_l 、 $A_{\max}$ の関係

γ	$\Delta u_{l\max}/L \ (\times 10^{-4})$	P_l/N	$A_{\max}$
0.1	30.7	0.972	0.838
0.2	16.0	1.01	1.54
0.5	7.18	1.13	3.19
1.0	4.58	1.45	5.18
2.0	3.14	1.99	8.01
10	1.38	4.36	22.7
100	0.420	13.3	80.5

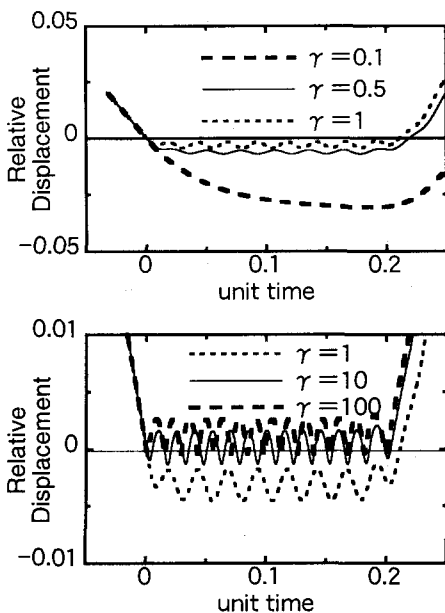


図5 剛性比 γ と相対応答変位の関係

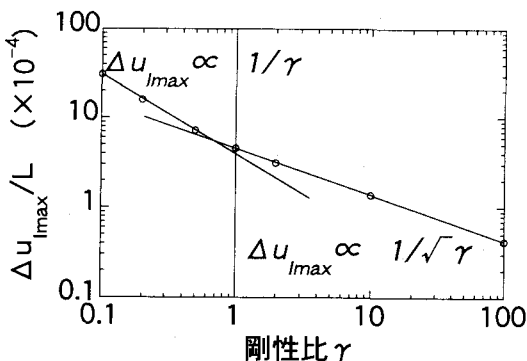


図6 衝突ばねの変形量に与える剛性比 γ の影響

次に図7、図8には剛性比 γ が粒子速度および軸方向応力に与える影響を示す。いずれの場合にも、 γ が大きくなるに従って、厳密解のまわりを振動するようになる。また、図9は剛性比を変化させた場合の衝突面に作用する衝突力 P_l を示したものである。衝突力 P_l は γ によって大きく変化し、例えば、 $\gamma=1$ の場合には $P_l \approx 0.5$ 単位力であるが、 $\gamma=100$ になると $P_l \approx 4.2$ 単位力となる。また γ が10程度以上となると、衝突継続時間にパルス状の衝突力が何回も生じるようになるが、これは前述したように、 γ が大きくなると衝突継続時間内に小刻みな接触と離反が繰り返すためである。

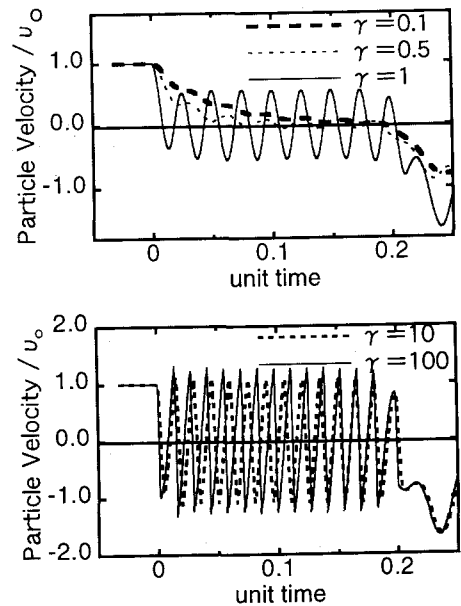


図7 剛性比 γ と粒子速度の関係

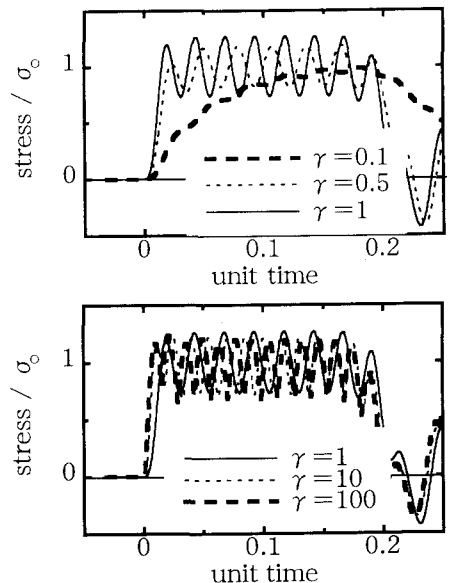


図8 剛性比 γ と応力の関係

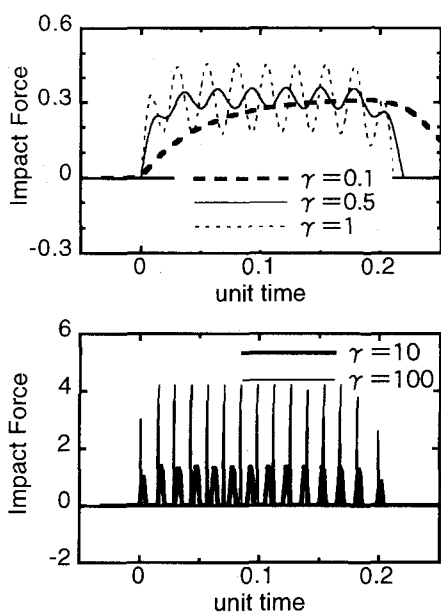


図9 剛性比 γ と衝突力の関係

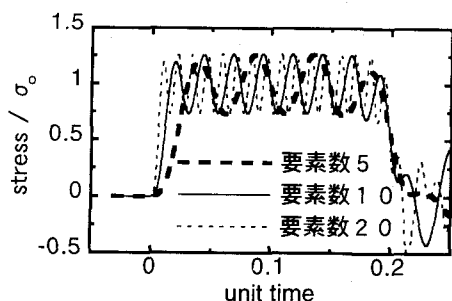


図10 要素数が応力に与える影響

4.2 要素分割数 n の影響

剛性比 γ を1に固定して要素分割数 n を5、10、20と変化させた場合の衝突力および加速度の変化を表2に示す。ここで、 N は軸力の理論値を意味し、式(16)より $N = A\sigma$ で計算した。また図10は要素分割数 n を変化させた場合の応力を示したものである。要素分割数 n を増加させても衝突力や応力はほとんど変化しない。したがって、最大加速度は要素分割数 n に比例して大きくなる。これは要素分割数 n が2倍に増加すると節点の質量は1/2になるため、同じ大きさの慣性力を得るために必要な加速度が2倍になるためである。

表2 要素分割数 n を変化させた場合の P_I 、 $A_{\max}$

n	P_I/N	$A_{\max}$
5	1.445	2.59
10	1.448	5.18
20	1.442	10.36

4.3 積分時間間隔 Δt の影響

図11は積分時間間隔 Δt が応答値に与える影響を調べたものである。いずれも衝突面の応答値を示している。 $\Delta t/T_I$ が0.1程度までであれば応答値に及ぼす Δt の影響はあまりないことがわかる。

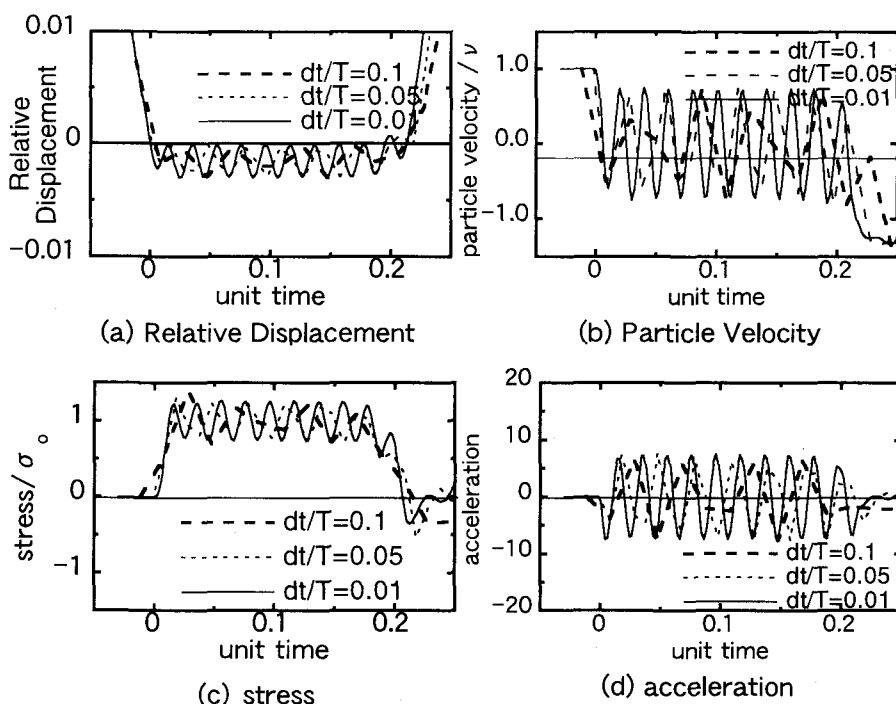


図11 積分時間間隔 Δt の影響

5. 結論

衝突ばねを用いた等断面、等長の2つの棒の衝突を検討した本解析の結果、以下の事項が指摘できる。

1) 衝突ばねの剛性 k_f は衝突後の速度および、衝突時の軸力には大きな影響を与えない。

2) 衝突継続時間内での粒子速度および衝突力の変化は、剛性比 γ に影響を受ける。 γ が一定であるという条件下で衝突ばねの剛性 k_f を大きくしても衝突力には変化はないが、剛性比 γ を大きくして行くと衝突力は急激に大きくなる。このような場合、衝突面では小刻みな衝突が起こり、パルス状の衝突力が繰り返し作用することから衝突現象を正しく表していない。また γ が1を下回ると衝突継続時間 T_f が理論値よりも長くなり、衝突現象の再現性が低下する。

3) 剛性比 γ が一定であれば要素分割数 n が増加しても相対変位、粒子速度、応力、衝突力はほとんど変化しないが、応答加速度は要素分割数 n の増加に伴い増大する。

4) 積分時間間隔 Δt は少なくとも衝突継続時間 T_f の1/10以下とすれば、解析精度にはほとんど影響を与えない。

参考文献

- 1) Kasai, K, Jagiasi, A.R., Jen, V. : Inelastic Vibration Phase Theory for Seismic Pounding Mitigation, Journal of Structural Engineering, ACSE, pp.61-68, 1996.1
- 2) Liu, W.D., Rieles, J.M., Imbsen, R.A, Priestley, M.J.N., Seible, F., Nobari, F.S. and Yang, R.: Response of a Major Highway Bridge during the Whitter Earthquake, Proc. 4th U.S. National Conference on Earthquake Engineering, 1990
- 3) 矢部正明, 武村浩志, 川島一彦: 直橋および斜橋の桁間衝突とその影響, 構造工学論文集, 43A, 781-791, 1997
- 4) Tseng, W.S. and Penzien, J. : Analytical Investigations of the Seismic Response of Long Multiple-span Highway Bridges, Report No. EERC73-12, Earthquake Engineering Reseach Center, University of California, Berkeley, USA, 1973
- 5) Kawashima, K. and Penzien, J. : Theoretical and Experimental Dynamic Behavior of a Curved Model Bridge Structure, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 7, pp.129-145, 19796
- 6) 川島一彦: 動的解析における衝突モデル化に関する一考察, 土木学会論文報告集 第308号, 昭和56年