第２回地震時保有耐力法に基づく橋梁の耐震設計
に関するシンポジウム講演論文集（1998年12月）

非線形動的解析に用いるRayleigh減衰のモデル化に関する提案

臺原　直[1]・大月　哲[2]・矢部正明[3]

[1]正会員　株式会社 長大　（〒114-0013　東京都北区東田端2-1-3(天宮ビル))
[2]正会員　工学博士　株式会社 長大　（〒305-0821　茨城県つくば市春日3-22-6)
[3]正会員　株式会社 長大　（　同上　）

１．はじめに

兵庫県南部地震以後，道路橋における耐震設計では非線形動的解析が実施される機会が増えている。特に，地震時の設計振動単位系が，１基の下部構造とそれが支持する上部構造という単純な振動系とならないようなラーメン橋，アーチ橋，斜張橋のように，地震時保有水平耐力法に基づいた簡便な耐震設計法が確立されていない橋梁においてその傾向が強い。前述のような多自由度系を対象に非線形動的解析を実施する際に判断が必要となるものに，減衰のモデル化がある。減衰モデルには様々な提案がある。例えば、減衰マトリックスが質量マトリックスに比例するとした質量比例型，剛性マトリックスに比例するとした剛性比例型，質量マトリックスと剛性マトリックスに比例するとしたRayleigh型がよく知られている。また，固有値解析結果を用いてひずみエネルギー比例法によって求めたモード減衰定数に等価となる等価減衰マトリックスも用いられている。多自由度系という観点から言えば，モード減衰定数に等価となる等価減衰マトリックスを用いるのが最も良いと思われるが，この減衰モデルを用いて非線形動的解析を行うと，高次の振動モードのモード減衰定数が小さいために，応答加速度に高振動数成分が多く含まれその結果，非現実的な応答加速度が得られたり，不平衡力を十分に小さくできないために収束しないことがよくある。このため，実務の場では，基準となる振動数の選択によっては，地震応答に寄与する振動モードのモード減衰定数を概ね再現でき、高振動数域での減衰定数が大きくなるRayleigh型減衰が用いられることが多い。通常，Rayleigh型減衰で採用される基準振動数は，２つだけであり，上述したような橋梁の場合，多数の振動モードが地震応答に寄与することから，減衰マトリックスの作成には，十分な注意が必要となる。

本報告では，減衰モデルとしてRayleigh型減衰を用いる場合に，その基準となる振動数を客観的に求める方法を提案する。ここで提案する方法は，モーダルアナリシスによる地震応答が，一般化座標と振動モードの積より定まる点に着目して，一般化座標を構成するモード寄与率や固有値（固有円振動数）および入力地震動の応答スペクトルに関する重みを，各モード減衰定数に与え，この重み付けされたモード減衰定数を利用することによって、Rayleigh型減衰によってモデル化する際の質量マトリックスと剛性マトリックスに乗じる係数を合理的に求めるというものである。

２．解析対象橋梁と入力地震動

図-1に示すような鋼アーチ橋を対象に、減衰モデルの違いが地震応答に与える影響を比較した。

各部材に与える減衰定数は、補剛桁５％、橋脚および鉛直材２％、アーチリブ１％とした。非線形動的解析を行う場合の材料非線形を考慮した部材は、橋脚、鉛直材およびアーチリブで、補剛桁は線形部材として扱った。

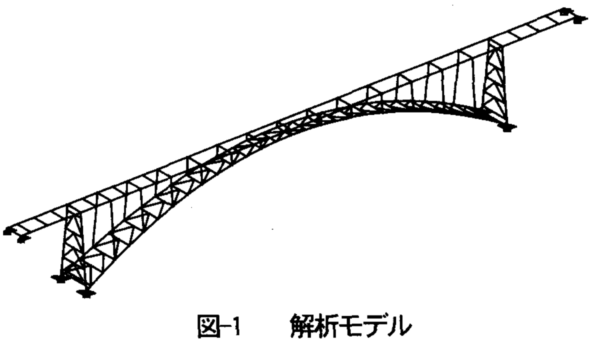


図-1　　解析モデル

入力地震動は、道路橋示方書に規定された地震時保有水平耐力法に用いる標準波形TEPEⅡ－Ⅰ－１を用いた。地震動の入力方向は橋軸方向とした。

3．地震応答とRayleigh型減衰のモデル化に用いる重み係数[1]

一般的な地震動の基本式は次式で与えられる。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{x}_0 \qquad (1)$$

ここに、

x ：構造物の地盤に対する相対変位ベクトル

$\ddot{x}_0$ ：地盤加速度を成分とするベクトル

$\ddot{x} + \ddot{x}_0$ が絶対加速度を意味する

M ：質量マトリックス

K ：剛性マトリックス

C ：減衰マトリックス

非線形動的解析では、上式Kx の項が、x の線形関数にならないで、$f(x)$のような非線形関数になる。この式はx を未知数として誘導されたものであり、既知量M,K,C はx には無関係で、時間的にも変化しない定量とされる。$\ddot{x}_0$ は観測値から得られた既知量である。

MとK に関してはその内容は構造物の組み方や物理定数から求めることができるが、C に関しては、人為的にオイルダンパーのような強力な減衰装置を付した場合を別にして、構造物が本来持っている減衰機能を（1）式に合うように数式で合理的に表現することは容易でない。実務の場で良く用いられているのは、この構造減衰を振動形状によって変化させようというものである。線形解析では任意の時刻の振動形状は振動モードの一次結合で表されることから、モード成分毎に異なった減衰を与えることで（1）式の内容を完成させようとする考えは自然である。

今、時間に関係しないマトリックスΦ を用いて、

$$x = \Phi y \qquad (2)$$

とおき、（1）式の左からΦ^t を乗ずるとy を未知数とする次式を得る。

$$\Phi^t M\Phi\ddot{y} + \Phi^t C\Phi\dot{y} + \Phi^t K\Phi y = -\Phi^t M\ddot{x}_0 \qquad (3)$$

固有値解析の理論より、ある固有ベクトルΦ を用いれば、

$$\Phi^t M\Phi = E \quad \text{（単位行列）} \qquad (4)$$

$$\Phi^t K\Phi = W \quad \text{（対角行列，一般にその対角要素は全て正）}$$

を満足する。このΦ の任意の列ベクトルΦ_i は自由振動の方程式

$$\omega_i^2 M\Phi_i - K\Phi_i = 0 \qquad (5)$$

を満足するので振動モードベクトルと呼ばれる。これをω_i の小さい方から１次，２次と並べてΦ_i をi 次振動モード，ω_i をi 次振動数という。W のi 行対角要素はω_i^2 に一致する。

ここで、（3）の左辺第２項について次式

$$\Phi^t C\Phi = H \quad \text{（対角行列）} \qquad (6)$$

が成り立つと仮定する。オイルダンパーのような減衰機構に対しては（6）式は成立たないが、構造物がそれ自体に保有している弱い減衰機能に対しては、それがモード毎に（6）式のように対角要素に集約された形で$\dot{y}$ に対して作用すると仮定することは必ずしも不合理ではない。特にC の形が、

$$C = \alpha M + \beta K \quad \therefore C\dot{x} = \alpha M\dot{x} + \beta K\dot{x} \qquad (7)$$

のように運動量に比例する減衰項と、速度を変形のように考えた速度ひずみに比例する減衰項の和になっているときは（4）式の関係より（6）式は必ず成立つ。

（6）式を仮定するならば、（3）式の各行は独立となり、第i 行はH の第i 対角要素を$2h_i\omega_i$ とおいて、

$$\ddot{y}_i + 2\omega_i h_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -R_i \ddot{x}_0 \qquad (8)$$

となってy_i 以外の未知数を一切含まない２階微分方程式が得られる。

ここに、R_i は$\Phi^t M$ の第i 行要素であり、i 次のモード寄与率と呼ばれる。

H の第i 行要素を$2h_i\omega_i$ とおくのは、（8）式の形が減衰のある一質点系の強制振動の基本形であり、この解は指数部が

$$e^{-h_i\omega_i t} \qquad (9)$$

の形となって、無次元量h_i が対数減衰率を与えることによる。このh_i をモード減衰定数と呼んでいる。

（6）式は通常の２階微分方程式として解くことができ、$h_i < 1, h_i = 1, h_i > 1$ によって関数形を異にするy_i が時刻t の関数として得られる。

任意の時刻においてy_i がすべてのモードで求まれば$x = \Phi y$ より変位x が求まり、任意の時刻の応答値が得られる。このようにして解を求める方法をモーダルアナリシスと呼んでいる。

次に（6）式を満足するC の実際的な決め方を考える。この方法は大別して２つある。１つの方法はH の方を先に決めてしまう方法である。つまり、

$$\Phi^t C\Phi = H$$

$$C = \Phi^{-t} H\Phi^{-1} \qquad (10)$$

でC はH から逆算される。今、振動モードと振動数ω_i は既に得られているものとし、

$$H = \begin{bmatrix} 2h_1\omega_1 & & \\ & 2h_2\omega_2 & \\ & & \cdots \end{bmatrix} \qquad (11)$$

とする。このh_i をi 次振動モードΦ_i の形状に応じて決めることを考える。例えば第i 次モードで構造物中のある部分A だけが振動しており、A のもつ減衰機能が実験，経験等よりh_A の形で与えられているときはh_A をもってi 次モードのモード減衰定数h_i とする。構造A とB が同

時に振動しているモードに対してはそのモードにおける構造AとBの振動エネルギーやひずみエネルギーに比例してh_Aとh_Bを配分したものをh_iとする。一般的には構造部分がN_S個あるときモード減衰定数h_iは次式で算出される。

$$h_i = \sum_{j=1}^{N_S} e_{ij} h_{sj} \tag{12}$$

ここに、e_{ij}は第i次モードにおける構造jの振動エネルギーやひずみエネルギーに対する比率で次式によって求められる

$$e_{ij} = \begin{cases} \Phi_{ij}^t M_j \Phi_{ij} \left(\text{振動エネルギー}\right) \\ \dfrac{\Phi_{ij}^t K_j \Phi_{ij}}{\omega_i^{\ 2}} \left(\text{ひずみエネルギー}\right) \end{cases} \tag{13}$$

h_{sj} :構造jのもつ減衰定数

Φ_{ij}, M_j, K_jはi次モードと質量、剛性から構造jの部分に関するもののみ抜き出したものである。また、モードは正規化されている。

このh_iを（8）式に用いてy_iを求め、次いで$\boldsymbol{x}$を求めれば、減衰をモード毎に考慮した応答値が得られる。この$\boldsymbol{x}$が（6）式の仮定下に基本式（1）を満足することは容易に証明される。この方法の特長は（6）式が成立てば（8）式の形に各モードの分離が可能なことを利用し、（6）式のh_iを各モードの形状に応じて事前に定めるところにあり、Cそのものは直接応答値を求める計算に必要としない。

この方法の問題点の一つは構造各部の減衰h_A等をモード次数に無関係に定めていることである。例えば、構造Aだけが振動しているモードならば、1次であろうと100次であろうとそのモード減衰定数はh_Aとなる。経験的に用いられているh_A等は比較的低次の振動形から得られたものであり、構造各部が激しく変形する高次モードでは、（6）式の形になるとしてもモード減衰定数は低次振動とは異なると考えるのが自然である。

もう一つの方法はCを（7）式

$$C = \alpha M + \beta K$$

の形に仮定する方法であり、このような形の減衰をRayleigh減衰と呼び、Cを直接使用する非線形解析等でよく用いられる。この場合にはi次モードのモード減衰定数h_iは

$$\Phi_i^t C \Phi_i = \alpha + \beta\omega_i^2 = 2h_i\omega_i$$

より、

$$h_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \tag{14}$$

となって、振動数ω_iの関数となる。α, βは指定された定数で、減衰の性質上両方とも正、少なくとも負にはならない。この方法では構造各部のもつ減衰機能h_A, h_B等はα, βを通してのみ評価されることになる。

（14）式はhをωの連続関数とみるとき、$\omega = 0$と$h = \dfrac{\beta}{2}\omega$を漸近線とする双曲線になる。$\beta > 0$のときは$h$の値は$\omega$の増大とともに大きくなるから、高次モード程減衰は大きくなり、$h > 1$もあり得る。

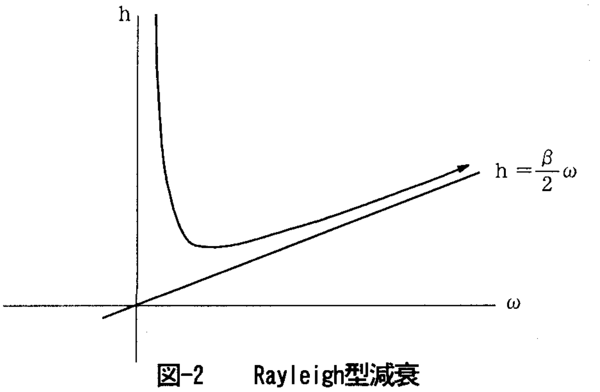


図-2　Rayleigh型減衰

Cを（7）式の形におく物理的根拠は、減衰の効果を運動量に比例する項と速度ひずみに比例する項の和とすることであるが、他にも、（7）式を用いれば行列としてのCのサイズがKと同じになり、非線形応答計算で出てくる

$$\left[aC + bK + dM\right]$$

のような行列がKと同じ空疎性を保持することで、計算上大きなメリットが得られること、高次モード程減衰が大きくなる傾向を保持していること等も考慮されている。

次の問題は定数α, βをいかに決めるかである。Cを（7）式のようにおいても（8）式は成立ち、（14）式のh_iがモード減衰定数としてy_iに作用することに変わりはない以上、既述したモーダルアナリシスで得られたモード減衰（12）と何らかの整合がなければならない。全てのh_iをモーダルアナリシスのH中の要素と同じにするCは

$$C = \Phi^{-t} H \Phi^{-1}$$

で定められるが、これは充填行列であって、直接Cを用いる計算には容量的な制約が大きい上に、1で述べたように高次モードでの減衰が過小となる問題も含んでいる。

従ってCを直接用いる方法では、Cに（7）式の形を仮定し、応答計算に支配的なモードに対してのみ（14）式と（12）式を整合させることが合理的である。

今、モーダルアナリシスで得られた（12）式によるモード減衰を$\bar{h}_i$とおき、（7）式でCと仮定したことによる（14）式で定義されるモード減衰定数をh_iとする。ここでh_iと$\bar{h}_i$の差の全モードにわたる和

$$\sum^{N}\left(h_i - \bar{h}_i\right)^2 g_i \qquad (15)$$

又は、

$$\sum^{N}\left|h_i - \bar{h}_i\right| g_i \qquad (16)$$

を最小とするようにα, β を決定することを試みる。g_i はそのモードが応答に与える影響を考慮した重み係数である。N はモード総数であるが実用上は適当な次数までで打ち切ってよい。

モーダルアナリシスではi 次モードでの（8）式の解 y_i はほぼ次式で表される数

$$S_i = \frac{R_i}{\omega_i} Sv_i \qquad (17)$$

に比例している。ここにR_i はi 次モードの考えている地震方向のモード寄与率であり、Sv_i は作用する地震波のデュアメル積分の最大値を最大速度応答スペクトルSv_i で近似表示したものである。$R_i = 0$，$Sv_i = 0$ のモードは応答計算に全く寄与しないので、$h_i, \bar{h}_i$ がどんなに異なっても答えは変わらない。よって、このようなモードでは重み$g_i = 0$ としてよく、結局重み係数g_i は（17）式のS_i に比例させてもよいことになる。g_i を定数倍しても最小値を与えるα, β には変わりないから、（17）式S_i 中の最大値をS_0 とすれば、

$$g_i = S_i / S_0 \qquad (18)$$

で与えてよい。地震波によって重みを変えたくない場合は、

$$S_i = R_i / \omega_i \qquad (19)$$

で簡略化してもよい。

（19）式の形は$R_i \fallingdotseq 0$ でない限り低次の振動モード程重みが大きいことを意味している。ただし、低次の振動モードにのみh_j と$\bar{h}_j$ を合わせれば高次の振動モードでの差異が大きくなり、（15），（16）式の最小値が得られるとは限らない。なお加速度応答に対しては応答値はほぼ、

$$S_i' = R_i \omega_i Sv_i$$

に比例するので高次モード程重みを大きくすべきと考えられるが、減衰C は着目量で変わるべき物理量ではないことと、構造物に生じる変形や断面力は低次の振動モードの寄与が大きいことから、ここでは、（18），（19）式の重み係数を用いることにした。

4. Rayleigh型減衰の係数の求め方の違いが減衰定数に与える影響

本報告では、（15），（16）式を最小とするRayleigh型減衰の係数α, β を次のような方法で求めた。

前述したように、Rayleigh型減衰によって得られる減衰定数と振動数の関係がモード減衰定数と等しくなるように、Rayleigh型減衰の係数を定める際に次の３種類の重み係数を考慮した。

①全ての振動モードの重み係数を1.0とした場合。

②重み係数Ａ：地震応答に寄与する振動モードのモード寄与率を固有値で除した値を重み係数とした場合で、３の（18），（19）式によって求められる。

③重み係数Ｂ：重み係数Ａに地震波のデュアメル積分の最大値を乗じた値を重み係数とした場合で、３の（17），（18）式によって求められる。

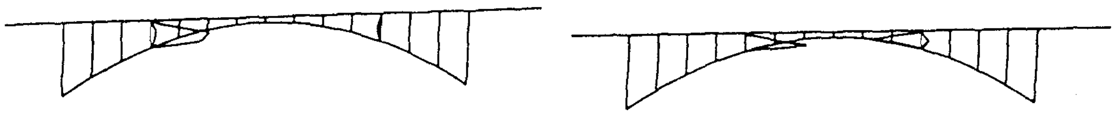
ここでは、上述した３つの重み係数を用いるとともに、（15）式に示したようにモード減衰定数$\bar{h}_i$ とRayleigh型減衰による減衰定数h_i の残差の２乗和が最小となるように最小２乗法によってRayleigh型減衰の係数α, β を定める方法（以下、最小２乗法とする）と、（16）式に示したように残差の絶対値和が最小となるように振動モードから２つの振動数を選択し、Rayleigh型減衰の係数α, β を定める方法（以下、絶対値和最小法とする）の２つを用いた。これより、全部で６種類のRayleigh型減衰が作成されることになる。

表-1は６種類のRayleigh型減衰の２係数α, β と、残差の絶対値和が最小となるときの振動モードの振動数を示してある。また、**図-3**には、その振動モード形を示してある。

表-1　Rayleigh型減衰の係数（αM＋βK）

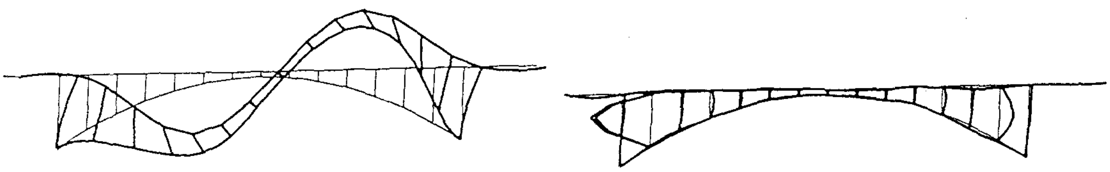
	絶対値和の最小				最小２乗法	
	着目振動数(Hz)		α	β	α	β
	f₁	f₂				
全ての振動モードの重み係数を1.0とした場合	21次 5.27	52次 13.57	0.95751	0.00034	0.43252	0.00044
重み係数A	1次 0.49	13次 4.17	0.15581	0.00127	0.16539	0.00085
重み係数B	1次 0.49	10次 4.01	0.15346	0.00152	0.15647	0.00155

図-4に絶対値和最小法によってRayleigh型減衰の係数α, β を求める場合の重み係数と残差の関係を示す。全ての振動モードで重み係数を1.0とした場合は、低次モードで残差が大きくなっており、残差の平均値は、重み係数A，Bを用いた場合に比べて極めて大きいことがわかる。また、重み係数A，Bによって求めたRayleigh型減衰のモード減衰定数に対する残差は小さく地震応答に寄与す



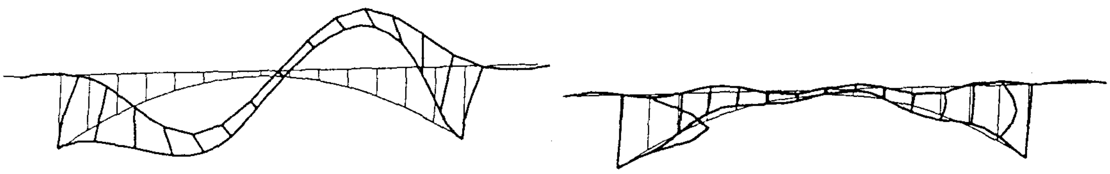
(a) 21 次モード　　(b) 52 次モード

（1） 全ての振動モードの重み係数を 1.0 とした場合



(a) 1次モード　　(b) 13 次モード

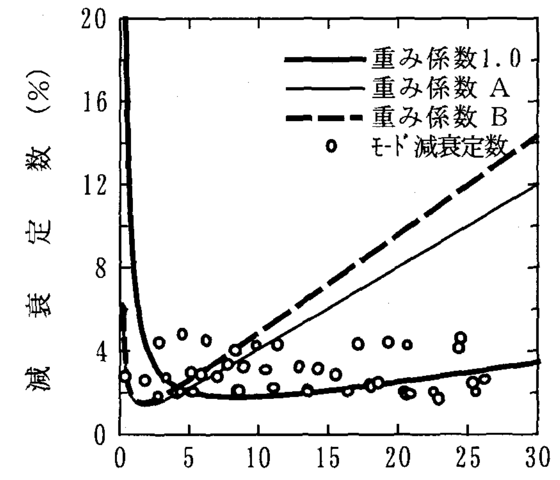
（2） 各振動モードに重み係数Aを乗じた場合



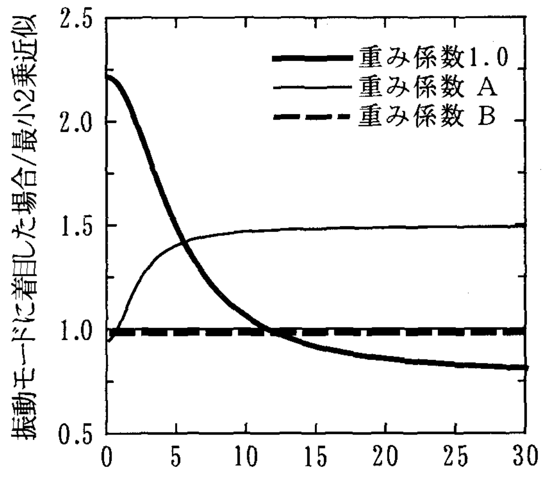
(a) 1次モード　　(b) 10 次モード

（3） 各振動モードに重み係数Bを乗じた場合

図-3　Rayleight型減衰の係数を決めるために用いた振動モード

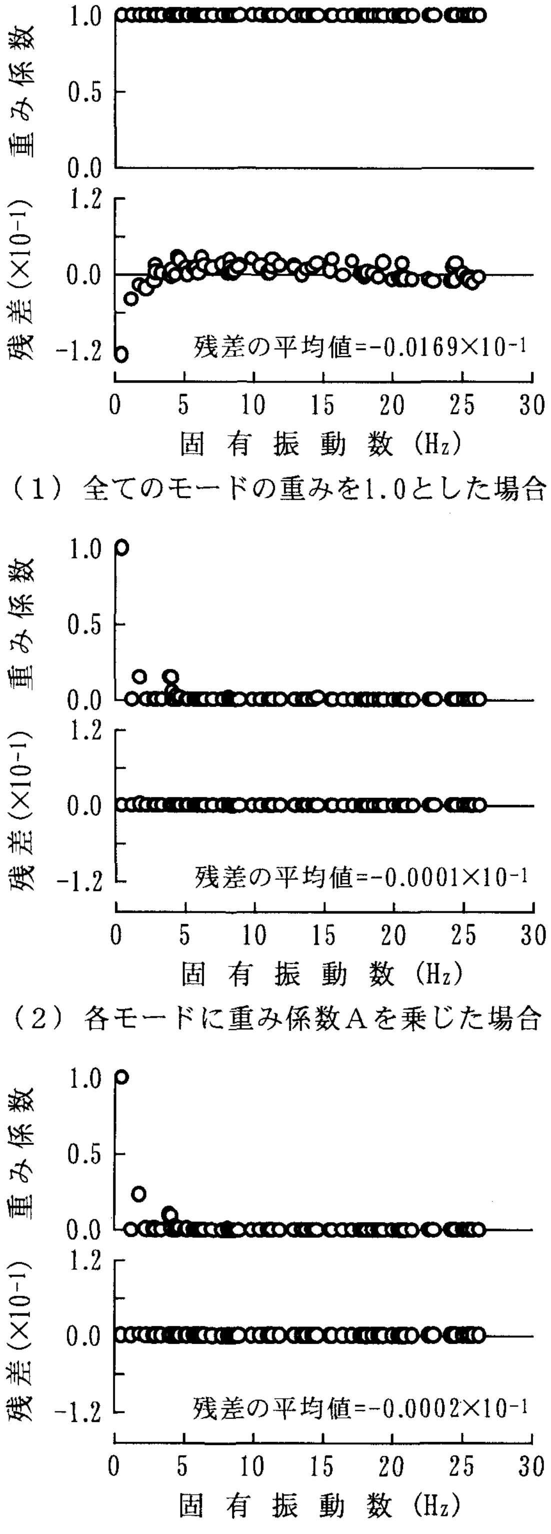


図－5　各種の重み係数より得られる Rayleigh型減衰



図－6　振動モードに着目した場合と最小２乗法によった場合の比較

振動モードの減衰定数を精度良く再現できていることがわかる。



（1） 全てのモードの重みを1.0とした場合

（2） 各モードに重み係数Aを乗じた場合

（3） 各モードに重み係数Bを乗じた場合

図－4　各種の重み係数と残差の関係

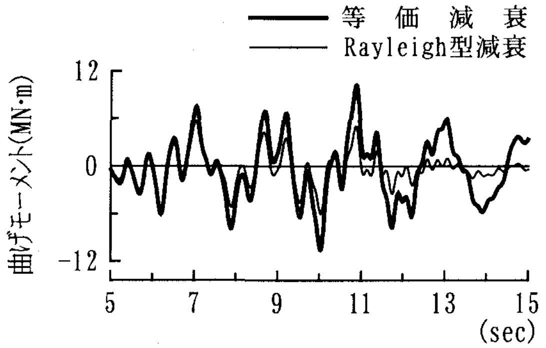
図-5に各種の重み係数を用いて求めた、Rayleigh型減衰を示す。図は絶対値和最小法によって求めたRayleigh型減衰を示している。全ての振動モードで重み係数を1.0とした場合には他の２つの重み係数に比較して、低次の振動モードでの減衰定数が大きくなっている。これは、**表-1**に示したように全ての固有振動モードで重み係数を1.0とした場合に着目した振動モードが21次と52次という高次の振動モードであることが影響している。これに対して、重み係数A，Bを用いた場合には、着目した振動モードが１次と13次、１次と10次というように比較的低次の振動モードであることから、低次振動数域でモード減衰定数との差が小さくなっている。

図-6に絶対値和最小法と最小２乗法によって求めたRayleigh型減衰の比較を示す。全てのモードで重み係数を1.0とした場合には、絶対値和最小法と最小２乗法では、減衰定数が広い振動数範囲に渡って大きく異なっていることがわかる。重み係数Aを用いた場合には低次振動モードで、重み係数Bを用いた場合には全ての振動数帯域で絶対値和最小法と最小２乗法によって求めたRayleigh型減衰がほぼ等しい値を与えていることがわかる。

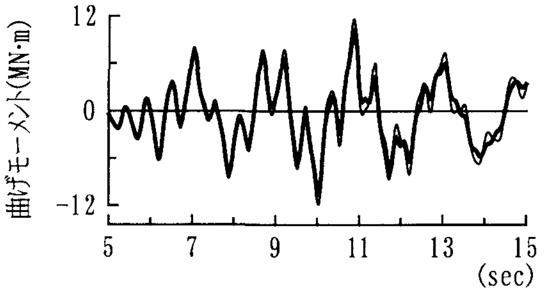
以上より、重み係数A，Bを用いれば絶対値和最小法と最小２乗法により求めたRayleigh型減衰は、ほぼ等しいことがわかる。よって、以後の検討には絶対値和最小法によって求めたRayleight型減衰を用いる。

5．線形地震応答解析への適用

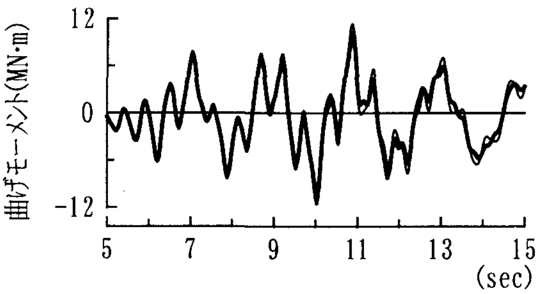
図-7に線形地震応答解析において、モード減衰定数に関する等価減衰を用いた場合と各種重み係数を用いて求めたRayleigh型減衰を用いた場合のアーチリブ基部の曲げモーメントの比較を示す。**図-8**にはアーチリブ基部の軸力の比較を示す。応答波形は、最大値発生時刻付近の５秒～15秒間を示した。軸力に関しては、どの重み係数を用いた場合でも、等価減衰を用いた地震応答解析とほぼ同じ応答値を示している。曲げモーメントに関しては、全ての振動モードで重み係数を1.0とした場合には、等価減衰を用いた解析より小さい応答値となっている。重み係数A，重み係数Bを用いた解析では、等価減衰を用いた解析結果とほぼ同程度の応答値を示している。これは、Rayleigh型減衰の係数α,βの決め方によって、Rayleigh型減衰より求まる減衰定数とモード減衰定数とが大きく異なる振動モードと、両者がほぼ等しくなる振動モードがあるからである。例えば、軸力では、10，12，13次の振動モードによる応答が卓越しているが、これらの振動モードの減衰定数はどの重み係数を用いて求めたRayleigh型減衰でもモード減衰定数とほぼ同程度の値となっている。曲げモーメントでは、１次と３次の振動モードの応答が卓越しており、これらの振動モードに対してはα,βの決め方によって減衰が異なりその影響が応答値の差となっているからである。



（1）全ての振動モードの重み係数を1.0とした場合

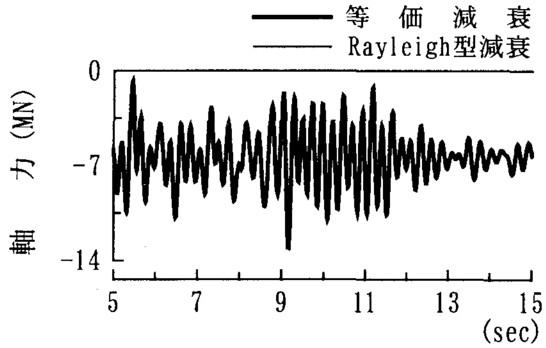


（2）各振動モードに重み係数Aを乗じた場合

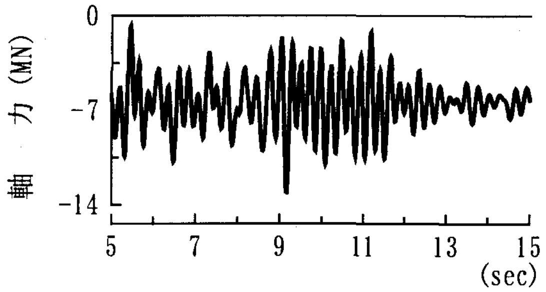


（3）各振動モードに重み係数Bを乗じた場合

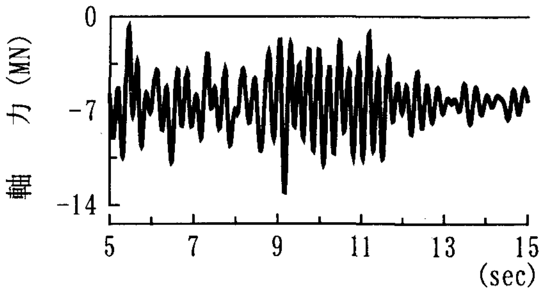
図－7　線形応答における等価減衰とRayleigh型減衰の比較：アーチリブ部の曲げモーメント



（1）全ての振動モードの重み係数を1.0とした場合



（2）各振動モードに重み係数Aを乗じた場合



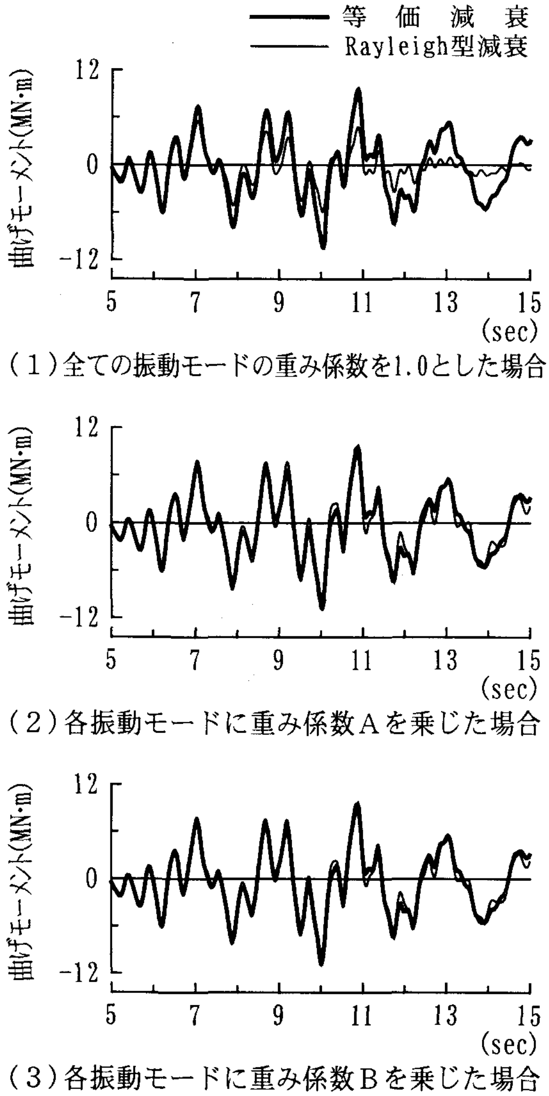
（3）各振動モードに重み係数Bを乗じた場合

図－8　線形応答における等価減衰とRayleigh型減衰の比較：アーチリブ部の軸力

6．非線形地震応答解析への適用

図-9に非線形地震応答解析における等価減衰を用いた場合と各種重み係数を用いて求めたRayleigh型減衰とのアーチリブ基部の曲げモーメントの比較を示す。**図-10**にアーチリブ基部の軸力の比較を示す。応答波形は、最大値発生時刻付近の５秒～15秒間を示した。

等価減衰とRayleigh型減衰による応答値の傾向は、線形地震応答解析の結果と同様の傾向を示しているが、全ての振動モードで重み係数を1.0にした場合には、ここで着目したアーチリブは非線形域に入らず線形域に留まっている。

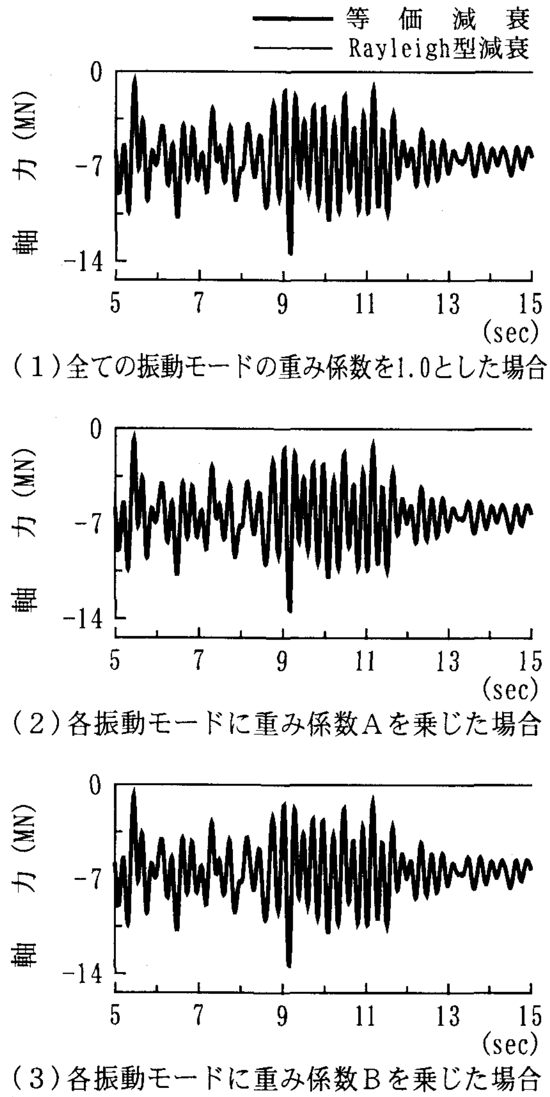


（1）全ての振動モードの重み係数を1.0とした場合

（2）各振動モードに重み係数Aを乗じた場合

（3）各振動モードに重み係数Bを乗じた場合

図－9　非線形応答における等価減衰とRayleigh型減衰の比較：アーチリブ部の曲げモーメント



（1）全ての振動モードの重み係数を1.0とした場合

（2）各振動モードに重み係数Aを乗じた場合

（3）各振動モードに重み係数Bを乗じた場合

図－10　非線形応答における等価減衰とRayleigh型減衰の比較：アーチリブ部の軸力

7．まとめ

Rayleigh型減衰の係数α, βを決定する方法として、全振動モードの重み係数を1.0として決定する方法、地震応答に寄与する振動モードを考慮した重み係数（重み係数A）を用いて決定する方法、地震応答に寄与する振動モードおよび地震動の影響を考慮した重み係数（重み係数B）を用いて決定する方法についてその適用性を検討した。

1）重み係数A, Bを用いて求めたRayleigh型減衰とモード減衰定数に関する等価減衰を用いた地震応答との間には大きな差が生じないことがわかった。

2）重み係数A，Bを用いる限りにおいては、絶対値和最小法と最小２乗法によって得られるRayleigh型減衰を用いた場合、両者は同じ地震応答が得られることが確認された。

しかし、同じ方向の地震応答解析を行いながら、本来構造物が有している固有の性質である減衰効果を地震動によってその減衰モデルを変化させることには、疑問が残る。この点に関しては更に詳細な検討が必要である。

謝辞：ここで提案したRayleigh型減衰の質量マトリックスと剛性マトリックスに乗じる係数を，モード減衰定数より最小２乗法によって求めるというアイデアは，東京工業大学教授川島一彦先生と本論文の第３著者との議論において川島先生が提案されたものである。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

1）大月：Rayleight減衰マトリックスの最適化　長大社内資料