

波動方程式の理論解に基づく空港舗装の逆解析

竹原 和也¹・小澤 良明²・松井 邦人³

¹学生会員 東京電機大学 理工学研究科 (〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

E-mail : 09rmk18@ms.dendai.ac.jp

²正会員 センチュリテクノ株式会社(〒103-0001 東京都中央区日本橋小伝馬町2番8号)

³フェロー会員 東京電機大学 理工学部建築・都市環境学系(〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

本研究は、波動方程式の理論解に基づく逆解析法の有効性を確認することが目的である。舗装の表面に衝撃荷重が作用することによりたわみ波形が伝播する。舗装構造がフォークトモデルで構成されると仮定して算出したこの波形と FWD 波形が一致するように各層のフォークトモデルのパラメータを推定することを行った。本研究では、さらに各層の層弾性係数を複素剛性と仮定して逆解析を行い、フォークトモデルとの結果を比較考察する。使用する FWD 試験データ米国航空局試験施設で測定されたものである。

Key Words : wave propagation, FWD, backcalculation, Voigt solid, Complex modulus

1. はじめに

舗装の構造評価のための非破壊試験法として FWD は広く普及している。今や多くの国々でこの試験結果に基づき維持管理計画を策定する方向にある。FWD 試験データを分析する方法として、荷重とたわみのピーク値を用いた静的逆解析法が主流であり、多くのソフトウェアが開発されている¹⁾。FWD 試験では時系列データを計測できるにも関わらず、ピーク値だけの利用では貴重なデータを無視していると考えられる。動的逆解析の先駆的研究は Uzan²⁾による研究である。菊田ら³⁾、Chatti ら⁴⁾、Ji⁵⁾らも動的解析に FEM を用いて逆解析を行っている。

本研究では、波動方程式の理論解をコード化した Wave-PALS (Wave Propagation Analysis for Layered Systems)を用いて波動伝播解析を行い⁶⁾、これを組み込んだ Wave BALM (Wave propagation based Back Analysis for Layer Moduli)を用いて逆解析を行っている⁷⁾。動的逆解析の場合未知数の数は層数の2倍になり、センサーの数より多くなる可能性もある。未知数の数が多くても、安定してパラメータの値を推定できることを確認することも本研究の目的である。

著者らは米国の連邦航空局試験センターで行われた FWD 試験データの提供を受け、本ソフトウェアを用いて逆解析を行い、その成果の一部を既に発表

している⁸⁾。そこでは、フォークトモデルを用いて逆解析を行った。アスファルト混合物の粘弾性として複素剛性モデルがしばしば用いられており、FWD 試験の逆解析においても複素剛性モデルが用いられている^{4),5)}。室内試験の調和加振では複素剛性モデルが用いられているが、周波数により複素剛性の値が異なることも明らかになっている。FWD 試験は衝撃載荷試験であり、複数の周波数が混在している。

本研究では、舗装各層の力学特性をフォークトモデルと複素剛性モデルで表し逆解析を行い、FWD 試験の動的逆解析に適する力学モデルの適否を明らかにすることが目的である。

2. 順解析に用いた理論

舗装構造を平行な層からなる半無限多層構造でモデル化することができるものとする。舗装表面で鉛直方向に作用する衝撃荷重は円形等分布すると仮定して、図-1のような円柱座標系を用いると、平衡方程式を式(1)のように書くことができる。各層の力学特性にフォークトモデルと複素剛性モデルを用いて解析を行っている。

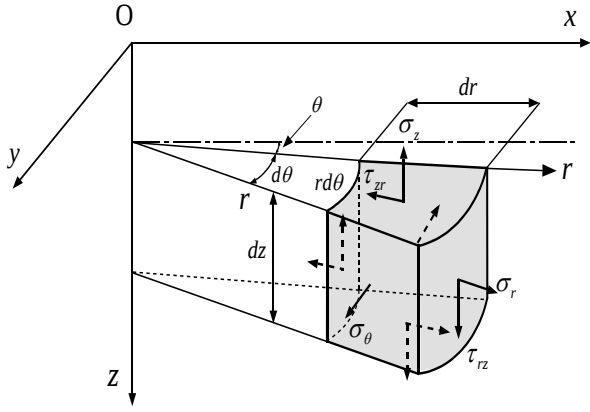


図-1 軸対称円柱座標系の応力

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (1b)$$

ここに、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ はそれぞれ r 方向、 θ 方向、 z 方向の垂直応力であり、 τ_{rz} はせん断応力である。また、 u_r, u_z はそれぞれ r 方向および z 方向の変位、 ρ は密度である。

ひずみと変位の間には、式(2)のような関係がある。

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (2a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (2b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2c)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (2d)$$

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ は、それぞれ r 方向、 θ 方向、 z 方向の垂直ひずみであり、 γ_{rz} はせん断ひずみである。応力とひずみの間にはフォークトモデルが適用でき、ポアソン比を一定であると仮定すると、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} b+2c & b & b & 0 \\ b & b+2c & b & 0 \\ b & b & b+2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (3a)$$

ここに、

$$b = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (3b)$$

また、 ν はポアソン比である。

D はフォークトモデルのとき、 E はヤング係数、 F は粘性係数(剛性比例型)とすると、

$$D = E + F \frac{d}{dt} \quad (4a)$$

複素剛性のとき、実部を E_R 、虚部を E_I とすると、

$$D = E_R + iE_I \quad (4b)$$

と書くことができる。

多層構造表面に動的荷重 $P(t)$ が半径 a の円に等分布していると仮定すると、境界条件は式(5)のように書くことができる。

$$\sigma_z(r, 0, t) = -p(t) \quad |r| \leq a \quad (5a)$$

$$= 0 \quad |r| > a \quad (5b)$$

$$\tau_{rz}(r, 0, t) = 0 \quad r \geq 0 \quad (5c)$$

ここに、

$$p(t) = P(t)/(\pi a^2) \quad (5d)$$

式(1)-(5)は空間座標 r, z と時間座標 t の関数である。フォークトモデルを対象としてこれらの式の解き方は文献(6)に記した。しかし、複素剛性においても同様に解くことができる。

3. 試験舗装と FWD データ

本研究で用いるデータは米国連邦航空局舗装試験施設(National Airport Pavement Test Facility (NAPTF), FAA William J. Hughes Technical Center, Atlantic City)で行われた FWD 試験データである。FWD 試験は、表-1 に示す 4 種類の舗装断面で行われており、Section 1 はコンクリート舗装で、Section 2 - Section 4 はアスファルト舗装である。また、Section 1 - Section 3 の路床は剛性が低く、Section 4 の路床は剛性が高い。Section 1 の上層路盤はエコノクリート(貧配合コンクリート)であり、コンクリート舗装のコンクリートよりかなり剛性が低いので、4 層モデルで逆解析を行う。Section 2 の 1 層目はアスファルト層と歴青安定処理層から成るが、どちらも米国空港施工基準(Standards for specifying construction of airports)では P401 と区分され剛性が同じであると考えられているので、これらを 1 層とした 3 層モデルで逆解析を行った。Section 3, Section 4 の 1 層目はアスファルト層(P401)、2 層目はどちらも碎石層(P209)である。下層路盤材(P154)は No.10 ふるい通過量が 80% である。表中の loading area は B777 and B747 ギア荷重が 20,000-30,000 回通過している領域である。no loading area はその影響をほとんど受けていない箇所である。

コンクリート舗装では版中央で FWD 試験が行われているが、ギア荷重が通過しているかどうかは不明である。逆解析に用いた舗装断面情報は表-2 に示す。ポアソン比は一般値を使用しており、密度は測定値を使用している。また、FWD 試験データの逆解析で実測データを解析たわみとの比較に用いる範囲は、D0 たわみがピーク値の 50%を超える時刻と D150 のたわみがピークの 50%まで減少する時刻としている(図-2)。FWD 試験データはピーク値付近の値は保証しているが、たわみの小さな範囲では値を保証していない。したがって、本研究ではたわみの大きな範囲(50%以上の範囲)で解析を行っている。

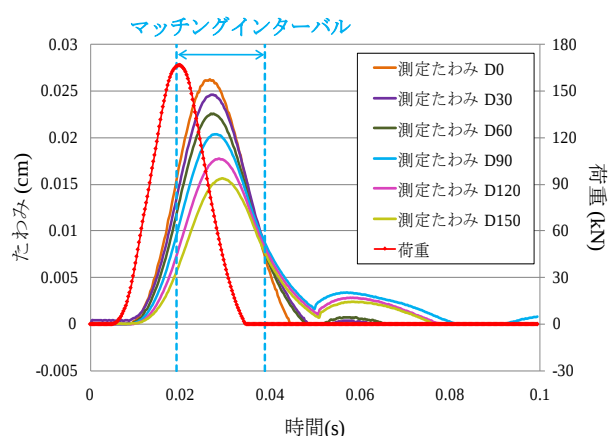


図-2 たわみのマッチング範囲

表-1 試験舗装断面

試験舗装	1層目	2層目	3層目	4層目	備考
Section1	6.096m x 6.096m PCC スラブ 層厚H = 0.279m	P306 エコノクリート, 層厚H=0.156 m	P154 路盤, 層厚H=0.213m	剛性が低い路床	
Section2	P401 アスファルト, 層厚H = 0.127m	P401 アスファルト安定処理, 層厚H=0.124 m	P154 路盤, 層厚H=0.752 m	剛性が低い路床	Loading area (載荷履歴が有る場合) No loading area (載荷履歴が無い場合)
Section3	P401 アスファルト, 層厚H = 0.127m	P209 碎石路盤, 層厚H = 0.197 m	P154 路盤, 層厚H = 0.924 m	剛性が低い路床	Loading area (載荷履歴が有る場合) No loading area (載荷履歴が無い場合)
Section4	P401 アスファルト, 層厚H = 0.133 m	P209 碎石路盤, 層厚H = 0.276 m	剛性が高い路床		Loading area (載荷履歴が有る場合) No loading area (載荷履歴が無い場合)

表-2 逆解析に用いた舗装断面情報

試験舗装	材料	密度(kg/m³)	ポアソン比	層厚(cm)	初期弾性係数の範囲 (MPa)
Section 1	1層目	PCCスラブ	0.2	27.9	20,000 - 50,000
	2層目	エコノクリート	0.2	15.6	15,000 - 30,000
	3層目	路盤	0.35	21.3	100 - 500
	4層目	路床	0.4		20 - 100
Section 2	1層目	アスファルト混合物	0.35	25.1	5,000 - 10,000
	2層目	路盤	0.35	75.2	100 - 500
	3層目	路床	0.4		20 - 100
Section 3	1層目	アスファルト	0.35	12.7	5,000 - 10,000
	2層目	碎石路盤	0.35	19.7	100 - 500
	3層目	路盤	0.35	92.4	100 - 500
	4層目	路床	0.4		20 - 100
Section 4	1層目	アスファルト	0.35	13.3	5,000 - 10,000
	2層目	碎石路盤	0.35	27.6	100 - 500
	3層目	路床	0.4		100 - 500

4. フォークトモデルの逆解析結果と考察

逆解析は不安定な問題であると言われており、色々な原因が逆解析結果に大きく影響する。初期値もその原因の1つである。そこで、本研究では初期値として一様乱数で50セットのデータを発生させた値を用いている。それぞれの断面で2回時系列データが計測されている。これら2セットのデータを用いて逆解析を行った。繰返し計算は安定しており収束までの繰返し計算回数はすべての場合で20回以下である。逆解析結果を表-3に記す。初期値を変えても逆解析結果の変動係数が6%以下であればひずみを計算した場合に影響がほとんど見受けられないことより、変動係数が6%以下の逆解析結果は信頼できる。

逆解析に用いた2セットのFWDデータの間には若干測定荷重と測定たわみの間にそれぞれ差がある。測定たわみと解析たわみを比較するため1セットのFWDデータで逆解析を行い、その時の解析たわみと測定たわみを図-3に比較する。いずれの断面においても両者のピーク値付近での一致度は非常に良いが、ピーク値付近を過ぎた後では、コンクリート舗装に比べて、アスファルト舗装の方が一致度は良い。コンクリート舗装の上層路盤はエコノクリートであり、その弾性係数はコンクリートの半分程度である。路床の剛性が低いsection 2, section3では上の層ほどloading areaの弾性係数は、no loading areaと比べてかなり小さい。しかし、路床の剛性の高い

section 4では、loading areaで上層の弾性係数より路床の弾性係数の低下が見られる。no loading areaとloading areaで弾性係数が異なるのは、促進載荷試験によりloading areaの舗装が劣化しているからである。減衰係数は、アスファルト層では同層の弾性係数の0.6%~0.8%、コンクリート層の減衰係数は同層の弾性係数の0.25%、路盤の減衰係数は同層の弾性係数の0.4~0.8%、路床の減衰係数は同層の弾性係数の0.1%~0.3%という結果が得られた。

5. 複素剛性モデルの逆解析結果と考察

舗装は粘弾性特性を有すると考えられており、FWD試験データを用いて逆解析を行うとき各層の剛性を複素弾性係数と仮定して逆解析を行うことがある。本研究でも、フォークトモデルと比較するため粘弾性モデルでも逆解析を行うことにした。逆解析に用いたデータは上と同じデータである。逆解析結果を表-4に記す。50セットの初期値を用いて逆解析を行ったが、逆解析結果の変動係数が10数%とあり、フォークトモデルの場合と比較して変動係数が大きい。

フォークトモデルのときと同様に、1セットのデータだけを用いて逆解析を行いそのときのたわみを図-4で比較している。同図は測定たわみと解析たわみが増加し出す付近で一致しないことを示している。

表-3 フォークトモデルの逆解析結果

		舗装表面温度(°C)		弾性係数(MPa)				減衰係数(MPa・s)			
				1層目	2層目	3層目	4層目	1層目	2層目	3層目	4層目
Section 1	-	16	解析結果	24648	12933	123	93	61	38	0.6	0.1
			標準偏差	1367	1347	22	2.8	5.3	2.8	0.09	0.01
Section 2	No loading area	16	解析結果	6631	-	136	102	47	-	1.0	0.3
			標準偏差	461	-	25	9.5	7.0	-	0.27	0.08
	loading area	15	解析結果	5724	-	111	98	47	-	0.9	0.3
			標準偏差	384	-	20	8.7	5.4	-	0.20	0.07
Section 3	No loading area	15	解析結果	10113	141	137	102	67	0.9	0.8	0.2
			標準偏差	288	15	4.7	4.3	2.0	0.07	0.05	0.06
	loading area	16	解析結果	5002	95	94	104	42	0.8	0.7	0.2
			標準偏差	87	6.4	2.7	5.0	0.9	0.06	0.04	0.07
Section 4	No loading area	15	解析結果	10416	138	353	-	63	0.7	0.7	-
			標準偏差	110	4.2	4.7	-	1.9	0.06	0.05	-
	loading area	16	解析結果	10568	186	293	-	65	0.7	0.7	-
			標準偏差	71	3.0	2.1	-	1.3	0.05	0.02	-

表-4 複素剛性モデルの逆解析結果

		舗装表面温度(°C)		複素剛性の実部(MPa)				複素剛性の虚部(MPa)			
				1層目	2層目	3層目	4層目	1層目	2層目	3層目	4層目
Section 1	-	16	解析結果	34264	5729	89	103	16332	2976	48	9.5
			標準偏差	4177	1423	25	7.4	1629	330	9.3	1.0
Section 2	No loading area	16	解析結果	3947	-	172	83	6021	-	95	24
			標準偏差	279	-	11	4.5	346	-	19	3.3
	loading area	15	解析結果	2896	-	156	77	5527	-	88	20
			標準偏差	189	-	7.6	3.4	251	-	14	2.5
Section 3	No loading area	15	解析結果	5932	156	144	73	7536	148	76	18
			標準偏差	374	34	3.8	2.6	310	22	7.5	1.1
	loading area	16	解析結果	2428	91	100	66	4442	88	71	19
			標準偏差	130	10	1.6	2.1	284	24	6.3	1.6
Section 4	No loading area	15	解析結果	7581	161	308	-	7684	92	107	-
			標準偏差	175	6.2	4.7	-	272	9.9	4.4	-
	loading area	16	解析結果	7827	211	265	-	7385	128	88	-
			標準偏差	117	5.3	1.5	-	107	4.4	1.3	-

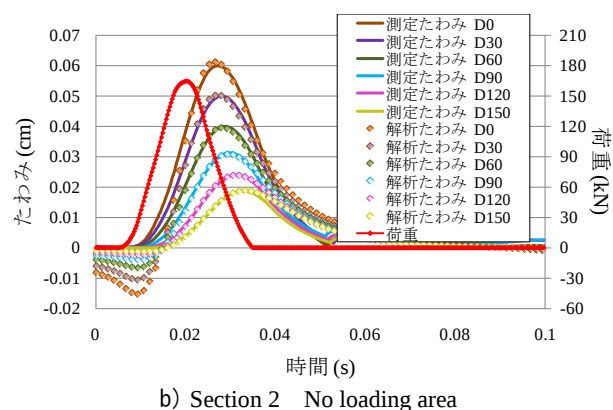
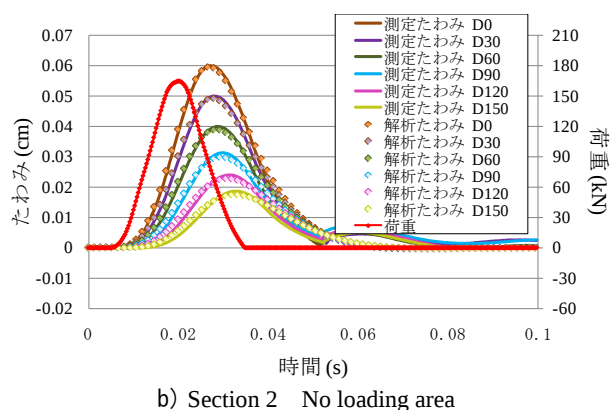
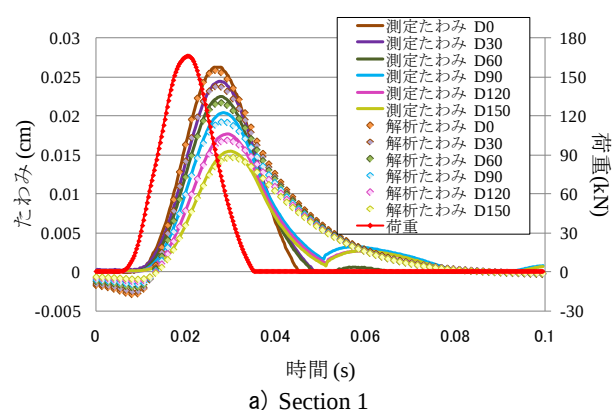
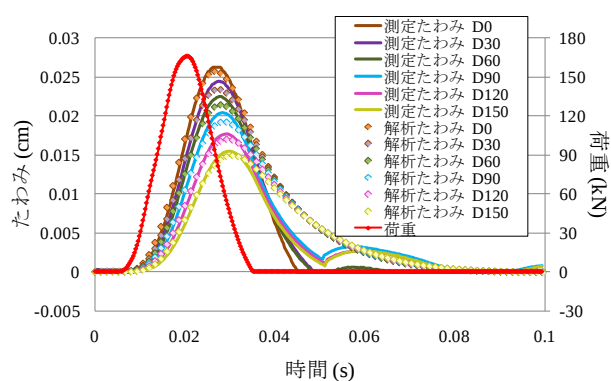
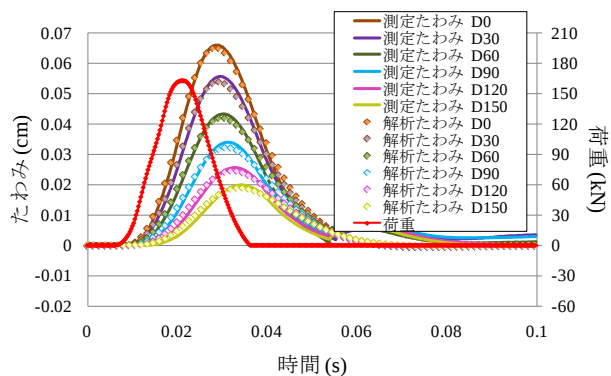
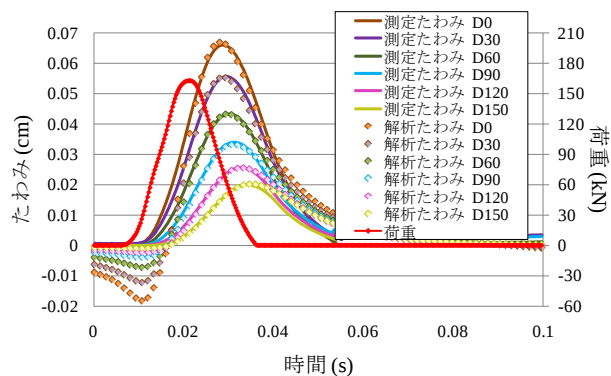


図-3 フォークトモデルのたわみ比較(続く)

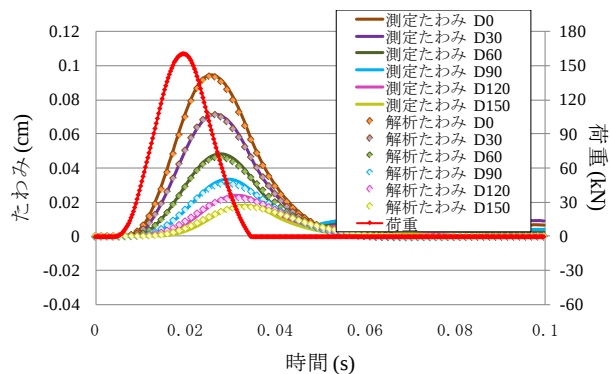
図-4 複素剛性モデルのたわみ比較(続く)



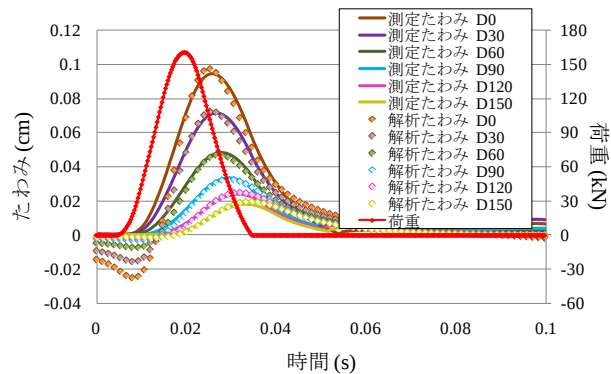
c) Section 2 loading area



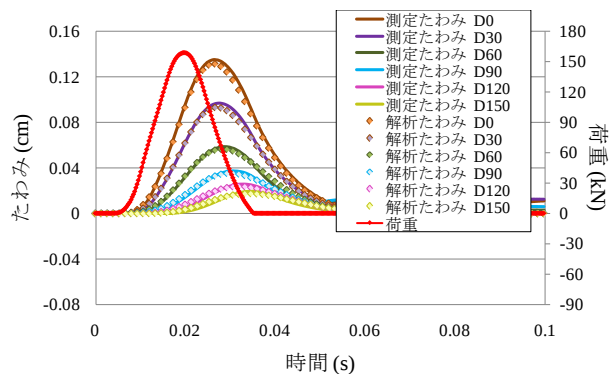
b) Section 2 loading area



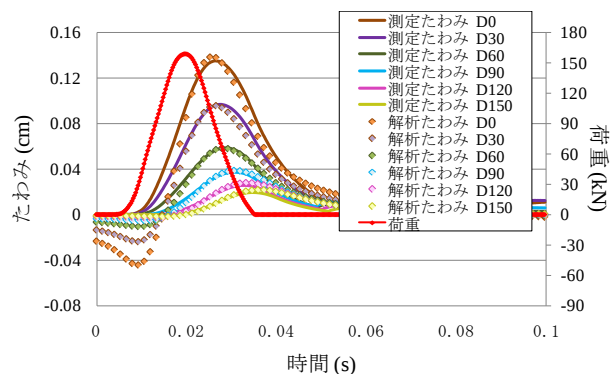
d) Section 3 No loading area



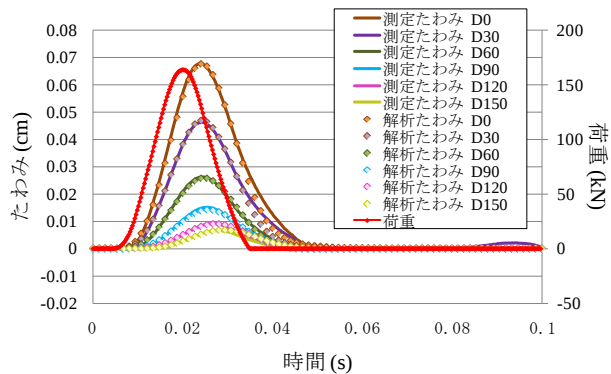
d) Section 3 No loading area



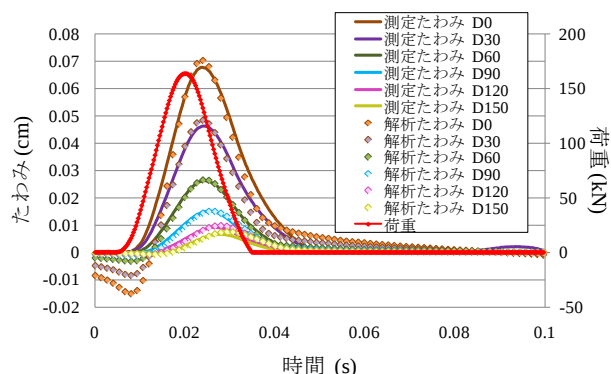
e) Section 3 loading area



e) Section 3 loading area



f) Section 4 No loading area



f) Section 4 No loading area

図-3 フォークトモデルのたわみ比較(続く)

図-4 複素剛性モデルのたわみ比較(続く)

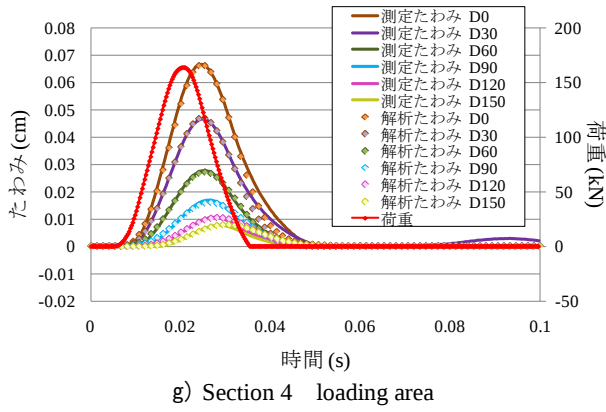


図-3 フォークトモデルのたわみ比較

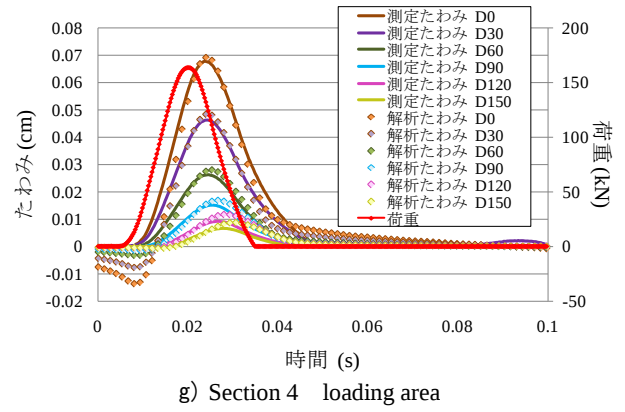


図-4 複素剛性モデルのたわみ比較

6. フォークトモデルと複素剛性モデルの比較

図-3 と図-4 の測定たわみと解析たわみを比較すると、ピーク値付近では良く一致しているが、たわみが増加し始める付近では、複素剛性モデルで計算したたわみの挙動は測定たわみと異なる傾向を示している。この原因は見かけの剛性が異なることにあると思われる。順解析では、時間領域を周波数領域に変換して計算している。

式(4a), (4b)が各層の剛性である。フォークトモデルを複素剛性モデルと比較するため式(3)に FFT を適用すると、式(4a)は、

$$E_v^* = E + i(2\pi f)\eta F \quad (6a)$$

となり、 E_v^* がフォークトモデルの複素剛性形式表記である。ここに、 $i = \sqrt{-1}$ であり、 $f = \omega/2\pi$ は周波数(Hz)である。

$\eta = F/E$ とおくと、見かけの剛性の大きさは、

$$|E_v^*| = E\sqrt{1 + (2\pi\eta f)^2} \quad (6b)$$

と書くことができ、周波数に依存している。一方式(4b)から複素剛性の大きさ $|E_c^*|$ を求めると、

$$|E_c^*| = \sqrt{(E_r)^2 + (E_i)^2} \quad (6c)$$

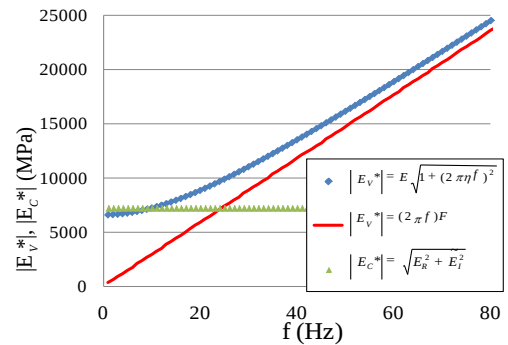
となり、周波数の値に関わらず一定である。

図-5 で各モデルの比較をしている。

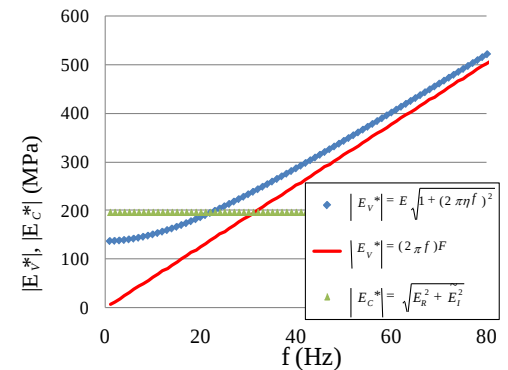
図-3 と比べ図-4 の解析たわみと測定たわみの一致度が悪いのは周波数依存性にあると考えられる。複素剛性は周波数一定の調和加振のときに用いられるモデルであり、FWD 試験のような衝撃荷重には適さないモデルであるということが出来る。

7. 結論

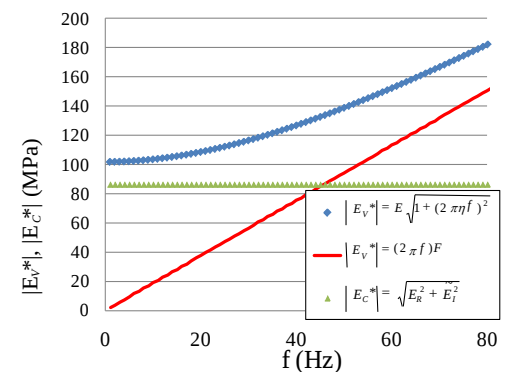
米国連邦航空局舗装試験施設で測定された FWD 試験データを用いて、フォークトモデルと複素剛性モデルで逆解析を行った。未知パラメータの数は 6



a) アスファルト舗装(Section2) 1 層目



b) アスファルト舗装(Section2) 2 層目



c) アスファルト舗装(Section2) 3 層目

図-5 周波数との関係

個(3層の場合)から8個(4層の場合)である。いずれの場合も50セットの乱数を用いて初期値を選択して逆解析を行っているが、すべての初期値で収束し、収束までの繰返し計算回数は20回以下である。

- (a) エコノクリートの弾性係数はコンクリートのおよそ半分程度である。
- (b) 路床の剛性が低いと繰返し载荷により上層部の弾性係数が顕著に低下する。
- (c) 路床の剛性が大きいとき、繰返し载荷により上層の弾性係数より路床の弾性係数の低下している。
- (d) 測定たわみとの一致度から見るとフォークトモデルが複素剛性モデルより良いことが明らかになった。
- (e) 測定たわみとの一致度から見ると、コンクリート舗装と比べ、フォークトモデルはアスファルト舗装に適したモデルと言える。
- (f) フォークトモデルから求めた複素剛性の大きさは、周波数が小さいほど小さく、周波数が大きくなるほど複素剛性も増加する。
- (g) 複素剛性モデルから求めた複素剛性の大きさは周波数が変化しても一定である。衝撃荷重に対する剛性評価には不適である。
- (h) (d),(f),(g)より FWD 試験データを用いて逆解析するとき複素剛性モデルよりフォークトモデルの方が適していると言える。

波形からでも想像できることではあるが、米国連邦航空局舗装試験施設で行われた FWD 試験データの測定荷重波形とたわみ波形の質が良いこと、および試験舗装断面の層厚、密度などの物性値なども管理しており、データベースの質の良さが確認できた。

謝辞：米国連邦航空局舗装試験施設で測定された FWD 試験データを整理して著者らに提供していただいたことに対し、当該試験施設の関係者および Dr. Edward Guo に深甚なる感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Strategic Highway Research Program: Layer Moduli Backcalculation Procedure: Software Selection, SHRP-P-651, National Research Council 1994.
- 2) Uzan, J., Dynamic Linear Backcalculation of Pavement Material Parameters, Journal of Transportation Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 1, 109-126, 1994.
- 3) 菊田征勇, James MAINA, 松井邦人, Quinx DONG : 複数の時系列データを用いた舗装構造の動的逆解析, 土木学会論文集, No.760/V-63, pp.223-230, 2004.5
- 4) Chatti, K., Ji, Y. and Harichandran, R. : Dynamic time domain backcalculation of layer moduli, damping and thickness in flexible pavements, CD-ROM, Transportation Research Board, National Research Council, Washington D.C.2004.
- 5) Ji, Y., Wang, F., Luan, M. and Guo, Z.: A simplified method for dynamic response of flexible pavement and applications in time domain backcalculation, *The Journal of American Science*, 2(2),pp.70-80, 2006.
- 6) 小澤良明, 松井邦人 : フォークトモデルで構成された舗装構造の波動伝播解析, 土木学会論文集 E 編, Vol.64, No.2, 314-322, 2008.
- 7) 小澤良明, 篠原祐貴, 松井邦人, 東滋夫 : 波動理論を用いた逆解析による粘弾性多層体の構造評価, 土木学会論文報告集 E 編, Vol.64, No.4, pp.533-540, 2008.10.
- 8) Matsui, K., Ozawa, Y and Takehara K.: Backcalculation of Airfield Pavement Structures Based On Wave Propagation Theory, FAA Worldwide Airport Technology Transfer Conference Atlantic City, New Jersey, USA, April 22-24, 2010.

BACKCALCULATION OF AIRPORT PAVEMENT BASED ON ANALYTICAL SOLUTION OF WAVE PROPAGATION THEORY

Kazuya TAKEHARA, Yoshiaki OZAWA and Kunihiro MATSUI

The objective of this paper is to confirm the validity of the backcalculation procedure in which analytical solution of wave propagation equation of layered systems. By applying impulse load at the surface of pavement, deflection wave propagates at pavement surface in a radial direction. Assuming pavement layers are composed of the Voigt material, layer parameters are estimated such that computed surface deflections agree well with FWD deflections. Also assuming layer material characteristics by complex modulus, the real and imaginary parts are obtained from FWD data. Both results are compared and discussed. The FWD data utilized here were measured at National Airport Pavement Test Facility (NAPTF), FAA William J. Hughes Technical Center, Atlantic City.