剛体平板載荷を受ける 多層弾性構造解析問題への GAMES の適用法

小澤 良明[1]・松井 邦人[2]

1..正会員 工修 東京電機大学 建設環境工学科 研究員（〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂）

2.フェロー会員 Ph.D. 東京電機大学 建設環境工学科 教授（〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂）

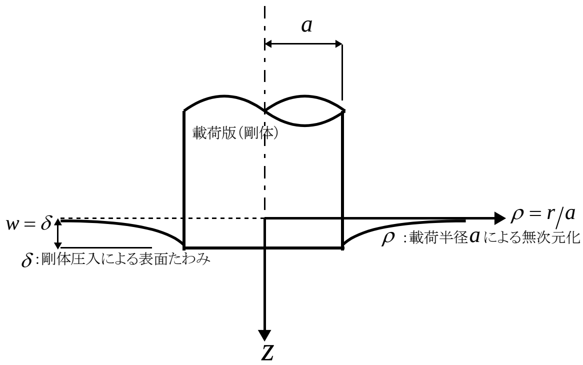
剛な平板を介して多層弾性構造に軸対称荷重が載荷するとき GAMES を利用することはできないが，工夫することで利用できれば便利である．本研究の目的は，GAMES を利用してこの問題の応答解析を行う方法を開発することである．GAMES は多層弾性構造の表面に等分布荷重が作用する条件で開発している．剛な平板を介して多層弾性構造に荷重が作用するとき，その接地圧は等分布でない．剛体と半無限体表面の間の接地圧は既知であるので，その接地圧を複数の等分布荷重で近似して GAMES で応答解析を行った．その結果半無限体の理論解との一致度が良く，1 層目の層厚が載荷半径の 2 倍を超えるとき多層弾性構造にも適用できることが明らかになった．

Key Words：*rigid plate loading, elastic multilayered system, GAMES, axi-symmetric analysis*

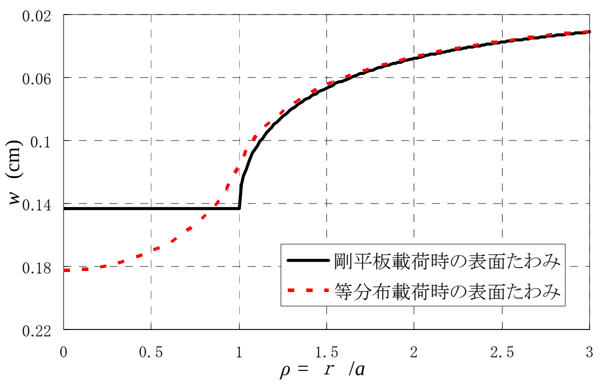
1．はじめに

しばしば地盤の支持力を評価するとき平板載荷試験が行われる．舗装のような構造物を解析するとき，舗装を線形多層弾性構造と考えて解析を行う．そのとき，舗装表面に作用する荷重が円形等分布のとき色々な研究がこれまで行われてきており，ELSA, CHEVRON, BISAR[1]や GAMES[2]を利用することが可能である．しかし，剛な平板を介して載荷するとき，接地圧は等分布でないため，これらのソフトウエアを用いることはできない．また，多層弾性構造の表面に剛な載荷版を介して軸対称荷重が作用するときの理論解は，著者らが知る限り誘導されていない．本研究では，GAMES を利用して近似的にその解を求める方法を検討している．

Sneddon は，図-1 に記す円形断面の剛体が半無限体の表面に圧入する問題の解を誘導している[3]．この場合，表面のたわみは剛体の底面で一定であり，その外側で表面の垂直応力はゼロとなる．図-2 には，等分布載荷と剛な平板載荷の表面たわみのグラフを記したものである．図より等分布載荷の解が剛な平板を介した場合の解と一致しないことは明らかである．Saint -Venant の原理によると，荷重分布の影響は荷重の周辺だけであり，それから離れると分布の影響を受けないことが知られている．



図−1 平板剛体圧入



図−2 平板剛体載荷と等分布載荷の表面たわみ
(P=49kN , E=100MPa , ν=0.35)

図-2 からも，$r/a \ge 2$ では，両者のたわみは非常によく一致していることは明らかである．

渡辺[4)]は軸対称荷重が円形剛版を介して有限領域に拘束された多層弾性体の表面に作用する問題の解を誘導している．また，秋葉ら[5)]は室内 CBR 試験においてモールドで拘束された試料の応力解析を行っている．これらの研究で Sneddon の解が利用されているが，厳密に述べると適用できない．両研究において妥当な解析結果が得られていることから判断して，この接地圧を用いてもそれに伴う誤差は局所的で比較的小さいと思われる．

本研究でも，Sneddon により導かれた接地圧を複数の等分布荷重で近似し，GAMES で半無限体の応答解析を行った．半無限層の場合の Sneddon の解と，この近似解とを比較しその精度を検証した．また，多層構造への拡張性を確認するため，2 層構造の層厚，層弾性係数比を変え応答解析を行い，剛な平板の下面でたわみが一定になるかどうかでこの接地圧の適用範囲を検討した．さらに，3 層構造の解析も行い，本近似法の有効性を確認した．

2. 平板載荷の接地圧

(1) 理論接地圧

半無限体に圧入する円形断面の剛体の問題を軸対称問題と考えることができるとき，その境界条件は，以下のようになる．

$$w(r,0) = \delta \qquad 0 < r \le a \tag{1a}$$

$$\sigma_z(r,0) = 0 \qquad a < r \tag{1b}$$

δ は圧入量(表面たわみ)，a は円形断面の半径である．Sneddon は，半無限体のせん断弾性係数を G，ポアソン比を ν，剛体と半無限体の接地圧 $p(r)$ を次式のように誘導している．

$$p(r) = -\frac{2G\delta}{(1-\nu)\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \tag{2}$$

式(2)より，接地圧は円形断面の中心で $-2G\delta/((1-\nu)\pi a)$，外縁では $-\infty$ となる．式(2)を円形断面で積分すると合力 P が得られる．

$$P = \int_0^a\int_0^{2\pi} p(r)rd\theta dr = -\frac{4aG\delta}{1-\nu} \tag{3}$$

式(2), (3)より，$p(r)$ と P の関係は式(4)のようになる．

$$p(r) = \frac{P}{2\pi a\sqrt{a^2-r^2}} \tag{4}$$

また，Sneddon は次式のように表面たわみを求めている．

$$w(r,0) = \begin{cases} \delta & 0 \le r \le a \\ \dfrac{2\delta}{\pi}\sin^{-1}\dfrac{a}{r} & r > a \end{cases} \tag{5}$$

(2) 近似接地圧

接地圧 $p(r)$ は式(4)で与えられており，円の中心 $r=0$ で $P/(2\pi a^2)$，$r=a$ では無限大となる．そのような荷重を GAMES では扱うことができないので，この荷重を離散化して複数の等分布荷重で近似する必要がある．ここでは次に述べるような方法で離散化を行う．

円形の平板を半径の異なる N 個の同心円となるように分割する．最小の半径を r_1 として最大半径は $r_N = a$ となる．各円の半径は剛な平板に作用する合力を P として，一番内側は半径 r_1 の円とその外側は $r_i - r_{i-1}$ $(i \ge 2,)$ の円環からなる N 個の領域に分割する．各領域の合力が等しくなるように r_i を決定する．すなわち各領域の合力は $P_i = P/N$ である．この合力が各領域で等分布すると考える．式(4)を r_{i-1} から r_i まで積分すると i 番目の領域の合力

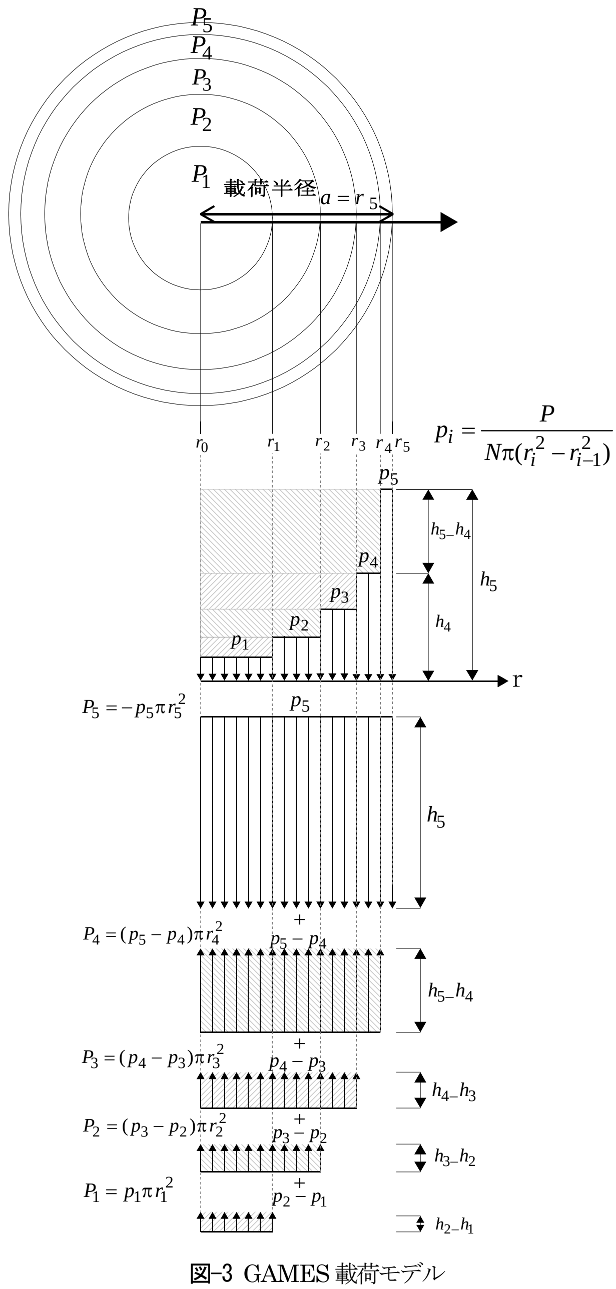


図-3 GAMES 載荷モデル

が得られる．また，すべての領域で合力が $P_i = P/N$ であることを考慮すると次式が得られる．

$$P\left(\sqrt{1-(r_{i-1}/a)^2}-\sqrt{1-(r_i/a)^2}\right)=\frac{P}{N} \qquad (6)$$

式(6)より r_{i-1} と r_i の間には次のような関係が成立つ．

$$r_i = a\sqrt{1-\left(\sqrt{1-(r_{i-1}/a)^2}-1/N\right)^2} \qquad (7)$$

r_{i-1} と r_i の間の接地圧を等価な等分布荷重 p_i で置き換えると，

$$p_i = \frac{P}{N\pi\,(r_i^2 - r_{i-1}^2)} \qquad (8)$$

単位ステップ関数は式(9)のように定義できる．

$$y = H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \qquad (9)$$

この関数を用いると，離散化した接地圧を式(10)のように書くことができる．この接地圧を離散荷重と呼ぶ．

$$p(r)=\sum_{i=1}^{N} p_i\{H(r-r_{i-1})-H(r-r_i)\} \qquad (10)$$

ここに，$r_0 = 0$，$r_N = a$ である．式(10)を下記のように書き換える．

$$p(r) = p_N\{H(r-r_0)-H(r-r_N)\}$$
$$-\sum_{i=1}^{N-1}(p_{i+1}-p_i)\{H(r-r_0)-H(r-r_i)\} \qquad (11)$$

式(11)の右辺は N 項からなるが，それぞれの項は $r=0$ から $r=r_i, (i=1,\ldots,N)$ までの等分布荷重を意味している．したがって，GAMES を用いて解析することが可能である．応答解析は N 個の荷重について計算を行い，それぞれの応答結果について式(11)と同様の演算を行えばよい．

(3) 離散荷重による解析結果

離散荷重で応答解析を行い，その結果の精度は，分割数が多いほど一般に解析精度は向上するが，計算回数が増加し解析時間も増える．そこで本研究では，N 個の領域に分割し $N=5, 10, 15$ の3通りについて解析を実施し，その結果を Sneddon の理論解と比較することとした．

図-4 に解析に用いた半無限体のモデルを示す．**表-1** に分割した半径と式(10)で求めた離散荷重を示す．表中の数値は無次元化したものである．ここでは,すべての領域で合力が等しくなるように分割しているので,荷重強度が大きくなる外側に近づくほど円環の肉厚が急激に狭くなっている．

図-5 は，理論接地圧と分割数を変えたときの離散荷重を比較している．離散荷重は載荷版外縁近くで理論接地圧との差が大きいが，N が増加するほど理論接地圧との一致度はよくなっている．理論接地圧は外縁で無限大になるが，離散荷重は一番外側の領域でも有限の値である．

図-6 において，式(5)の理論解たわみと分割数 N を変えて GAMES で計算した離散荷重のたわみを比較している．

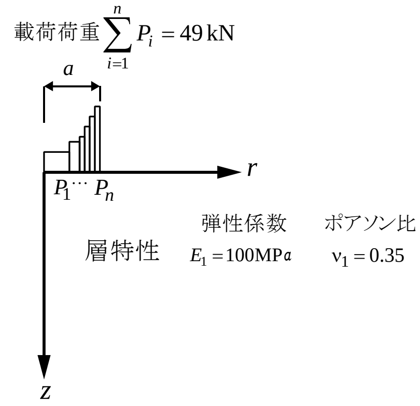


図-4 半無限体解析モデル

表-1 分割領域の半径 r_i と分布荷重 p_i

	5点近似		10点近似		15点近似	
	r_i/a	p_i/p_p	r_i/a	p_i/p_p	r_i/a	p_i/p_p
$i=1$	0.600	−0.56	0.436	−0.53	0.359	−0.52
$i=2$	0.800	−0.71	0.600	−0.59	0.499	−0.56
$i=3$	0.917	−1.00	0.714	−0.67	0.600	−0.60
$i=4$	0.980	−1.67	0.800	−0.77	0.680	−0.65
$i=5$	1.000	−5.00	0.866	−0.91	0.745	−0.71
$i=6$			0.917	−1.11	0.800	−0.79
$i=7$			0.954	−1.43	0.846	−0.88
$i=8$			0.980	−2.00	0.884	−1.00
$i=9$			0.995	−3.34	0.917	−1.15
$i=10$			1.000	−10.01	0.943	−1.36
$i=11$					0.964	−1.67
$i=12$					0.980	−2.14
$i=13$					0.991	−3.00
$i=14$					0.998	−5.00
$i=15$					1.000	−15.01

$P_p = P/(a^2\pi)$

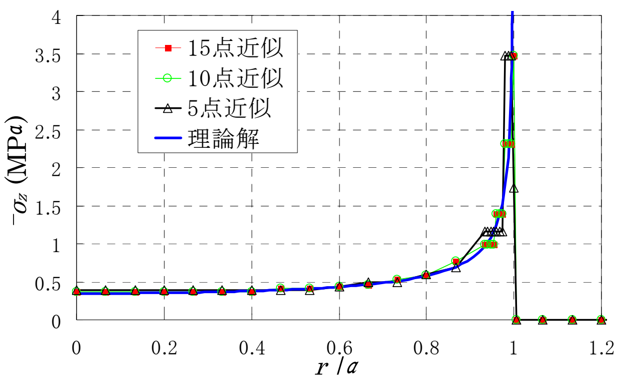


図-5 理論接地圧と近似接地圧

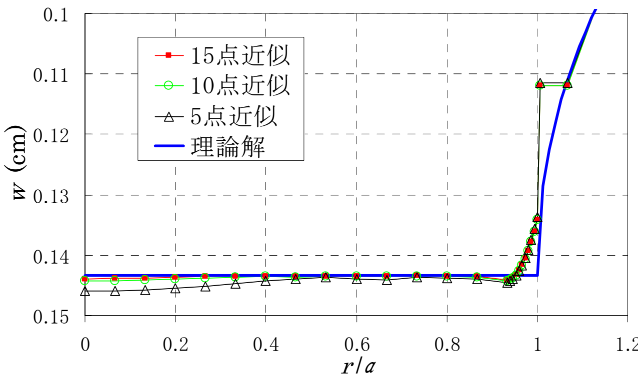


図-6 分割数と表面たわみ

N が大きくなると理論解との一致度が向上しているが，外縁付近で一致度の改良は見られない．その理由は理論解では外縁で接地圧が無限大となるが，離散荷重では十分にそのように大きな接地圧を模擬できないからと思われる．また，載荷中心付近では，5 分割で近似すると解析精度が劣るが，$N = 10, 15$ ではかなり改良が見られ，両者の差は小さい．少なくとも 10 分割程度が必要である．

図-7 では，離散荷重を用いた近似解の精度を確認するため，深さ z/a を変えて理論解と近似解の鉛直応力 σ_z を比較している．近似解では接地圧を 10 分割で近似した荷重で解析を行っている．また，同図では，σ_z を $2G\delta/a$ で除して無次元し，横軸を r/a とした．グラフ中の凡例内の数値は，z/a である．図中，理論解を実線，近似解を凡例の記号で示した．図より，外縁付近を除くと表面では両者の差は僅少であり，$z/a = 0.2$ より深い位置では，理論解と非常に良く一致している．

3. 2 層構造への適用性

(1) 適用性の評価方法

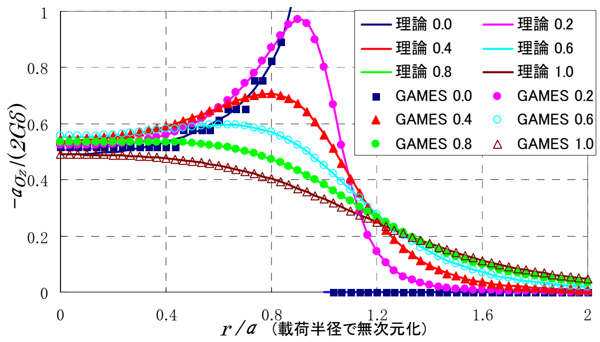
式(4)は，剛な平板載荷を行うときに生じる半無限体表面の接地圧であり，2 層構造の接地圧ではない．しかし，Saint -Venant の原理によると，荷重分布の影響はその周辺に限られるので，1 層目の層厚がある程度大きいと半無限体の接地圧を用いて解析を行っても差し支えないと思われる．

図-8 に 2 層構造の解析モデルを記す．そこで，1 層目の層厚と，1 層目と 2 層目の弾性係数比を変えて解析を行い，上述の離散荷重を適用できる範囲について検討した．解析結果の精度は，平板下面のたわみが一定となるかどうかで評価している．平板下面で分割した領域の中心のたわみの平均値と個々の領域のたわみの差の 2 乗和の平均値を用いて，式(12)で評価する．

$$Er = \frac{1}{\overline{w}}\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15}\left(\overline{w} - w_j\right)^2} \qquad (12)$$

ここに，$\overline{w}$ は表面たわみの平均値，w_j は $r = 0$〜14cm $(0 < r/a < 0.93)$ の1cm（$r/a = 0.07$）刻みごとの表面たわみである．すべての領域の着目点でたわみが等しくなると，Er はゼロとなる．そのとき近似解は厳密解と一致すると考えることが出来る．**図-6** から明らかなように，最外縁では分割数を変えてもたわみが改良されないし，分割数を変えてもほとんど変化しないので，式(12)の計算では考慮していない．

離散化した荷重の適用範囲を下記のような手順で調べている．



＊凡例中の数値は z/a を記す

図-7 近似解と理論解との比較

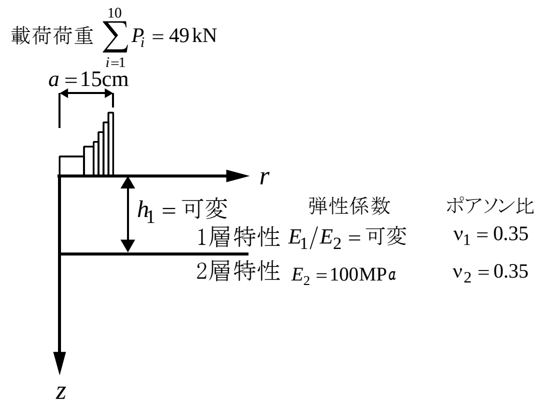


図-8 2 層構造モデル

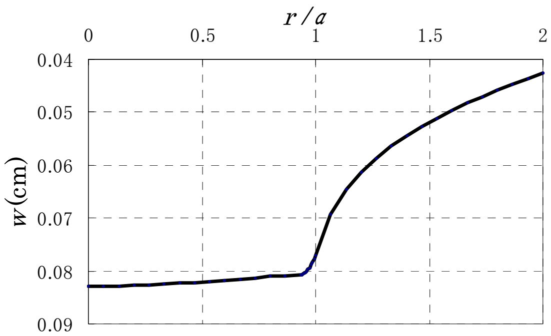


図-9 2 層構造表面たわみ
（ $h_1/a = 1.8$，$E_1/E_2 = 3$ ）

1) 1 層目の厚さ h_1 を，$h_1/a = 1$ から 3 まで，0.2 刻み 11 通りに変化させる．
2) 各 h_1/a の値に対して，E_1/E_2 を 0.9〜10 まで 11 通りに変化させる．
3) h_1/a と E_1/E_2 組み合わせの総数は 121 通りとなり，すべての組み合わせで応答解析を行う．
4) 式(12)を用いて，各解析データの誤差 Er を求める．

表-2 近似解が表面たわみに与える誤差(2 層構造)

		h_1/a										
		1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
E_1/E_2	0.9	0.0035	0.0028	0.0024	0.0022	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021
	1	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021
	2	0.0139	0.0139	0.0108	0.0085	0.0069	0.0056	0.0047	0.0040	0.0035	0.0032	0.0029
	3	0.0238	0.0184	0.0144	0.0113	0.0091	0.0074	0.0061	0.0052	0.0044	0.0039	0.0034
	4	0.0262	0.0203	0.0159	0.0126	0.0101	0.0082	0.0068	0.0057	0.0049	0.0042	0.0037
	5	0.0271	0.0210	0.0165	0.0131	0.0105	0.0086	0.0071	0.0060	0.0051	0.0044	0.0039
	6	0.0274	0.0213	0.0167	0.0133	0.0107	0.0088	0.0073	0.0061	0.0052	0.0045	0.0040
	7	0.0274	0.0213	0.0167	0.0133	0.0107	0.0088	0.0073	0.0062	0.0053	0.0045	0.0040
	8	0.0272	0.0211	0.0166	0.0132	0.0107	0.0088	0.0073	0.0062	0.0053	0.0045	0.0040
	9	0.0269	0.0209	0.0164	0.0131	0.0106	0.0087	0.0073	0.0061	0.0052	0.0045	0.0040
	10	0.0266	0.0206	0.0162	0.0129	0.0105	0.0086	0.0072	0.0061	0.0052	0.0045	0.0039

表-2 に，各モデルに対する誤差を記す．弾性係数比に着目すると，h_1/a の値に関らず弾性係数比 7 で Er の値は最大になっている．弾性係数比を小さくすると表層弾性係数と 2 層構造の弾性係数との差が小さくなり，1 層構造である半無限体モデルに近づくためである．また，弾性係数比 7 より弾性係数比を大きくすると，1 層目の剛性が大きくなり剛体に近づくため 1 層目の変形が小さくなり，荷重分散機能が増加，鉛直方向の変位は主に 2 層目の変位によるものである．

層厚については，剛性比が一定で h_1/a が大きくなるほど，1 層目の変形は小さくなり Er は減少する．この場合鉛直変位の主因は，2 層目の変形が寄与している．

離散荷重の適用範囲を，**表-2** から $Er = 0.01$ 以下を適用可能と判断した．この数字は平板下面のたわみの変動が 1%以下ということで妥当な判断だと考えた．この数字を基準に考えると，**表-2** の灰色の領域を除く範囲である．$h_1/a \geq 2$ であれば，弾性係数比に関らず適用できる．

図-9 に，解析適用範囲内で，一番誤差の大きい($h_1/a = 1.8$, $E_1/E_2 = 3$)ときの表面たわみ w を記した．載荷中心で表面たわみは 0.083cm ，外縁部($r/a = 0.933$)でたわみは 0.081cm であり，その差は比較的小さい．

(2) 平板載荷と等分布載荷

$h_1/a \geq 2$ で最も誤差 Er の大きい平板載荷モデルを用いて，平板載荷と等分布荷重による挙動の違いを確かめる． 1 層目の層厚を $h_1 = 30\text{cm}$ ， 弾性係数を $E_1 = 700\,\text{MPa}$ ， 2 層目の弾性係数を $E_2 = 100\,\text{MPa}$ ，載荷半径を $a = 15\text{cm}$ とする． $49\,\text{kN}$ の荷重が剛な平板を介して作用するときと等分布載荷するときで応答解析を行う．なお断面図を**図-10** に記す．両者の計算結果をデカルト座標系で整理し，**図-11** (a) に平板載荷，**図-11** (b) に等分布載荷による ε_x のコンター図を記す． $z = 30\text{cm}$ に 1 層目と 2 層目の境界がある．載荷点直下の層境界面ではどちらの図にも引張りひずみが発生しているが，引張領域は平板載荷の方が等分布載荷と比べその範囲は狭い．

また，表面において，等分布載荷と比べ平板載荷では平板の外縁で大きな圧縮ひずみ ε_x が発生しているが，平板中央において圧縮ひずみ ε_x は非常に小さくなっている． この原因は，剛な平板が外縁で突っ張ることにより，圧縮が生じようとする表面の動きを拘束しているためであると考えられる．平板載荷では，平板中央の表面で ε_x は減少するが，圧縮ひずみの領域は等分布荷重により生じる圧縮ひずみの領域と比べやや大きい．

図-12 (a) に平板載荷，**図-12** (b) に等分布載荷による ε_z のコンター図を記した．平板載荷では外縁で大きな圧縮ひずみが発生しているが，板中央付近の下面では引張りひずみが発生している．等分布載荷では表面から 1 層目の層厚の1/3 付近にかなり大きな圧縮ひずみが生じている．

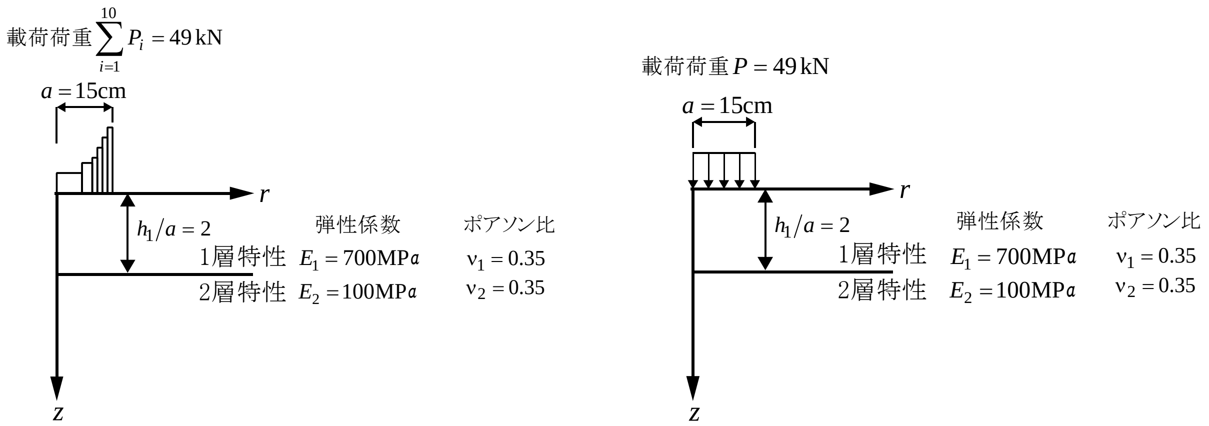
両図から，等分布荷重では ε_x と ε_z は荷重中央で大きい．このことは主に荷重中央から下方に伝達していることを示しているが，平板載荷では ε_x と ε_z は平板外縁で大きな値をとり，平板に作用する荷重は主に平板外縁から下方に伝達していることを示唆している．

4. 多層構造への適用

ここでは**図-13** のような 3 層構造を解析する．また，1 層目の厚さは 2 層構造と同じとした．平板載荷を 2 層構造と同様に $N = 10$ で離散化している．**図-14** に表面たわみを描いた．

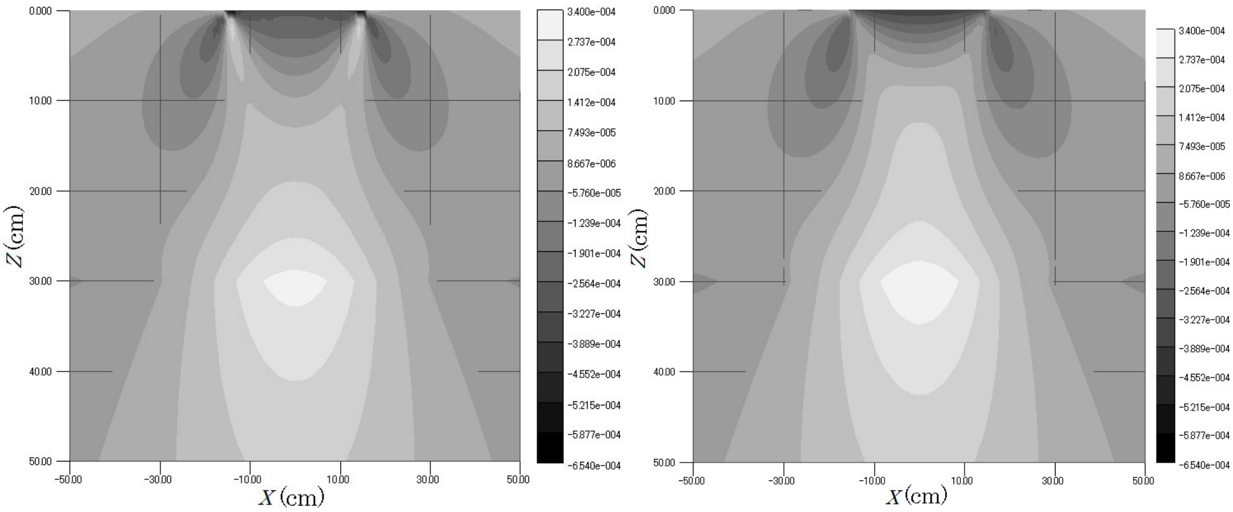
表面たわみは，載荷中心で $w = 0.220\,\text{cm}$ 外縁近くの $r/a = 0.933$ で $w = 0.218\text{cm}$ である．式(12)の評価式の値は $Er = 0.0043$ となり，十分に**表-2** の誤差の許容範囲にある．この結果より，式(12)の評価式の考え方は多層構造にも適用可能である．

図-15 に，平板載荷と等分布載荷により生じる ε_z のコンターを $x-z$ 面内で描いた．2 層構造と同様，平板載荷



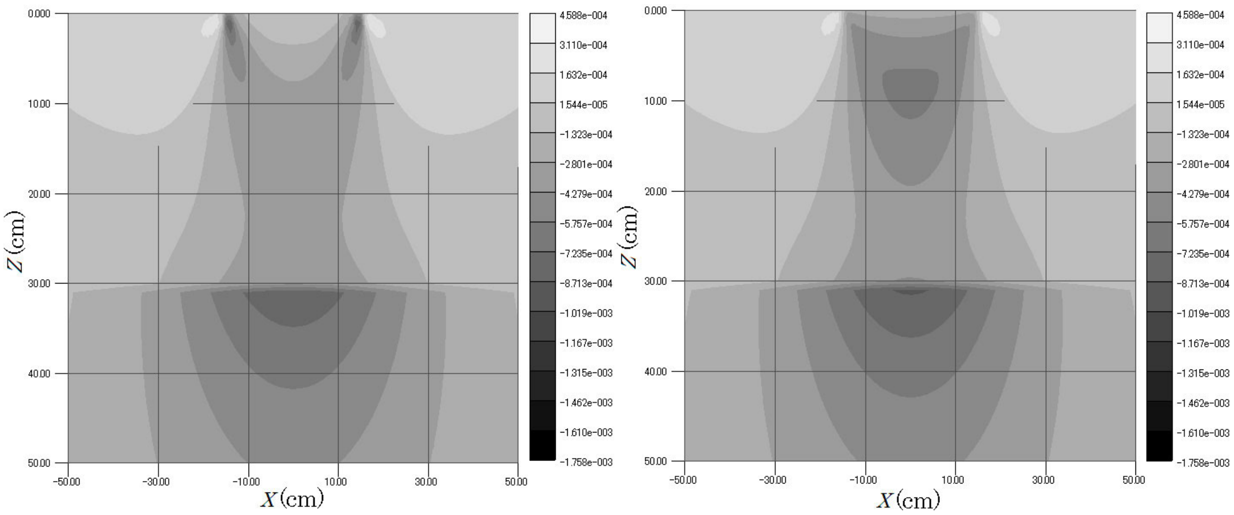
(a) 平板載荷モデル　　(b) 等分布載荷モデル

図-10 2層構造載荷モデル



(a) 平板載荷　　(b) 等分布載荷

図-11 ε_x のコンター図



(a) 平板載荷　　(b) 等分布載荷

図-12 ε_z のコンター図

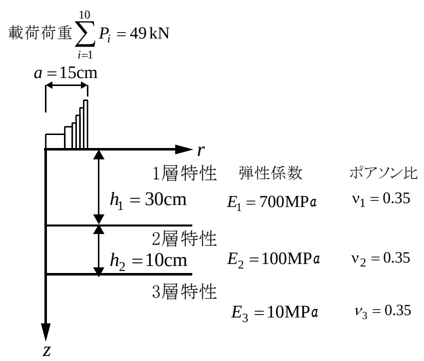


図-13 解析モデル層特性

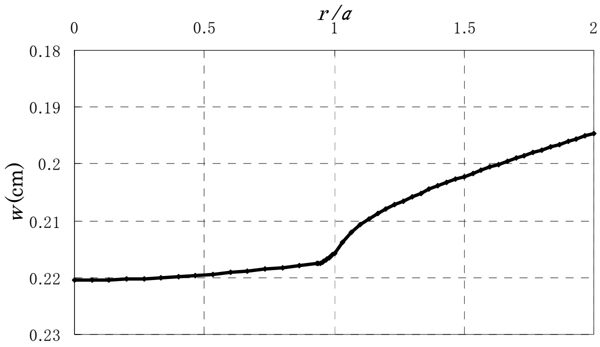
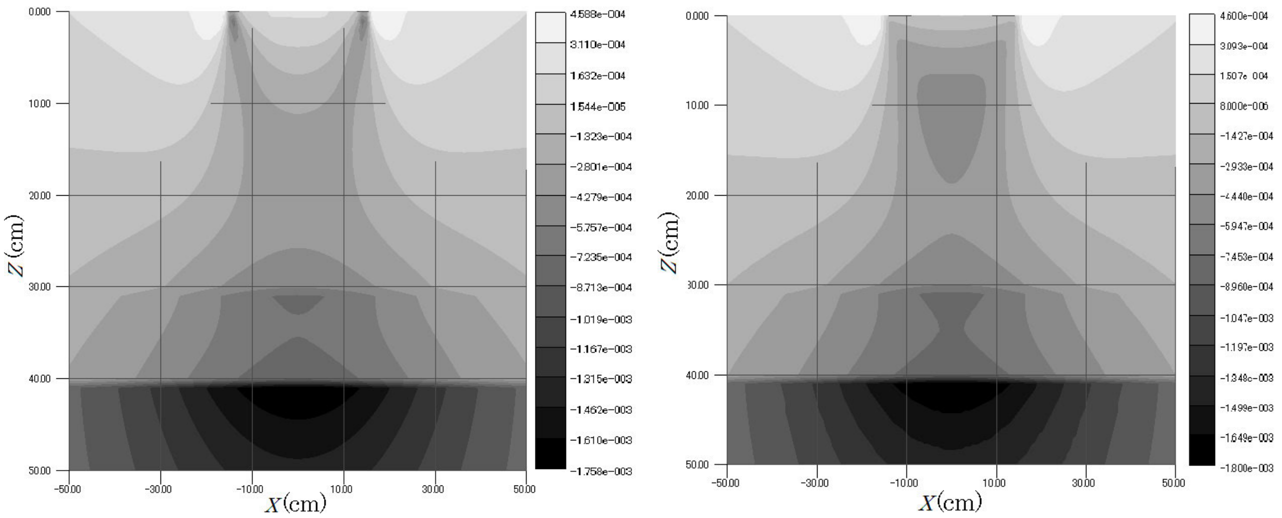


図-14 3 層構造表面たわみ



(a) 平板載荷　(b) 等分布載荷

図-15 ε_z コンター図

では外縁から下方にひずみが伝わっているのに対し，等分布荷重では荷重中心から下方にひずみが伝わっている．

5. 結論

表面に円形等分布荷重が作用する多層弾性構造の解析ができるソフトウエア GAMES を用いて，剛な載荷版を介して作用する軸対称荷重による多層弾性構造の応答解析を近似的に行う方法を開発した．その結果から次のような結論を得た．

1) 載荷版外縁で理論解の接地圧が無限大になるが，近似解では有限である．離散化数 10 以上で解析を行えば，外縁付近を除き非常に良く一致する．
2) 半無限体に対して，剛な平板を介して荷重を受ける多層構造の弾性解析を，複数の等分布荷重を利用し近似的に行うことが可能である．
3) 2 層構造において E_1/E_2 の値が 7 より大きくなると，1 層目の変形が小さくなり荷重分散機能が増加，鉛直方向の変位は主に 2 層目の変位により生じる．
4) 等分布載荷では荷重中心直下に大きなひずみが発生するが，平板載荷では荷重は平板外縁から下方に分散するため，荷重中心直下のひずみは比較的小さい．
5) 多層構造において，1 層目の層厚と載荷半径の比 h_1/a が 2 以上であれば弾性係数比に関係なく半無限の接地圧を適用できる．

謝辞：本研究は，科学研究費補助金基盤研究(C)17560413(平成 17 年度～18 年度)の支援を受けて行った研究の一部であることを記し，ここに，謝意を表します．

参考文献

1) De Jong, D.E. Peutz, M.G.F. and Korswagen, A.R. : COMPUTER PROGRAM BISAR, Layered Systems under Normal and Tangential Surface Loads, Koninklijke/Shell -Laboratorium, Amsterdam, 1979.
2) 土木学会：多層弾性理論による舗装構造解析入門，舗装工学ライブラリー3，2005.3.
3) Sneddon, I. ： FOURIER TRANSFORMS, pp.458-462, McGraw-Hill Book Company, 1951.
4) 渡辺正平：有限領域に拘束された軸対称多層弾性体の解析，土木学会論文集 No.433/V-15, pp.207-214, 1991.8.
5) 秋葉正一，能町純雄，木田哲量，栗谷川裕造：モールド内に拘束された円柱弾性体の 3 次元応力解析，土木学会論文集，No.484/V-22，pp.41-49，1994.2.

USE OF "GAMES" TO MULTILAYERED ELASTIC SYSTEMS SUBJECTED TO RIGID PLATE LOADING

Yoshiaki OZAWA, and Kunihito MATSUI

The objective of this study is to develop a method of computing responses of axisymmetric elastic multilayered systems subjected to rigid plate loading by "GAMES". The software can solve problems of elastic multilayered systems with multiple uniform loads. When a load acts on a rigid plate contacting the system, contact pressure distribution is not uniform. Since the contact pressure on an elastic semi-infinite space has been known, a method to approximate the distributed contact pressure by multiple uniform loads is presented and an elastic multilayered system is analyzed with the loading systems. The multiple loading approach results in a good agreement with theoretical responses of a semi-infinite space, and it becomes apparent the approach can be applied to an elastic multilayered system with good accuracy if a top layer is as thick as or thicker than a diameter of loading plate.